С.Л. Василенко, д.т.н.

РАЗВИТИЕ ЗАДАЧИ О «ЗОЛОТОМ» СЕЧЕНИИ И СВЯЗАННЫХ С НИМ ЧИСЛАХ ФИБОНАЧЧИ И ЛЮКА

При всей своей уникальности классическое «золотое» сечение с числом $\Phi = 1{,}618...$ отражает один из законов пропорциональной связи целого (формализуемого единицей) и его составляющих частей, а с точки зрения математики является лишь частным решением квадратного уравнения, порождающего в общем случае целое семейство гармонических пропорций.

По качественным характеристикам они близки к свойствам «золотого» сечения и как числовые инварианты или константы приводят к множеству рекуррентных последовательностей Фибоначчи и Люка.

Обобщенные «золотые» пропорции, как впрочем, и многие другие, органически присущи окружающему миру и могут проявляться в разных сферах жизнеустройства и человеческой деятельности, вследствие чего их изучение и осмысление представляется важным в научном и философском аспектах.

Поэтому вполне закономерно повышенное внимание к данной теме, и не случайно ряд авторов в последние годы расширили область исследования гармонических пропорций, которые в частном случае вырождаются в обычное «золотое» сечение. В частности, А. Стаховым подобное расширение осуществлено для уравнения $x^p(x-1)=1$.

Целью настоящей работы является дальнейшее развитие подхода в части обобщения «золотых» пропорций и связанных с ними рекуррентных числовых последовательностей.

Основными задачами ставятся: установление общих признаков обобщенных «золотых» сечений, их геометрическая интерпретация, определение правил построения обобщенных числовых последовательностей Фибоначчи и Люка и другие.

Автор далек от мысли универсализации, глобализации или канонизации «золотого» сечения, равно как и его обобщающих вариантов. Не убедительной, на наш взгляд, выглядит также аргументация о присвоении им некой всеобщей или единой меры гармонии.

Всеобъемлющей формулы гармонии нет априори, поскольку все, что нас окружает, так или иначе, несет в себе элементы скрытой слаженности и согласованности: будь то фрактал, какофония оркестра, броуновское движение частиц, горы, облака и т.п.

Важным представляется другое: наличие разнообразных (!) пропорций и симметрий – это объективная присущая мирозданию реальность. Только одни из них распространены больше, а другие меньше. Однако ни те, ни иные не главенствуют в природе, образуя общий миропорядок. У каждого своя ниша, индивидуальная роль и неповторимая окраска.

И если говорить о «золотом» сечении, то более уместным в этом плане представляется его характеристика, как одного из высших проявлений структурно-функциональной соразмерности целого и составных частей.

Кстати, компоненты или элементы целого часто исчисляются бесконечными множествами, где тривиальная «золотая» пропорция, если она даже имеет место, настолько размыта и нечетко выражена, что трансформируется в совершенно иные формы.

В равной степени это относится и к обратному переходу, когда невыясненные закономерности далеки от гармонических пропорций, но в своих проявлениях демонстрируют свойства, которые приближенно напоминают признаки этих пропорций.

И здесь таится определенная опасность в части неадекватного наделения объектов не свойственной им атрибутикой. Поэтому когда читаешь, что и сердце стучит исключительно «золотой» пропорцией, и звезды движутся только по ней, а человек – это вообще сплошное «золотое» сечение, то становится несколько грустно. И невольно наталкивает на мысль, что речь идет не о действительно божественной пропорции, а каком-то искусственно взращиваемом и всепожирающем монстре.

Поэтому, нисколько не умаляя ее замечательных качеств, а наоборот, расширяя горизонты осмысления, попытаемся углубить наши представления в плане дальнейшего обобщения гармонических пропорций.

Итак, рассмотрим алгебраическое уравнение степени $s = p + 1$ с неизвестным x и положительными действительными коэффициентами m, q

$$x^p(x-m) - q = 0\,, \tag{1}$$

имеющее $p+1$ корней x_j, $\mathbf{и} = (p, m, q)$ – вектор параметров.

Данное уравнение включает ряд обобщений и модификаций «золотых» сечений, в том числе:

$\mathbf{и} = (1, 1, 1)$ – классическое «золотое» сечение $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$;

$\mathbf{и} = (p, 1, 1)$ – p-сечения (А. Стахов и др.);

$\mathbf{и} = (1, m, q)$ – «металлические» пропорции (В. Шпинадель), T_m-гармоники (А. Татаринков) или mq-сечения [1].

Свойства корней. В последовательности коэффициентов $(1,\ -m,\ -q)$ присутствует только одна перемена знаков (с плюса на минус). Поэтому согласно правилу знаков Декарта [2, с. 40] уравнение (1) имеет единственный положительный корень $\phi = \phi(\mathbf{и}) = x_{p+1}$ (рис. 1), который в общем случае отличается от величины $\Phi = \left(\sqrt{5}+1\right)/2$, соответствующей классическому «золотому» сечению.

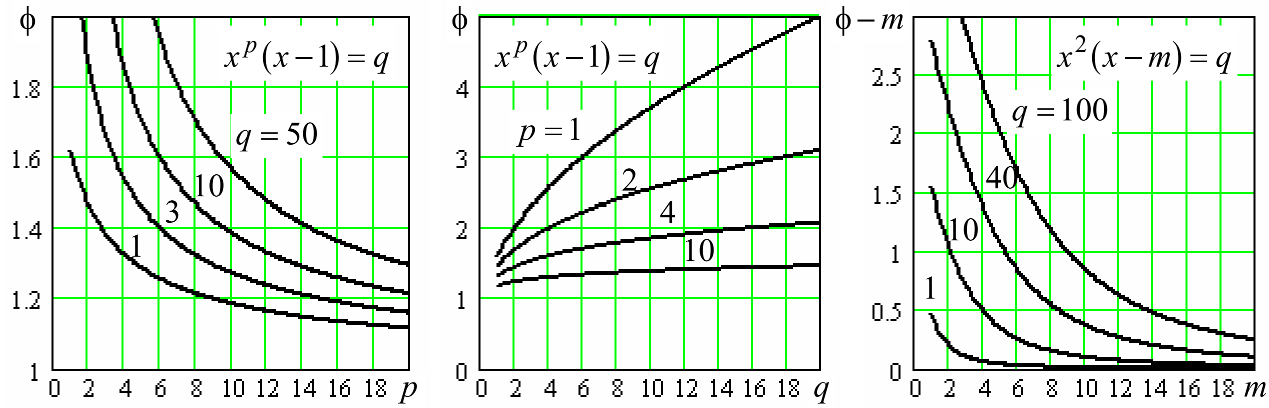


Рис. 1. Примерные зависимости
обобщенных «золотых» пропорций с переменными *p, m, q*

Если p – нечетное число, то образуется второй действительный корень, являющийся отрицательным. Все остальные корни – мнимые.

