С.Л. Василенко

«ЗОЛОТЫЕ» СЕЧЕНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПАРЕТО

Международная online-конференция
"Золотое сечение в современной науке",
посвященная 70-летию профессора,
д.т.н. Алексея Петровича СТАХОВА

Общие сведения о правиле 80/20. Универсальный принцип 80/20 был выявлен и сформулирован более ста лет назад итальянским экономистом и социологом В. Парето (1848–1923) при рассмотрении распределения доходов в Англии XIX века.

Во время своих исследований он основывался на том, что главенствующим при разделении прибыли является представление о неравномерном ранжировании природных личностных способностей, а не социальные условия. Его открытие называют по-разному: в том числе законом Парето, правилом 80/20, принципом наименьшего усилия или дисбаланса, соотношением затрат и получаемого эффекта. Сам Парето не делал упрощения типа 80/20, но оно обосновано вытекает из его метода и является доступной для понимания трактовкой, некоторой метафорой, наглядной формулировкой или ярким слоганом.

Главным здесь служат не столько цифры процентного соотношения, сколько сам факт, что распределение между причиной и результатом (вкладываемыми и получаемыми средствами) предсказуемо несогласованно. Только небольшая доля причин или потребляемых ресурсов отвечает за большую часть результатов.

Поэтому выражение "80/20" или в общем случае "N / n" (n<50<N, n+N =100 %) носит универсальный характер и хорошо описывает данную диспропорцию:
– n % вложенных средств ответственны за N % отдачи;
– N % следствий проистекают из n % причин;
– n % усилий дают N % результатов, дальнейшие потуги не всегда оправданы;
– за 20 % рабочего времени работники выполняют 80 % работы;
– 80 % работы выполняют 20 % работников и т.д.

Шутя, студенты его также окрестили «пивным законом», в соответствии с которым 20 % людей выпивают 80 % пива.

Основные характеристики распределения Парето. Формализацией принципа Парето является одномерная функция непрерывного двухпараметрического (α, x_o) распределения $F(x) = p\{x' < x\}$ (вероятность того, что случайная величина X принимает значение x', меньшее x) и соответствующая ей плотность вероятности $\varphi(x)$ через производную от функции $F(x)$, которые задаются соотношениями степенного вида [1, с. 615]:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_o}{x}\right)^{\alpha}, \qquad \psi(x) = \frac{d}{dx}F(x) = \frac{\alpha}{x_o}\left(\frac{x_o}{x}\right)^{\alpha+1}, \qquad \alpha > 0, \qquad x \ge x_o > 0,$$

или после перенормировки $x/x_o \Rightarrow x$ для нормированной величины x

$$F(x) = 1 - x^{-\alpha}, \qquad \psi(x) = \alpha x^{-\alpha-1}, \qquad \alpha > 0, \qquad x \ge 1, \tag{1}$$

где α – показатель степени; x_o – минимально возможное значение x.

Подобные зависимости называют распределениями с "тяжелыми хвостами" (ТХ) /heavy tails, fat tails/, – их нельзя "обрезать", равно как и пренебрегать крупными, но редкими событиями. Инженерно-отсекающее "правило трех сигм" (среднеквадратичных отклонений), приемлемое для гауссовых распределений, здесь не подходит.

Степенной параметр α как раз и характеризует тяжелый хвост.

Классическому соотношению 80/20 соответствуют величины:

$\alpha_1 = \ln(0{,}8)/\ln(0{,}2) \approx 0{,}14$ с выполнением равенства

$$F(5x_o) = 5^{-1} = 0{,}2;$$

$\alpha_2 = \ln(0{,}2)/\ln(0{,}8) \approx 7{,}21$ с равенством

$$F\left(\frac{5}{4}x_o\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^{-1} = 0{,}8.$$

Для любого значения $\alpha > 0$ соотношение 80/20 в чистом виде вытекает из интегральных характеристик

$$\int_{x_o}^{x_o 1{,}25^{\frac{1}{\alpha}}} \psi(x)\,dx = 0{,}2\,, \qquad \int_{x_o}^{x_o 5^{\frac{1}{\alpha}}} \psi(x)\,dx = 0{,}8\,.$$

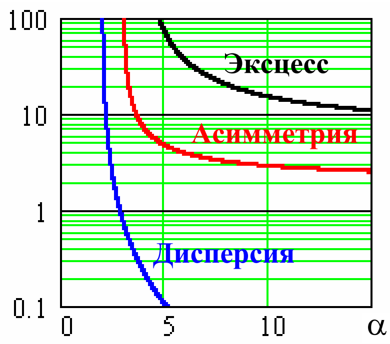

Рис. 1. Изменение параметров распределения Парето

Главная "неприятность" таких распределений состоит в том, что моменты достаточно высокого порядка $M_q = \int x^q dF(x)$ у них расходятся [2, гл. 5, § 1]: $M_q \to \infty$ для $q \ge \alpha$.