Согласно теореме Виета [3, с. 170], устанавливающей соотношения между корнями полинома и его коэффициентами, совокупность x_j уравнения (1) обладает следующими свойствами:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{s} x_j = m, \qquad \prod\limits_{j=1}^{s} x_j = (-1)^p q, \\ \sum\limits_{1 \le i<j}^{s} x_i x_j = \sum\limits_{1 \le i<j<k}^{s} x_i x_j x_k = \ldots = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Здесь сумма x_j равна $-(-m)/1 = m$, а их произведение $(-1)^{p+1}(-q)/1 = (-1)^p q$.

Возводя сумму корней в квадрат, куб и вообще в любую степень, после выполнения несложных алгебраических преобразований с использованием указанных свойств, можно получить простую формулу для суммы степеней корней

$$\sum_{j=1}^{s}\left(x_j\right)^{\nu} = m^{\nu}, \quad \nu = \overline{1,\, p}\,.$$

Некоторые признаки обобщенного «золотого» сечения. Являясь корнем уравнения (1), число ϕ автоматически приводит к равенству

$$\phi^{p+1} - m\phi^{p} - q = 0\,, \tag{3}$$

откуда следует выражение, обобщающее известное свойство числа Фидия $\Phi - \Phi^{-1} = \Phi^{-1}\left(1+\Phi^{-1}\right) = \mathbf{1}$ и фиксирующее единицу (модель целого):

$$\frac{\phi - q\phi^{-p}}{m} = \phi^{-1}\left(m + q\phi^{-p}\right) = \frac{m}{\phi} + \frac{q}{\phi^{p+1}} = \mathbf{1}, \tag{4}$$

а также следующие соотношения ($s = p+1,\ \alpha = p/s$; n – любое комплексное число)

$$\phi = \sqrt[s]{q + m\phi} \approx \sqrt[s]{q + m\cdot\left[q + m\cdot\left[q + m\cdot\left[q + \ldots m\cdot(q+\phi_0)^{\alpha}\right]^{\alpha}\right]^{\alpha}\right]^{\alpha}}\,, \tag{5}$$

$$\phi^{n} = m\phi^{n-1} + q\phi^{n-p-1}\,. \tag{6}$$

С помощью выражения (5) можно приближенно вычислить величину ϕ с точностью до желаемой значащей цифры, выбрав некоторую начальную точку, например $\phi_0 = m$, и выполняя итерации, пока не получим два одинаковых последовательных значения ϕ заданной степени округления.

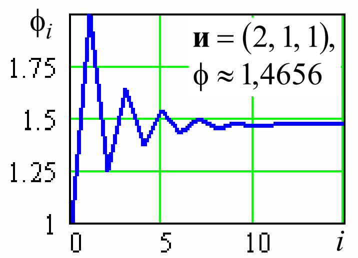


Рис. 2. Рекурсивный расчет параметра ϕ

Возможно и другое быстро сходящееся рекурсивное вычисление по правилу: «умножь p-ю степень обратной величины на q и прибавь m»: $\phi_{i+1} = m + q/\phi_i^{p}$ (рис. 2). Начав с единицы $\phi_0 = 1$, мы получим последовательность дробей, сходящихся к обобщенному «золотому» сечению.

Как и для обычной «золотой» пропорции [4, с. 311], погрешность, с которой эти дроби стремятся к ϕ, убывает в геометрической прогрессии, образуя асимптотически самоподобную последовательность погрешностей с коэффициентом подобия, равным ϕ^{p}.

Применяя поочередно уравнения (4)–(5), можно сформировать модель разложения «единицы» по степеням j обобщенной «золотой» пропорции в виде сходящегося к нулю ряда с единичной суммой

$$m\cdot\sum_{j=0}^{\infty} q^{j}\phi^{-js-1} = \mathbf{1}. \tag{7}$$

Подобно всякому числу, параметр ϕ удовлетворяет равенству, соответствующему сумме геометрической прогрессии для любого натурального n,

$$\sum_{j=0}^{n}\phi^{j} = \frac{\phi^{n+1}-1}{\phi-1}\,.$$

В общем случае ϕ – иррациональное число, определяемое поисковыми методами нахождения корней. Начальные значения корней могут выбираться согласно рис. 1.

Выполнение равенства $q = d(m+d)^p$ для свободного члена уравнения (1) приводит к целочисленному решению: $\phi = m + d$, где $d = q\phi^{-p} = 1, 2, 3, \ldots$ (табл. 1).

Таблица 1

Примеры целочисленных решений уравнения (1)

$q = d(m+d)^p$, $d = 1, 2, 3, \ldots$

p	m	$d=1$	$d=2$	$d=3$	$d=4$	$d=5$
		q				
1	1	2	6	12	20	30
	2	3	8	15	24	35
	3	4	10	18	28	40
2	1	4	18	48	100	180
	2	9	32	75	144	245
	3	16	50	108	196	320
3	1	8	54	192	500	1080
	2	27	128	375	864	1715
	3	64	250	648	1372	2560

Геометрическая формулировка задачи. Исследуем свойства сечений на примере геометрического сопоставления частей линейного отрезка (рис. 3).

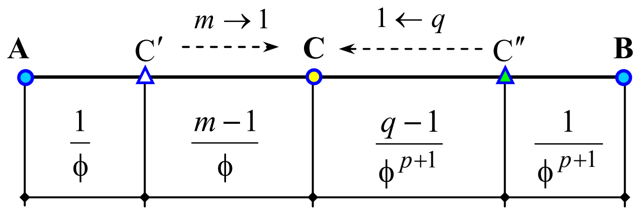


Рис. 3. Деление отрезка AB обобщенным «золотым» сечением: $p \ge 1, m \ge 1, q \ge 1$,

$\mathrm{AC} = m \cdot \mathrm{AC}'$, $\quad \mathrm{CB} = q \cdot \mathrm{C''B}$, $\quad \mathrm{C''B} = (\mathrm{AC}')^{p+1}$

Отрезок $\mathrm{AB} = 1$ единичной длины делится точкой C на две в общем случае неравные части AC и CB (с дополнительными точками $\mathrm{C}', \mathrm{C}''$) так, чтобы выполнялись следующие пропорции:

$$\phi^p = \left(\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}/m}\right)^p = \frac{\mathrm{AC}/m}{\mathrm{CB}/q} = \frac{\mathrm{AC}'}{\mathrm{C''B}} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}/m} = \sqrt[p]{\frac{\mathrm{AC}/m}{\mathrm{CB}/q}}$$

или $$\phi = \frac{\mathrm{AC}+\mathrm{CB}}{\mathrm{AC}/m} = m + \frac{1}{\dfrac{\mathrm{AC}/m}{\mathrm{CB}/q}} \cdot q = m + \frac{q}{\phi^p} \quad \Rightarrow \quad \phi^{p+1} - m\phi^p - q = 0 .$$

Переходя от геометрического толкования к некоторому абстрактному объекту, можно сформулировать свойство пропорции:

возведенное в степень $\boldsymbol{p}$ отношение целого к уменьшенной в $\boldsymbol{m}$ раз бóльшей части равно отношению последней к уменьшенной в $\boldsymbol{q}$ раз меньшей части целого.