То есть для распределения Парето существуют только моменты порядка, меньшего степени α.

При $\alpha \le 1$ бесконечно уже математическое ожидание или среднее M_1, при $\alpha \le 2$ случайная величина X имеет бесконечную дисперсию, связанную с M_2, и т.д. (табл. 1, рис. 1).

На расходимость моментов влияет именно тяжелый хвост, когда вид "головы" оказывается не существенным, а главную роль играет лишь асимптотика хвоста.

Таблица 1

Параметры распределения Парето

(нижняя строка соответствует $x_o = 1, \alpha = 5$)

Мода	Медиана	Математическое ожидание	Дисперсия	Коэффициент асимметрии	Коэффициент эксцесса	Дифференциальная энтропия
x_o $\alpha > 0$	$x_o\sqrt[\alpha]{2}$ $\alpha > 0$	$\dfrac{x_o\alpha}{\alpha-1}$ $\alpha > 1$	$\left(\dfrac{x_o}{\alpha-1}\right)^2 \dfrac{\alpha}{\alpha-2}$ $\alpha > 2$	$\dfrac{2(\alpha+1)}{\alpha-3}\sqrt{\dfrac{\alpha-2}{\alpha}}$ $\alpha > 3$	$\dfrac{6\left(\alpha^3+\alpha^2-6\alpha-2\right)}{\alpha(\alpha-3)(\alpha-4)}$ $\alpha > 4$	$\log\dfrac{\alpha}{x_o} - \left(\dfrac{1}{\alpha}+1\right)\log e$
1	1,15	1,25	0,10	4,65	70,8	

Отметим, что с ростом α распределение "вырождается" и математическое ожидание стремится к x_o. Само распределение обладает также свойством самоподобия: локализация значений, превышающих величину $z_o \ge x_o$, также характеризуется распределением Парето:

$$\psi(z, \alpha, z_o) = \frac{\psi(z, \alpha, x_o)}{1 - F(z_o, \alpha, x_o)} = \frac{\alpha}{z_o}\left(\frac{z_o}{z}\right)^{1+\alpha}.$$

Энтропия. Из теории информации известно, что среди всех непрерывных распределений с фиксированной дисперсией σ^2 наибольшую дифференциальную энтропию

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \log_c \psi(x) dx$$

имеет нормальное распределение $H_{N(m,\sigma)} = \log_c \left(\sigma\sqrt{2\pi e}\right)$.

В частности, для стандартизованного гауссового распределения с единичной дисперсией $\sigma^2 = 1$ и десятичного логарифма (основание $c = 10$) величина $H \approx 0{,}616$ максимально приближена к "золотому" сечению, чуть-чуть не «дотягивая» до его истинного значения [3].

Для распределения Парето с единичной дисперсией, когда выполняется соотношение $x_0 = (\alpha - 1)\sqrt{\dfrac{\alpha - 2}{\alpha}}$, энтропия H возрастает с увеличением α (рис. 2) и достигает своего максимального значения $\log e \approx 0{,}434$.

Итак, энтропия (как *H*-мера хаоса) распределения Парето меньше, чем у нормально распределенной случайной величины. Однако тяжелые хвосты степенной зависимости (1), которые обычно отсекаются в распределениях Гаусса, при больших значениях α могут проявить себя самым неожиданным способом, приводя к существенным изменениям и преображая ситуацию, что называется «с ног на голову».