Таким образом, параметру q соответствует пропорциональное уменьшение меньшей ($\mathrm{CB} \to \mathrm{C''B} = \mathrm{CB}/q$) или адекватное увеличение бóльшей части целого, а параметру m – уменьшение его бóльшей части ($\mathrm{AC} \to \mathrm{AC}' = \mathrm{AC}/m$) или увеличение меньшей (рис. 4).

При $m = q = 1$ точки C′ и C″ вырождаются в точку C, а $\mathrm{CB} = (\mathrm{AC})^{p+1} = 1 - \mathrm{AC}$.

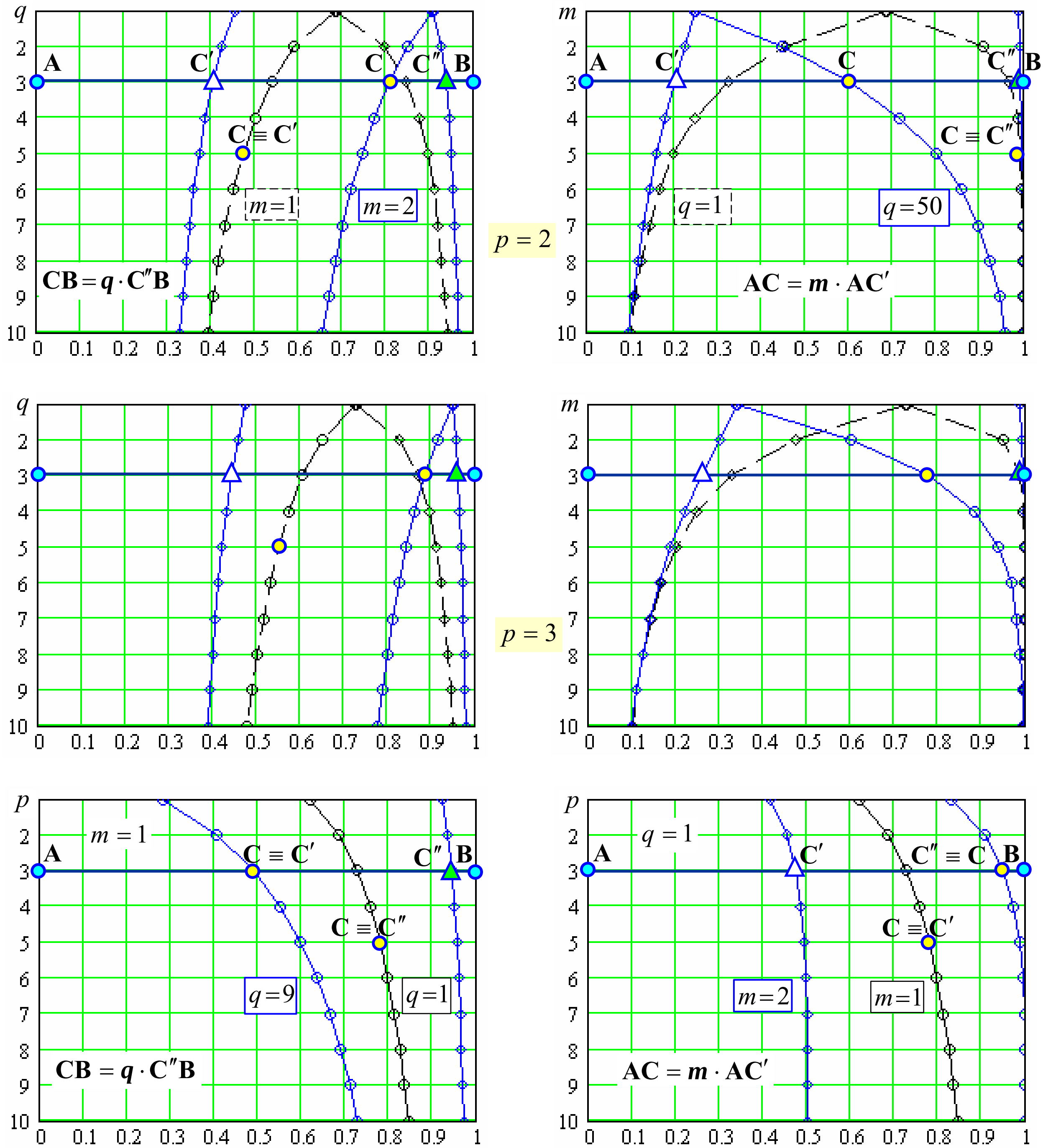


Рис. 4. Иллюстрация обобщенных «золотых» сечений
с параметрами $p, m, q \geq 1$; $\mathrm{C''B} = (\mathrm{AC'})^{p+1}$

«Золотое» сечение играет исключительную роль в проблемах синхронизации [4, с. 434]. Визуальное представление о ней дает рис. 5, на котором в качестве углового приращения для расположения объектов (семян для подсолнечника) используется шаг

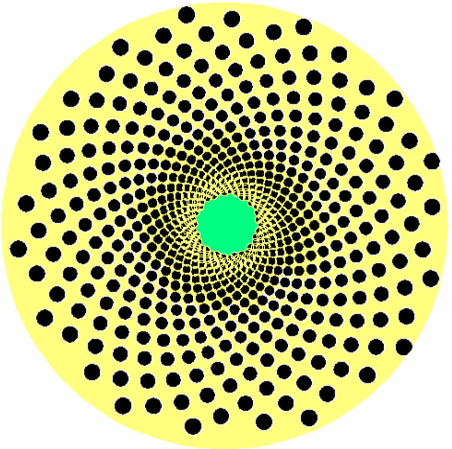
$$(r_{n+1}, \psi_{n+1}) = \left(ar_n, \psi_n + r_n e^{in \cdot 2\pi \cdot \phi}\right),$$

с двумя золотыми углами $2\pi\Phi$ и $2\pi\phi$, где $\phi(2,1,1) = (c + 4/c + 2)/6$, $c = \sqrt[3]{116 + 12\sqrt{93}}$, $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

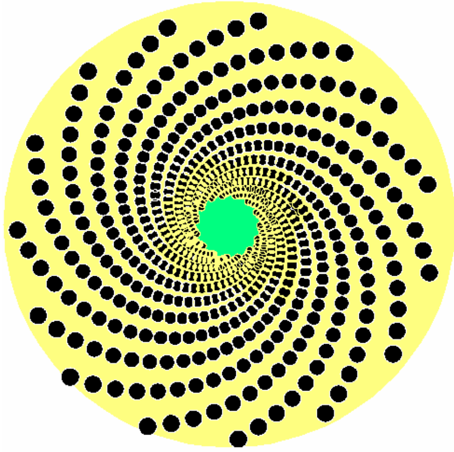
Сопоставление рисунков показывает, что достаточно реалистичная картина расположения семян в виде совокупности гладких линий (21 по часовой и 34 против часовой стрелки) при изменении параметров $\Phi \to \phi$ сменяется на 15 похожих, но уже отдельных и более отчетливо различимых спиралей (нарушение психовизуальной синхронизации).

Хотя на самом деле на обоих рисунках математически представлена всего лишь одна спираль, закрученая против часовой стрелки.

$\mathbf{и} = (1, 1, 1)$, $\phi \approx 1{,}61803$



$\mathbf{и} = (2, 1, 1)$, $\phi \approx 1{,}46557$



$$N := 2161 \qquad J := 50 \qquad j := 0..J \qquad \beta_j := 2 \cdot \pi \cdot j \cdot J^{-1} \qquad \Phi := \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

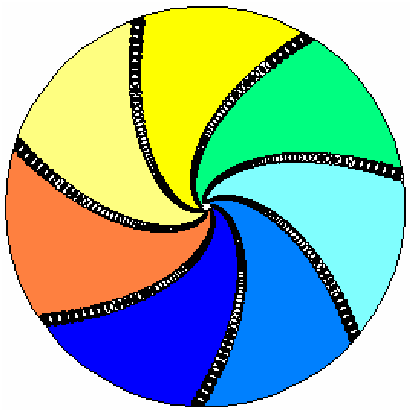
$$n := 0..N \qquad a := 1.0016 \qquad r_0 := 1 \qquad r_{n+1} := a \cdot r_n$$

$$\alpha := 2\pi \cdot \Phi \qquad \Psi_0 := 0 \qquad \Psi_{n+1} := \Psi_n + r_n \cdot (\cos(n \cdot \alpha) + i \cdot \sin(n \cdot \alpha))$$

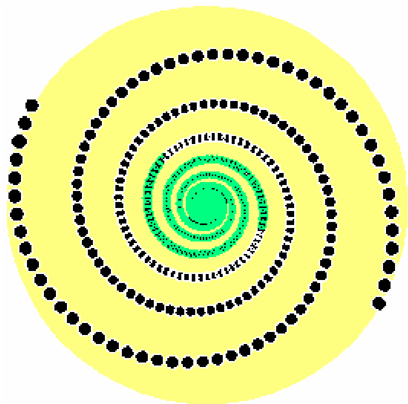
$$C_{n+1,j} := \frac{r_n}{80} \cdot \left[(\cos(\beta_j) - \Psi_n) + i \cdot (\sin(\beta_j) - \Psi_n) \right]$$

Рис. 5. Визуальная интерпретация обычного и обобщенного «золотых» углов на примере компьютерного изображения «подсолнуха» программными средствами MathCad и Paint

$\mathbf{и} = (5, 1, 1)$, $\phi \approx 1{,}28520$



$\mathbf{и} = (4, 2, 19)$, $\phi \approx 2{,}49238$



Числа Фибоначчи и Люка. Рассматривая равенство $\phi^n = m\phi^{n-1} + q\phi^{n-p-1}$, справедливое для любого n, и осуществляя формальный переход от величины ϕ^n к целочисленным числовым инвариантам, мы приходим к обобщенным числам Фибоначчи $F_n = F(\mathbf{и}, n)$, $F' = F'_n(\mathbf{и}, n)$ и Люка $L_n = L(\mathbf{и}, n)$.

Последние являются расширением нового класса рекуррентных числовых последовательностей, рассмотренных в работе [5] и связанных с суммой корней x_i^n уравнения (1) для случая $m = q = 1$.

Для последовательности натуральных чисел $n \geq p+1$ ряды $Z = \{F, F', L\}$ генерируются согласно рекуррентным соотношениям:

$$Z_n = mZ_{n-1} + qZ_{n-p-1} \tag{8}$$

с начальными условиями: $(F_0 = 0, F_\nu = 1)$, $(F'_{\nu-1} = 0, F'_p = 1)$, $(L_0 = p+1, L_\nu = m^\nu)$, $\nu = \overline{1, p}$.

Такой выбор обусловлен сохранением традиционных условий для первых чисел Фибоначчи и образованием исходно-образующих значений ряда Люка, исходя из свойств корней уравнения (1): $\sum_{j=1}^{p+1} (x_j)^\nu = m^\nu$, $\nu = \overline{1, p}$, а при $\nu = 0$ указанная сумма равна $p+1$.

Выполняя последовательные операции согласно уравнению (1) последовательность ϕ^n приводится к сумме первых p степеней ϕ: $\phi^n = a_{0n} + a_{1n}\phi + ... + a_{pn}\phi^p$ с весовыми коэффициентами $a_{\nu n}$, для которых выполняются соотношения

$$a_{\nu n} = ma_{\nu,\, n-1} + qa_{\nu,\, n-p-1}, \quad \nu = \overline{0, p} \ ;$$

$$a_{\nu'+1,\, n+1} = a_{\nu' n}, \quad \nu' = \overline{0, p-2}.$$

Сравнивая коэффициенты $a_{\nu n}$ с числами Фибоначчи (табл. 2), легко обнаружить, что

$$\phi^n = \phi^p F'_n + q\sum_{j=1}^{p} \phi^{j-1} F'_{n-j} . \tag{9}$$

Этот результат можно доказать методом математической индукции по n.

Так, для первых $n = 2p$ равенство (9) выполняется простой проверкой (например, см. табл. 2). Предположим, что оно выполняется при некотором произвольном $n \geq 2p$, то есть выражение (9) верно для n и $n-p$. Тогда с учетом (8) для $n+1$ имеем ($j = \overline{1, p}$)

$$\phi^{n+1} = m\phi^n + q\phi^{n-p} = m\left(\phi^p F'_n + q\sum_j \phi^{j-1} F'_{n-j}\right) + q\left(\phi^p F'_{n-p} + q\sum_j \phi^{j-1} F'_{n-p-j}\right) =$$

$$= \phi^p \left(mF'_n + qF'_{n-p}\right) + q\sum_j \phi^{j-1}\left(mF'_{n-j} + qF'_{n-p-j}\right) = \phi^p F'_{n+1} + q\sum_j \phi^{j-1} F'_{n+1-j} \ ,$$

что и требовалось доказать.