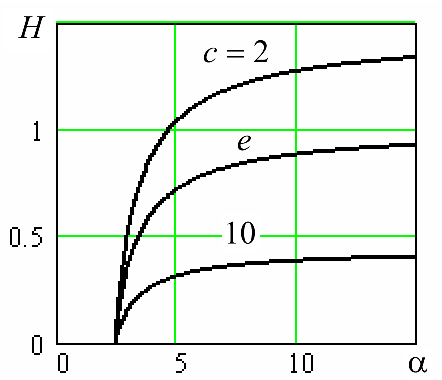

Рис. 2. Графики изменения дифференциальной энтропии распределения Парето с единичной дисперсией для разных оснований логарифма c

Другими словами, *H*-мера неопределенности распределения Парето в ее интегральном представлении рассредоточивается или как бы «распыляется и усыпляет бдительность» так, что система суммарно характеризуется более упорядоченной, чем при нормальном распределении. Но отдельные, хотя и маловероятные случаи в такой системе все же возможны и могут породить в ней катастрофические изменения.

Практические аспекты. В случае ТХ-распределений выборочные средние значения неустойчивые и малоинформативные, и к ним неприменим закон больших чисел.

Для временных последовательностей сумма элементов ряда имеет такой же порядок, что и максимальный элемент ряда, и они характеризуются медленным уменьшением числа редких событий.

Степенные ТХ распределения являются эффективным средством для моделирования многих процессов и потоков данных в самых разных науках, описывают абсолютное большинство катастрофических ситуаций, кризисных явлений и стихийных бедствий с большими ущербами и т.п.

Правило 80/20 чрезвычайно важно на практике во многих сферах экономики, включая коммунальное хозяйство [4]. Оно выступает своеобразным противовесом привычной для нас логике, когда ожидается, что основные обстоятельства имеют примерно одинаковое значение. Мы привыкли думать, что 50 % средств или вложенных в дело ресурсов дадут нам столько же результатов или конечного продукта. Нам кажется естественным предположение, что причины и следствия почти в равной мере соотнесены между собой. Если же изучить и проанализировать два набора данных, характеризующих воздействия и отклики на них, то представится картина несбалансированности.

Когда мы узнаем действительное соотношение, то сильно удивляемся уровню дисбаланса, который, скорее всего, не совпадает с нашими прогнозами. А значит, немалые силы часто затрачиваются впустую.

Позднее данный принцип исследовал англичанин Ричард Кох [5]. Приведем его отдельные выводы как *важные положения принципа Парето*:

* Значимых факторов немного, а факторов тривиальных множество, – лишь единичные действия приводят к важным результатам. Большая часть усилий не дает желаемых результатов. То, что мы видим, как правило, отличается от того, что получаем, – всегда существуют скрытые силы.

* Большинство удачных событий обусловлено действием небольшого числа высокопроизводительных сил; большинство неприятностей связано с действием небольшого числа деструктивных сил (разрушительных, сопровождающихся распадом структурных отношений, организационных связей или функциональных зависимостей).

* Большая часть действий (групповых или индивидуальных) являет собой пустой тратой времени, не давая ничего реального для достижения результата.

Следует отметить, что принцип Парето в общем случае справедлив для оценки по одному параметру (обычно временных рядов), а существенным условием является аддитивный характер функции результата, то есть независимость исследуемых величин [6].

«Золотые» признаки Парето.

1. Распределение Парето носит степенной характер и уже благодаря этому является «идеальным полем» для применения "золотого" сечения (ЗС) $\Phi = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$, обладающего уникальными аддитивно-мультипликативными свойствами при построении геометрических прогрессий:

$$\Phi^{n} = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n} = \Phi, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{-n-2} = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi^{-2n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \Phi^{-n} = 1.$$

Тем не менее, исходя из широкого проявления в природе "золотой" пропорций и ее свойств $1-\sqrt{\Phi^{-1}} \approx 0{,}214$ и $\dfrac{\Phi^{-2}}{2} \approx 0{,}191$, в работе [7, с. 126–129] предлагается внести уточнения в принцип Парето с его заменой на два правила: «21 / 79» и «19 / 81».

Подобная фанатичная вера в "золотую" пропорцию и порой искусственное ее "выуживание", откуда только можно, заслуживает искреннего уважения преданности автора идее о всеобщности гармонической пропорций.

Возможно, приведенные цифры даже имеют сакраментальное значение, но для этого вовсе не требуется изменять само название правила «80/ 20», поскольку это больше метафора и красивый брэнд.