Следует сказать, что формула (9) верна для любого (положительного целого) значения коэффициента m, хотя и не содержит его в явном виде, но косвенно проявляется через значения величин ϕ и F', которые взаимосвязанны с m выражениями (3), (8).

При $m = 1$ между рядами Фибоначчи F и F' соблюдается соотвествие $F'_n = F_{n-p+1}$, а для $p = 1$ при любых значениях m, q эти ряды тождественны (табл. 3).

Поэтому справедливо тождество, связывающее ϕ с числами Фибоначчи F:

$$\phi^{n+p-1} = \phi^p F_n + q\sum_{j=1}^{p} \phi^{j-1} F_{n-j} , \quad m \vee p = 1, \tag{10}$$

где $\vee$ – знак дизъюнкции (логический эквивалент союза «или»).

Таблица 2

Сопоставление чисел Фибоначчи со степенями «золотых» сечений

$\phi^n = 3\phi^{n-1} + 2\phi^{n-3}$, $p = 2$					
n	F_n	F'_n	a_{0n} 1	a_{1n} ϕ	a_{2n} ϕ^2
0	0	0			
1	1	0			
2	1	1			
3	3	3	$q=2$	0	$m=3$
4	11	9	6	2	9
5	35	29	18	6	29
6	111	**93**	58	18	**93**
7	355	297	**186**	58	297
8	1 135	949	594	**186**	949

$\phi^n = \phi^{n-1} + 4\phi^{n-3}$, $p = 2$					
n	F_n	F'_n	a_{0n} 1	a_{1n} ϕ	a_{2n} ϕ^2
0	0	0			
1	1	0			
2	1	1			
3	1	1	$q=4$	0	$m=1$
4	5	1	4	4	1
5	**9**	5	4	4	5
6	13	**9**	20	4	**9**
7	33	13	**36**	20	13
8	69	33	52	**36**	33

$\phi^n = 2\phi^{n-1} + 2\phi^{n-2}$, $p = 1$				
n	F_n	F'_n	a_{0n} 1	a_{1n} ϕ
0	0	0		
1	1	1		
2	2	2	$q=2$	$m=2$
3	6	6	4	6
4	16	16	12	16
5	**44**	**44**	32	**44**
6	120	120	88	120
7	328	328	240	328
8	896	896	656	896
9	2448	2448	1792	2448
10	6688	6688	4896	6688

$\phi^n = 2\phi^{n-1} + 3\phi^{n-4}$, $p = 3$					
F_n	F'_n	a_{0n} 1	a_{1n} ϕ	a_{2n} ϕ^2	a_{3n} ϕ^3
0	0				
1	0				
1	0				
1	1				
2	2	$q=3$	0	0	$m=2$
7	**4**	6	3	0	**4**
17	8	**12**	6	3	8
37	19	24	**12**	6	19
80	44	57	24	**12**	44
181	100	132	57	24	100
413	224	300	132	57	224

Таблица 3

Первые члены рекуррентных последовательностей Фибоначчи

n	0	1	2	...	p	$p+1$	$p+2$	$p+3$	...	$2p$	$2p+1$	$2p+2$
F_n	0	1	1	...	1	1	$1+q$	$1+2q$	...	$1+(p-1)q$	$1+pq$	$1+(p+1)q$
F'_n	0	0	0	0	1	1	1	1	...	1	$1+q$	$1+2q$

Следует отметить, что для p-золотых пропорций (частный случай $m = q = 1$) формула, подобная (10), впервые получена А. Стаховым со ссылкой на доказательство в работе [6], которая не относится к легкодоступной. Однако, как мы видим, обоснование соотношения (9) – довольно незамысловатое даже для обобщенного случая ($p, m, q \geq 1$).

Из (9) следует, что число обощенного «золотого» сечения $\phi = \phi(p,m,q)$ является действительным решением уравнения $x^n - F'_n x^p - q \cdot \sum_{j=1}^{p} F'_{n-j} x^{j-1} = 0$ при всех значениях n.

Например, для $p = 2, m = 1, q = 4$ значение $\phi = 2$ – корень уравнений

$$\phi^4 - \phi^2 - 4\phi - 4 = 0, \qquad \phi^6 - 9\phi^2 - 4\phi - 20 = 0, \qquad \phi^8 - 33\phi^2 - 36\phi - 52 = 0,$$

для $p = 3, m = 2, q = 27$ значение $\phi = 3$ – корень алгебраических уравнений

$$\phi^6 - 8\phi^3 - 27\phi^2 - 54\phi - 108 = 0, \qquad \phi^{10} - 992\phi^3 - 1161\phi^2 - 3780\phi - 10476 = 0 \text{ и т.д.}$$

В работе [1] доказано довольно эффективное обобщение формул Бине для чисел Фибоначчи и Люка на случай $\mathbf{и} = (1, m, q)$:

$$\begin{cases} L_n = \phi^n + (-q)^n \phi^{-n} = \phi^n + (m - \phi)^n, \\ F_n = \dfrac{\phi^n - (-q)^n \phi^{-n}}{\sqrt{m^2 + 4q}} = \dfrac{\phi^n - (m - \phi)^n}{\sqrt{m^2 + 4q}}. \end{cases} \tag{11}$$

Рассмотрение характера зависимостей $L_n - \phi^n$ (рис. 6) наводит на мысль, что в общем случае (для различных величин p) не так просто найти простые соотношения типа (11), привязанные к одному корню ϕ.

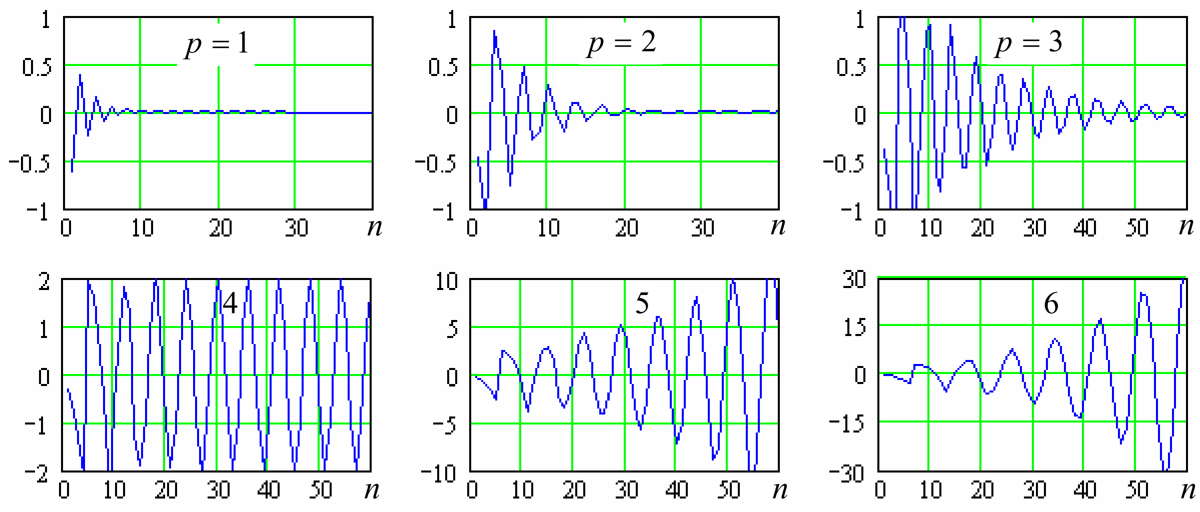


Рис. 6. Зависимости $L_n - \phi^n$ для чисел Люка при $m = q = 1$

По-видимому, это связано с отсутствием аналитического решения уравнения (1) при больших p. Известно, что любое уравнение степени ≤ 4 разрешимо в радикалах, то есть его корни могут быть выражены при помощи арифметических операций (сложения, деления, вычитания и умножения) и извлечения корня с целым показателем степени.

При $p + 1 \geq 5$ алгебраические уравнения, в основном, в радикалах неразрешимы (теорема Руффини–Абеля).

Вместе с тем просматривается любопытное наблюдение, а именно наличие связи между характером чисел Люка и колебательными процессами по гармоническому закону, которые, в частности, исследуются в теории систем автоматического регулирования:

$1 \leq p \leq 3$ – затухающие колебания (система асимптотически устойчива), причем чем больше p, тем больше дискретное время n окончания переходного процесса;

$p = 4$ – режим устойчивых равно-амплитудных автоколебаний, которым соответствуют две пары комплексных и один действительный корень ϕ уравнения (1);

$p \geq 5$ – расходящийся (асимптотически неустойчивый) колебательный процесс .

Таким образом, можно высказать гипотезу, что уравнение $x^5 - x^4 - 1 = 0$ и соответствующее ему «золотое» p-сечение

$$\phi = \phi(4,1,1) = \frac{c}{6} + \frac{2}{c} \approx 1{,}32472\,, \qquad c = \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{69}}$$

являются некими глобальными характеристиками границы внутренней устойчивости абстрактного объекта со свойственными числами Люка, описывающими процесс на рис. 6 ($p = 4$) и функционально связанными с суммами степеней корней уравнения (1),

$$L_n = L_n(4,1,1) = \mathrm{round}\left(\phi^n\right) - 2\sin\left(\pi \frac{2n+9}{6}\right), \quad n \ge 10\,,$$

где $\mathrm{round}(\xi)$ – функция округления ξ до ближайшего целого.

На рис. 4 это соответствует делению целого в соотношении $\dfrac{1-\phi^{-1}}{\phi^{-1}} \approx \dfrac{0{,}245}{0{,}755} \approx \dfrac{1/4}{3/4} = \dfrac{1}{3}$.

То есть для сохранения структурной устойчивости объекта меньший образующий фактор должен составлять в целом не менее 24,5 %.

Если же задаться точным соотношением одной и трети четвертей или $25 \div 75$ %, то соответствующее уравнение (не в целочисленных степенях) имеет вид $x^{4,82} - x^{3,82} - 1 = 0$.

Отметим, что формально рассматриваемое вычитание $L_n - \phi^n$ (см. рис. 6) тождественно разности между суммой равных степеней всех $p+1$ корней x_i уравнения (1) и аналогичной степенью наибольшего действительного корня $x_{p+1} = \phi$

$$L_n - \phi^n = \sum_{j=1}^{p+1} x_j^n - x_{p+1}^n\,.$$

Большие значения *n* и предельный случай $n \to \infty$.

Рассмотрим рекуррентное уравнение (8) и положим $\psi_n = \mathrm{Z}_{n+1}/\mathrm{Z}_n$.

Легко убедиться, что по мере увеличения n отношение соседних членов последовательностей $\mathrm{Z}_n = \{F_n, F'_n, L_n\}$ конвенгирует к числу обобщенного «золотого» сечения $\phi = \phi(\mathbf{и})$.

Покажем это математически. Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Z}_{n+1}}{\mathrm{Z}_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Z}_n}{\mathrm{Z}_{n-1}} = \ldots \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Z}_{n-p+1}}{\mathrm{Z}_{n-p}} = R\,.$$

Тогда согласно основным операциям с пределами [2, с. 103]

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\mathrm{Z}_n}{\mathrm{Z}_{n-1}} \frac{\mathrm{Z}_{n-1}}{\mathrm{Z}_{n-2}} \ldots \frac{\mathrm{Z}_{n-p+1}}{\mathrm{Z}_{n-p}}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{Z}_n}{\mathrm{Z}_{n-p}} = R^p\,.$$

На основании уравнения (8) и следующего из (6) выражения $m = \phi - q\phi^{-p}$ имеем

$$\Psi_n = \frac{m\mathrm{Z}_n + q\mathrm{Z}_{n-p}}{\mathrm{Z}_n} = m + q\frac{\mathrm{Z}_{n-p}}{\mathrm{Z}_n} = \phi + q\left(\frac{\mathrm{Z}_{n-p}}{\mathrm{Z}_n} - \phi^{-p}\right).$$

Переходя к пределам, получаем $R - \phi = q\left(R^{-p} - \phi^{-p}\right)$, откуда следует действительное решение $R = \phi$.

Следовательно, для любого конечного целого числа k справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi_{n+k}}{\Psi_n}=\phi^k. \quad (11)$$

Напомним, что $\phi=\phi(\mathbf{и})$ – в общем случае иррациональное число, отдельное для каждого набора переменных $\mathbf{и}=(p, m, q)$.

Исходя из приведенного доказательства, выбор начальных условий для последовательностей Фибоначчи и Люка не влияет на конечный результат в предельном случае (11), то есть все числовые последовательности, сгенерированные по рекуррентной формуле (8) приведут к числу ϕ, как действительному корню алгебраического уравнения (1).

Иначе говоря, все последовательные наборы чисел ψ_n инвариантны ϕ.

Поэтому, для получения рядов с заданными исходными параметрами, в качестве начальных условий можно использовать любые $p+1$ соседних членов последовательностей.