Нетрудно также заметить, что именно такое соотношение через цифру $5 = 100/20$ внутренне содержит в точности "золотое" сечение

$$\left(\Phi + \Phi^{-1}\right)^{2} = 5.$$

Более того, соотношение «80/ 20» одновременно несет в себе только ему присущие бинарные признаки в виде «удвоения меньшего и половинки большего».

$$20 \cdot 2 = 80/2.$$

что одновременно отражается наличием числа $4 = 2^{2}$ в сумме геометрической прогрессии:

$$2^{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\Phi + \Phi^{-1}\right)^{-2k} = 1.$$

Поэтому можно утверждать, что принцип Парето в его классической формулировке органически объединяет в себе дихотомию и ЗС, что находит адекватное отражение в проявлении редких, но значительных природных и жизненно-социальных явлений.

2. Разобьем числовую ось отрезками с координатами точек $x_i = x_0 d^{i/\alpha}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, где $d > 1$ – любое действительное число.

Для функции распределения $F(x)$ и $n = \overline{1, \infty}$ определим интервальные значения $S_n = p\{x_{n-1} < x' < x_n\}$ – вероятность того, что случайная величина X принимает значение x', которое меньше x_n, но больше x_{n-1}, то есть

$$S_n = \int_{x_{n-1}}^{x_n} \psi(x)\,dx, \qquad \sum_n S_n = 1, \qquad F(x_n) = \sum_{j=1}^{n} S_j = F(x_{n-1}) + S_n .$$

Ряд S_n образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию $S_n = (d-1)d^{-n}$ со знаменателем d^{-1}, суммой $1 - d^{-m}$ первых m членов ряда и суммой соседних элементов последовательности $S_n + S_{n+1} = d^{1-n} - d^{-1-n}$.

Если принять $d = \Phi$ и соответственно $x_i = x_0 \Phi^{i/\alpha}$, то вследствие особых свойств "золотого" сечения, для последовательности S_n можно получить ряд дополнительных формул, свойственных только числу Φ (рис. 3):

$$S_n + F(x_{n+1}) = 1,$$

$$S_n = \Phi^{-n-1},$$

$$\frac{1 - F(x_n)}{S_n} = \Phi ,$$

$$S_n + S_{n+1} = \Phi^{-n},$$

$$S_{n-1} + 2S_n + S_{n+1} = \Phi^{-n+2} .$$

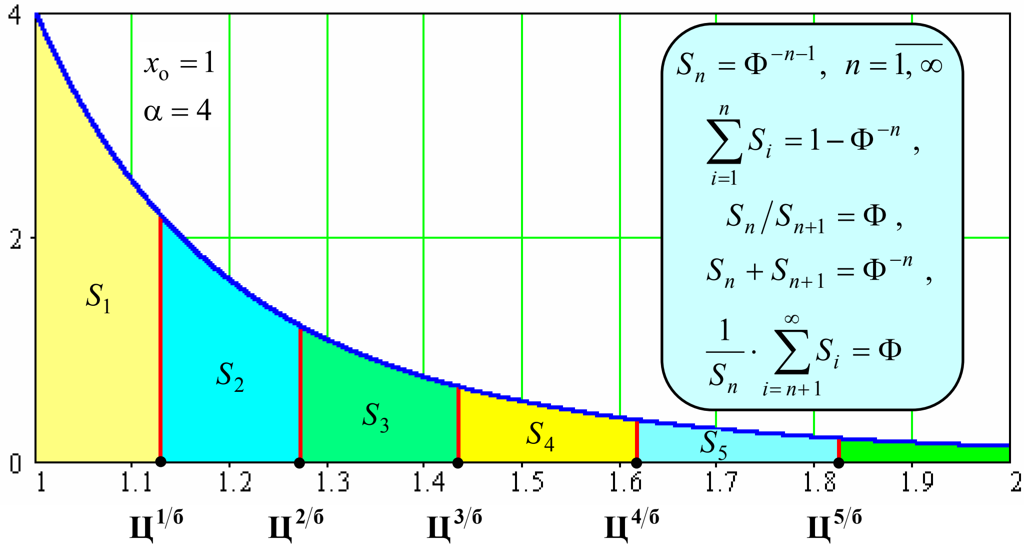

Рис. 3. "Золотые" сечения в распределении Парето

В частности справедливы соотношения (рис. 4):

$$\int_{x_o}^{x_o \Phi^{\frac{1}{\alpha}}} \varphi(x)\, dx = 2 - \Phi\,, \qquad \int_{x_o}^{x_o \Phi^{\frac{2}{\alpha}}} \varphi(x)\, dx = \Phi - 1\,.$$

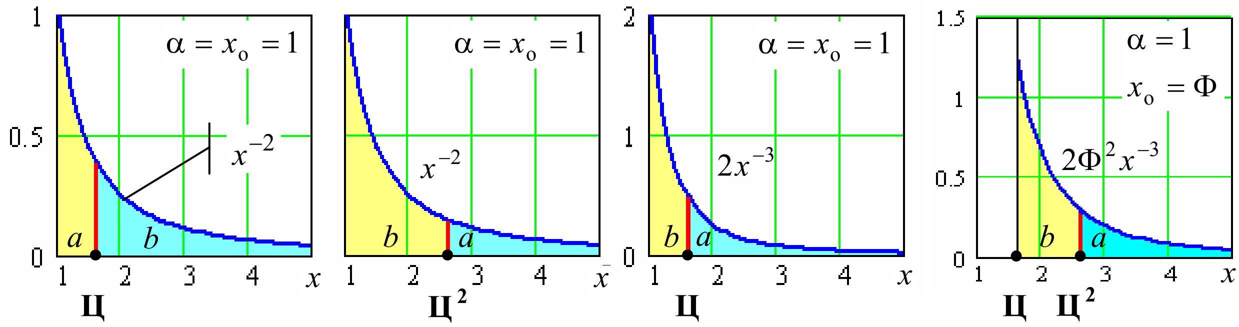

Рис. 4. Примеры "золотых" сечений в непрерывном распределении Парето:
$a = 2 - \Phi \approx 0{,}382$; $\quad b = \Phi - 1 \approx 0{,}618$

Моделирование процессов. Одним из самых распространенных и мощных способов имитационно-компьютерного моделирования является численный метод Монте-Карло, как разновидность статистического исследования процессов вероятностного характера.

Его универсальность и междисциплинарность позволяет использовать для решения задач математики, техники, экономики и экологии, во многих областях от квантовой физики до физики твердого тела, физики плазмы и астрофизики и др. В 1950-х годах он использовался в расчетах при разработке водородной бомбы.

Метод основан на получении большого числа реализаций стохастического процесса из условия совпадения его статистических параметров с аналогичными величинами решаемой задачи.

Генерирование таких реализаций в виде псевдослучайных числовых последовательностей x_n с заданными вероятностными характеристиками распределения Парето (α, x_o) можно осуществлять методом инверсии путем решения уравнения

$$x_n = \arg\left\{ F(x_n) = 1 - \left(\frac{x_o}{x_n}\right)^{\alpha} = \xi_n \right\},$$

где ξ_n – последовательность случайных чисел, равномерно распределенных в интервале (0, 1).

Учитывая, что распределения ξ_n и $1 - \xi_n$ эквивалентны, получаем

$$x_n = x_o \xi_n^{-1/\alpha} = x_o (\mathrm{rnd}\,1)^{-1/\alpha},$$

где $\mathrm{rnd}\,1$ – генератор случайных чисел с равномерной плотностью распределения на отрезке (0, 1).

Для распределений с тяжелыми хвостами основной вклад в суммарный эффект вносят наибольшие наблюдения. Поэтому выборочная оценка максимального правдоподобия для параметра α имеет вид [2, гл. 5, § 2]:

$$\hat{\alpha} = N\left(\sum_{n=1}^{N} \ln \frac{x_n}{x_0}\right)^{-1},$$

где x_0 – пороговый параметр, который для искусственно генерируемых последовательностей равен x_o, для реальных данных – принимается исходя из известной статистики так, чтобы для исследовательских целей осталось не менее $N = 25–30$ наибольших наблюдений, превышающих этот порог x_0. В частности, $x_0 = \min\{x_n\}$.

При моделировании процессов и обработке положительных величин x_n, имеющих степенные распределения с тяжелым хвостом, часто переходят к их логарифмам $y_n = \lg x_n$, которые уже имеют все статистические моменты и допускают применение стандартных методов статистической обработки. Однако если нас интересует суммарный эффект наблюдаемых величин S_n, то переход к логарифмам не помогает, поскольку связать изменение S_n с суммой логарифмов $y_1 + y_2 + ... + y_n$ в общем случае не представляется возможным.

В случае распределений с тяжелыми хвостами выборочное среднее является неустойчивым и малоинформативным показателем из-за неприменимости закона больших чисел.

В этой связи представляет интерес взаимного рассмотрения распределения Парето с нормальным распределением, для которого выборочное среднее арифметическое случайных величин приближается к математическому ожиданию этих величин, то есть выборочные средние сходятся к теоретическому среднему.