Можно также показать, что для больших значений n выполняются соотношения:

$$\frac{F'_{n+k}-\phi^{n+k}}{F'_n-\phi^n}\to\phi^k, \qquad \frac{F_{n+k}-\phi^{n+k}}{F_n-\phi^n}\to\phi^k.$$

Производящие функции (ПФ). Рассмотрим ПФ в виде степенного ряда $L(z)=\sum_n L_n z^n$, где z – формальная переменная (символ) ряда, L_n – числа Люка как коэффициенты исследуемого ряда. Заметим, что переменная $L(z)$ обозначает не сумму ряда для данного значения z, а сам перечисляемый ряд, являясь сокращенной записью формального выражения в правой части.

Выделим в ПФ первые $s=p+1$ слагаемые, а в остальные подставим выражение $L_n=mL_{n-1}+qL_{n-s}$

$$L(z)=sz^0+mz^1+m^2z^2+\ldots+m^pz^p+\sum_{n=s}^{\infty}(mL_{n-1}+qL_{n-s})z^n=$$

$$=s+mz+m^2z^2+\ldots+m^pz^p+mz\sum_{n=s}^{\infty}L_{n-1}z^{n-1}+qz^s\sum_{n=s}^{\infty}L_{n-s}z^{n-s}=$$

$$=s-pmz+mz\sum_{n=0}^{\infty}L_nz^n+qz^s\sum_{n=0}^{\infty}L_nz^n=s-pmz+\left(mz+qz^s\right)L(z),$$

где появление слагаемого $(-pmz)$ обусловлено тем, что $mz\cdot L_0=mz\cdot(p+1)$.

Получили линейное уравнение относительно производящей функции $L(z)$, которое дает решение

$$L(z)=\frac{s-(s-1)mz}{1-mz-qz^s}=\frac{s(1-mz)+mz}{1-mz-qz^s}. \quad (12)$$

Таким образом, вся информация о числах Люка содержится в его производящей функции $L(z)$.

В этом просто убедиться, разделив многочлены, стоящие в числителе и знаменателе.

Пусть $\left(1-mz-qz^s\right)\left(L_0+L_1z+L_2z^2+\ldots\right)=s-(s-1)z+0\cdot z^2+\ldots$.

Тогда раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем

$1 \cdot L_0 = s \qquad \Rightarrow \qquad L_0 = s$;

$1 \cdot L_1 - mL_0 = -(s-1)m \qquad \Rightarrow \qquad L_1 = m$;

$1 \cdot L_2 - mL_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L_2 = m^2$;

………………………………………………

$1 \cdot L_s - mL_{s-1} - qL_0 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L_s = m^s + sq$,

$1 \cdot L_{s+1} - mL_s - qL_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L_{s+1} = m^{s+1} + (s+1)qm$ и т.д.

Поскольку многочлен, стоящий в знаменателе ПФ (12) равен

$$1 - mz - qz^s = z^s\left(z^{-s} - mz^{-s-1} - q\right) = z^s\left(x^s - mx^{s-1} - q\right),$$

где $x = 1/z$, то все его корни равны обратным значениям корней x_j, $j = \overline{1, s}$ исходного уравнения (1), а он сам раскладывается на множители $\prod_j \left(1 - x_j z\right)$.

С учетом свойств корней по теореме Виета (2), формулы для суммы $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии (со знаменателями *r*, равными $x_j z$, которые в виду формальности параметра z могут быть приняты < 1) [2, с. 729], а также разложения на простейшие дроби, преобразуем ПФ (12):

$$L(z) = \frac{s-(s-1)mz}{1-mz-qz^s} = \frac{s-(s-1)mz}{\prod_j \left(1-x_j z\right)} = \sum_j \frac{1}{\left(1-x_j z\right)} = \sum_j \sum_n \left(x_j z\right)^n = \sum_n \left(\sum_j x_j^n\right) z^n .$$

Сравнивая итоговое выражение с исходной формой ПФ $L(z) = \sum_n L_n z^n$, находим решение рекуррентного уравнения (8) для чисел Люка в явном виде

$$L_n = \sum_j x_j^n , \tag{13}$$

и становится понятным выбор начальных значений для этой числовой последовательности.

В общем случае уравнения (1) имеет пары сопряженных комплексных корней x_j, однако возведение их в степень приводит к равным мнимым частям с противоположными знаками (из-за свойства мнимой единицы $i^{2k} = -1$), а иррациональность убирается в результате суммирования, поэтому по формуле (13) мы в итоге получаем целые числа Люка.

Если числа Люка, включая начальные условия, у нас четко привязаны к суммам степеней корней многочлена, то выбор первых p обобщенных чисел Фибоначчи с разными коэффициентами *m*, *q* может быть произвольным, порождая различные числовые ряды.

В частности, в дополнение к уже рассмотренным последовательностям F_n, F_n' можно рассматривать и такие начальные условия: $\overleftarrow{F}_v = m^v$, $v = \overline{0, p}$, которые отличаются от аналогичных условий для чисел Люка только нулевым членом $\overleftarrow{F}_0 = 1$.

То есть при формировании ряда единица сразу «включается» в рекуррентный процесс, и уже следующий член последовательности равен *m*, затем m^2 и т.д., пока не начинает задействоваться и параметр q.

Следует подчеркнуть, что на самом деле последовательность $\overleftarrow{F}_n$ повторяет ряд F'_n, только на p шагов раньше, то есть $\overleftarrow{F}_n = F'_{n+p}$. Однако с ней легче оперировать, поскольку производящая функция для ряда $\overleftarrow{F}_n$ определяется из уравнения

$$\overleftarrow{F}(z) = 1 + mz + m^2 z^2 + \ldots + m^{s-1} z^{s-1} + \sum_{n=s}^{\infty} \left(m\overleftarrow{F}_{n-1} + q\overleftarrow{F}_{n-s} \right) z^n = 1 + \left(mz + qz^s \right) \overleftarrow{F}(z)$$

и представляется в компактном виде

$$\overleftarrow{F}(z) = \frac{1}{1 - mz - qz^s}. \qquad (14)$$

Разложив ПФ (14) на простейшие дроби и выполнив преобразования, подобные приведенным выше, определяем числа Фибоначчи в явном виде через степени корней x_j уравнения (1)

$$\overleftarrow{F}_{n-p} = F'_n = \sum_j \frac{x_j^n}{\prod_{i,\, i \neq j} \left(x_j - x_i \right)}, \quad i, j = \overline{1,\ p+1}. \qquad (15)$$

Соотношение (15) является дальнейшим расширением обобщенной формулы Бине (11) для ряда F_n, сдвинутого на единицу влево: для квадратного уравнения величины равны

$$\phi = x_2, \quad m - \phi = x_1, \quad \sqrt{m^2 + 4q} = x_1 - x_2.$$

Заметим, что независимо от значений параметров $p, q,$ при $m = 1$ ряды F_n и $\overleftarrow{F}_n$ совпадают: $F_{n+1} = \widetilde{F}_n$ для всех $n \geq 0$.