Распределения Парето и Гаусса.

В работе [8] утверждается, что граница перехода между данными распределениями проходит точно через точки "золотого" сечения. Если это так, то с учетом фигурирования в нормальном распределении чисел π и e это фактически означало бы установление аналитической зависимости между числами π, e, Φ, что весьма проблематично.

Положим для определенности $x_o = 1$ и $\alpha = 1$, запишем функции плотности вероятности нормального (n) и паретовского (p) распределения с их производными

$$\psi_n(x,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{\sigma}\right)^2}, \qquad \psi_p(x) = \alpha x^{-\alpha-1},$$

$$\psi'_n(x,\sigma) = -\frac{x-1}{\sigma^2}\psi_n(x,\sigma), \qquad \psi'_p(x) = -\frac{\alpha+1}{x}\psi_p(x).$$

и определим условия, при которых кривая $\psi_n(x,\sigma)$ плавно переходит в $\psi_p(x)$, то есть, идентифицируем точку на числовой оси x, где $\psi_n(x,\sigma) = \psi_p(x)$ и $\psi'_n(x,\sigma) = \psi'_p(x)$.

Из равенства производных следует:

$$x^2 - x - \sigma^2(\alpha+1)\frac{\psi_p(x)}{\psi_n(x,\sigma)} = 0.$$

В работе [8] полагается $\psi_p(x) = \psi_n(x,\sigma)$ (чего делать нельзя! т.к. функции имеют разное число аргументов), далее приравнивается $\sigma^2(\alpha+1) = 1$, откуда следует $\sigma = 1/\sqrt{2} \approx 0{,}707$, и находится якобы точка касания, в точности соответствующая $x = \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

В том, что это не так легко убедиться, перейдя к укрупненному масштабу представления результатов расчета (рис. 5, верхний ряд графиков).

Действительно, в точке $x = \Phi$ касательные практически равны $\psi'_n\left(\Phi, \sqrt{2}/2\right) = \psi'_p(\Phi)$, но значения функций плотности распределения – разные: $\psi_n\left(\Phi, \sqrt{2}/2\right) \neq \psi_p(\Phi)$.

Решив численным методом уравнение $\psi_n(\Phi,\sigma) = \psi_p(\Phi)$, можно найти значение $\sigma \approx 0{,}730 \neq \sqrt{2}/2$, при котором равенство плотностей распределения привязано к точке $x = \Phi$, но тогда касательные к этим функциям не совпадают (рис. 5, средний ряд графиков).

И, наконец, решив задачу двумерной оптимизации

$$\left[\psi_n(x,\sigma)-\psi_p(x)\right]^2+\left[\psi'_n(x,\sigma)-\psi'_p(x)\right]^2 \underset{x,\,\sigma}{\to} 0$$

можно найти истинные параметры взаимного перехода нормального распределения и распределение Парето: $x \approx 1{,}651 \neq \Phi$ и $\sigma \approx 0{,}733 \neq \sqrt{2}/2$ – для $\psi_p(x) = x^{-2}$.

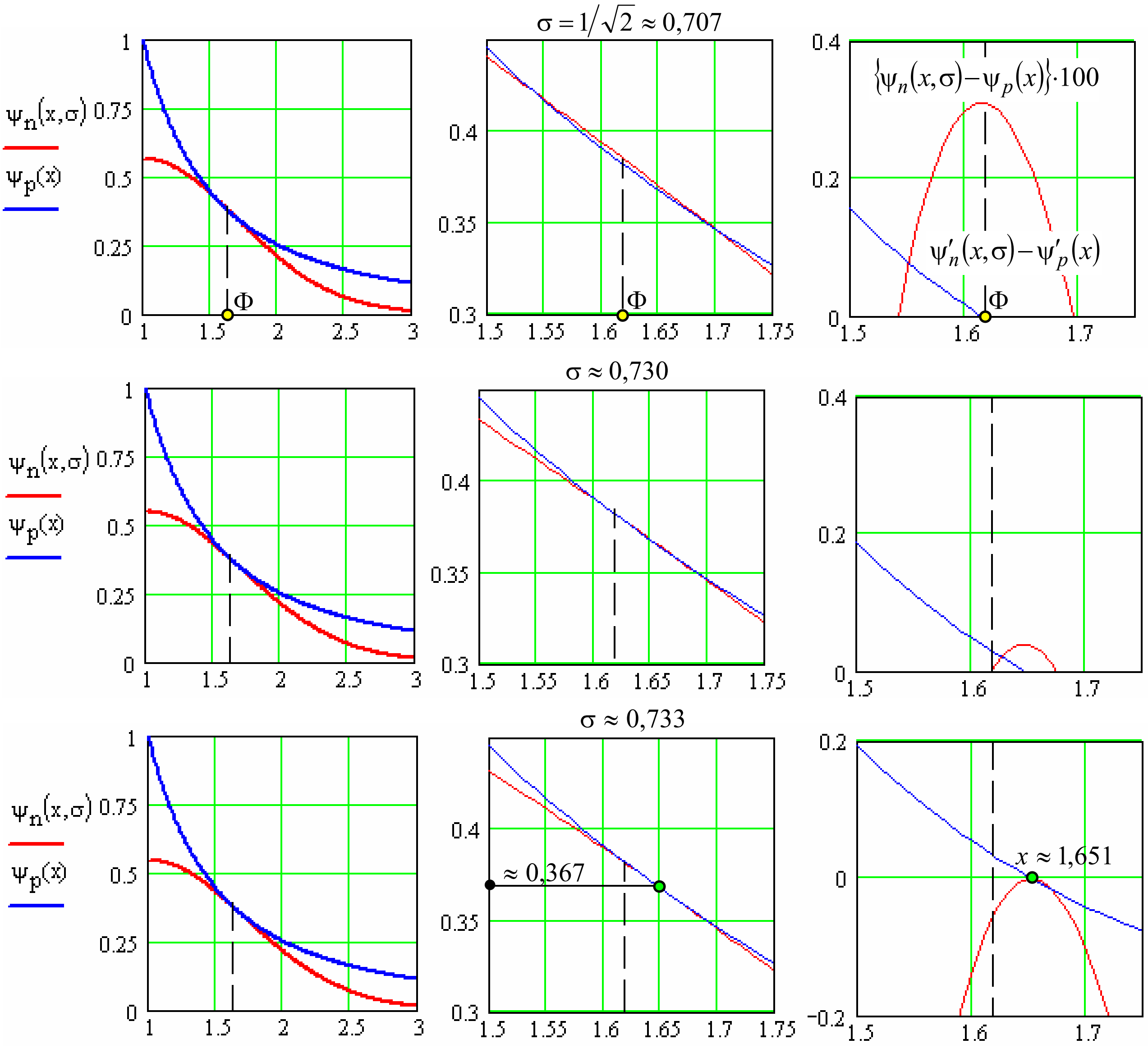

Рис. 5. Совместные графики распределений (нормального и Парето): $x_0 = 1$, $\alpha = 1$

Анализ результатов показывает, что взаимный переход распределений Гаусса и Парето с определенной долей погрешности соответствует некоторой области сопряжения, достаточно близкой к "золотому" сечению. Но о точном совпадении с числом Φ не может быть и речи. В противном случае на основе равенств $\psi_n(\Phi,\sigma) = \psi_p(\Phi)$ и $\Phi - 1 = \Phi^{-1}$ это означало бы установление функциональной зависимости между числами π, e и Φ, исходя из уравнения

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2(\sigma\Phi)^2}} - \Phi^{-2} = 0,$$

не имеющего аналитического решения (относительно σ).

Реминисценции. Было бы в корне не объективно представить выполненное исследование С.А. Алферова с завершением на критической ноте по целому ряду причин.

Во-первых, изложенная выдержка касается совсем небольшой части его статьи, имея вспомогательный характер.

Во-вторых, допущенная неточность относится к категории трудно вылавливаемых погрешностей.

В-третьих, и самое главное, эта работа подсказала не только саму идею сравнения "разнокалиберных" распределений (с точки зрения выполнения центральной предельной теоремы и закона больших чисел для ограниченных последовательностей), но и позволила на конкретном примере еще раз проследить одну мысль:

безупречная математическая конструкция "золотого" сечения в природе идеально себя не показывает.

Практически все, что о нем написано, сводится к двум простым вещам:

– либо к его асимптотически-ограниченным проявлениям (фитолаксис, строение подсолнухов, геометрия раковин и т.п.), по которым отсутствуют какие-либо доказательства о сколь-угодно длительном продолжении "золотых" тенденций в их последующем развитии;

– либо к оценочно-приближенным вычислениям разнообразных структурно-функциональных соотношений, которые квалифицируются как близкие к "золотой" пропорции, иногда больше на веру.