Один частный случай.

Представляет интерес частный случай $m < 0$.

Кубическое уравнение $x^3 + 2x^2 - 1 = 0$, в котором $p = 2,\ m = -2,\ q = 1$ имеет три корня: $x_1 = -\Phi, x_2 = -1,\ x_3 = \Phi - 1$, где $\Phi = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2 \approx 1{,}618$.

Последовательность чисел Фибоначчи и Люка при этом описываются следующими рекуррентными соотношениями

$$\begin{cases} F_n = -2F_{n-1} + F_{n-3}, \\ L_n = -2F_{n-1} + L_{n-3}, \end{cases}$$

с начальными условиями $F_0 = 0, F_1 = F_2 = 1$ и $L_0 = p + 1 = 3$, $L_1 = (-m)^1 = -2$, $L_1 = (-m)^2 = 4$, а также уравнениями в явном виде

$$\begin{cases} F_n = (\Phi - 1)^n + (-1)^n \left(\Phi^n - 2 \right), \\ L_n = (\Phi - 1)^n + (-1)^n \left(\Phi^n + 1 \right) = F_n + 3 \cdot (-1)^n. \end{cases}$$

Это знакопеременные ряды, в основе которых лежит число классического «золотого» сечения Φ, взятое со знаком минус:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+k}}{F_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{L_{n+k}}{L_n} = (-\Phi)^k.$$

Примечательно, что все числа Фибоначчи и Люка с одинаковыми порядковыми номерами отличаются по абсолютной величине на 3, что соответствует порядку уравнения.

Переход от квадратного к кубическому уравнению в интерпретации их корней приводит фактически к сдвигу влево числа Ф на единицу с формированием особых симметричный свойств (рис. 7).

Надо полагать, что данное кубическое уравнение имеет не менее фундаментальный смысл, чем квадратное уравнение $x^2 - x - 1 = 0$ для числа Φ, и оно обязательно должно где-то проявить свои особые свойства, возможно, в химической кинетике, теории автоматического регулирования и т.д.

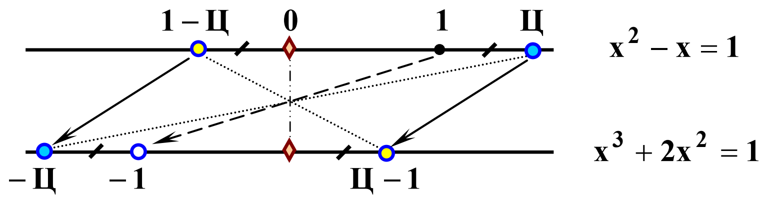


Рис. 7. Сдвиг влево числа Фидия с сохранением симметрии относительно начала координат и образованием новой точки (–1) приложения «моментов сил»

Выводы

1. Рассмотрено дальнейшее обобщение «золотых» пропорций, объединяющее свойства *p*-сечений (А. Стахов и др.) и гармоничных пропорций, и описываемое действительным алгебраическим уравнением $x^p(x-m)-q=0$.

2. Установлены общие признаки обобщенных «золотых» сечений.

3. Представлена геометрическая интерпретация обобщенных «золотых» сечений.

4. Даны правила построения обобщенных числовых последовательностей Фибоначчи и Люка и показана их связь с соответствующими характерными числами «золотых» сечений.

5. С использованием методов математической индукции и производящих функций получены соотношения для указанных рекуррентных последовательностей в явном виде.

Литература

1. *Василенко С.Л.* Аналитика «золотых» пропорций // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 14795 от 12.05.2008. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321085.htm.

2. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1974. – 832 с.

3. *Выгодский М.Я.* Справочник по элементарной математике. – СПб.: Союз, 1997. – 336 с.

4. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного ряда: Пер.с англ. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 528 с.

5. *Stakhov A., Rozin B.* Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas *p*-numbers // Chaos, Solitons & Fractals, 2005. – 27 (5). – P. 1162–1177.

6. *Stakhov A.*, *Rozin B.* The Golden Shofar. Chaos, Solitons & Fractals, 2005. – 26(3). – P. 677–684.

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$. - Алгебраическое уравнение n-й степени общего вида.

Пусть коэффициенты a_k - действительные либо комплексные числа.

1. Для краткости, обозначим левую часть уравнения, которая является полиномом степени n, следующим образом:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad (a_n \neq 0).$$

Число $x = \xi$ называется корнем уравнения, а так же корнем полинома $P_n(x)$, если $P_n \xi = 0$. Число $x = \xi$ называется корнем кратности m, если $P_n(x)=(x=\xi)^m Q_{n-m}(x)$, где m - натуральное число, $1 \le m \le m$ и $Q_{n-m}(x)$ - полином степени n - m, такой, что $Q_{n-m}(\xi) \neq 0$.

2. **Основная теорема алгебры**. Алгебраическое уравнение n-ной степени имеет в точности n корней (действительных или комплексных), причем корни кратности m встречаются ровно m раз.

3. Если алгебраическое уравнение имеет корни $x_1, x_2, ..., x_s$, кратностей $k_1, k_2, ..., k_s$ ($k_1 + k_2 + ... + k_s = n$), то левая часть уравнения может быть представлена в виде:

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_s)^{k_s}.$$

4. Алгебраическое уравнение нечетной степени с действительными коэффициентами всегда имеет хотя бы один действительный корень.

5. Предположим, алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $\xi = \alpha + i\beta$. Тогда это уравнение так же должно иметь корень $\eta = \alpha - i\beta$, причем кратности обоих корней одинаковы.

Алгебраическое уравнение степени n с целыми коэффициентами a_k не может иметь других рациональных корней, чем несокращаемые дроби p/q, причем p - делитель a_0, и q - делитель a_n. Если $a_n = 1$, тогда все рациональные корни алгебраического уравнения - целые делители свободного a_0 и могут быть легко найдены.

7. Любое уравнение степени ≤ 4 разрешисо в радикалах, что значит, что его корни могут быть выражены при помощи операций сложения, деления, вычитания и умножения, а так же извлечения корня. При n ≥ 4 алгебраические уравнения, в основном, в радикалах неразрешимы. Это утверждение носит название теоремы Руффини - Абеля.

8. **Теорема Виета**. Следующие соотношения между корнями алгебраического уравнения (принимая во внимание их кратность) и их коэффициенты имеют место быть:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = -a_{n-1}/a_n,$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_{n-1} x_n = \sum_{1 \le i < j}^{n} x_i x_j = a_{n-2}/a_n,$$

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \cdots + x_{n-2} x_{n-1} x_n = \sum_{1 \le i < j < k}^{n} x_i x_j x_k = -a_{n-3}/a_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n a_0 / a_n.$$