Различные так называемые «обобщения золотого сечения» здесь не в счет, поскольку это издержки некорректной терминологии: они обобщают не само "золотое" сечение (константы не обобщаются!), а развивают общую теорию пропорций на совершенно другой основе, уже без свойств числа Φ.

Все это, по-видимому, не случайно, что прослеживается даже в вышеописанном частном примере по распределениям случайных величин.

Создается такое впечатление, что, закручивая многие процессы и явления вокруг "золотой" пропорции, движитель Вселенной, тем не менее, не впускает их развитие в непосредственную близость к числу Ф.

Будто существует некая запретная граница, дальше которой подход к нему становится в буквальном смысле небезопасным для объекта. А причина представляется в том, что самое иррациональное и одновременно самое изящное сечение своей идеальностью не оставляет места наличию внутрисистемных связей, становясь фактическим разрушителем системы.

Да и сама Вселенная, как только в своих макро- или микро-проявлениях выйдет точно на "золотое" сечение (или приблизится к нему ближе некоторого минимально допустимого значения), видимо, запрограммирована рассыпаться и прекратить свое существование в современном представлении. Все превратится в Канторову пыль или бессвязный и бессистемный фрактал.

Число Ф в своем идеальном значении хотя и "золотое, божественное", но по своему внутреннему устройству, если так можно выразиться, в идеале имеет совершенно иную высшую цель, являясь носителем тления и распада, как в выражении «страшно красивая».

Это ни вердикт или обвинительное заключение "золотой" пропорции, это скорее Ода истинному ее величию, которая позволит нам по-новому заглянуть в глубину «структурной гармонии систем» (Э.М. Сороко) с надеждой на получение новых знаний и понимание подлинного смысла «кодов золотой пропорции» (А.П. Стахов).

Вместо заключения. Распределения с «тяжелыми хвостами», к которым относится и распределение Парето, являются чрезвычайно полезным инструментарием для исследования процессов, на первый взгляд, мало похожих или плохо вписывающихся в понятие гармонии.

Весь смысл заключается, что мы вкладываем в это понятие.

Если гармонию мира, то все становится на свои места, поскольку его разнообразие включает в себя и проявление экстремальных редких явлений (катастроф, вулканов, рождения новых звезд и др.).

Гармония мира – это не только идиллия и согласованность красивых форм, присущих "золотому" сечению.

Гармония мироздания – это, прежде всего, многообразие форм в их единстве, когда могут присутствовать самые разные пространственные конфигурации и протекать различные временные процессы. Даже если они носят спорадический и нерегулярный характер, то все равно остаются частями целого.

Более того, их мощь в отдельные моменты может быть настолько сильной, что идеально гармоничные формы, выстроенные эволюцией, просто разрушаются, а на их восстановление (обновление) потом могут уходить целые эпохи.

Литература:

1. *Корн Г.*, *Корн Т.* Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – 6-е изд. стер. – СПб.: Лань, 2003. – 832 с.
2. *Управление риском*. Риск, устойчивое развитие, синергетика / В.А. Владимиров, Г.Г. Малинецкий, А.В. Подлазов и др. – М.: Наука, 2000. – 432 с. – http://www.keldysh.ru.
3. *Василенко С.Л.* Случайность и "золотая" пропорция в системе «хаос–порядок» // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ. 15220 от 09.04.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/012a/02322034.htm.
4. *Василенко С.Л.* Проявления принципа Парето в сфере централизованного питьевого водоснабжения // Матеріали Міжнарод. наук.-практ. конф. «Водопідготовка, водопостачання, водовідведення» IV Міжнародного Водного Форуму «Аква – Україна 2006». – К.: Укр. Водна асоціація, 2006. – С. 165–167.
5. *Кох Р.* Принцип 20/80: секреты достижения больших результатов при затрате меньших усилий. – М.: Попурри, 2002. – 352 с.
6. *Василенко Т.Г.* Миф о 80/20. – 2004. – http://improvement.ru/zametki/pareto.
7. *Ясинский С.А.* "Золотое" сечение в культурном и социально-экономическом развитии общества с приложениями в связи и логистике. – СПб.: ВАС, 2005. – 176 с.
8. *Алферов С.А.* Несколько шагов в интересную сторону… (часть 2) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл № 77-6567, публ.13953 от 30.10.2006. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321038.htm.