С.Л. Василенко

БИФУРКАЦИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ «ЗОЛОТОГО» СЕЧЕНИЯ

Исходной предпосылкой написания данной статьи послужила работа украинских авторов [1]. По их мнению, объект, создаваемый согласно рекуррентной «программе Фибоначчи» с ее обобщением на область действительных значений аргумента, спонтанно разрушается при определенных начальных условиях (–Ф и 1) и через 39–40 циклов переходит в состояние динамического хаоса.

Безусловно, изучение причинно-следственных отношений в сложной системе «хаос – порядок» и тем более поиск их эвентуальных связей с "золотым" сечением, которое лежит в основе фибоначчиевой модели, представляют большой познавательный интерес. В этом аспекте заслуживает внимания, например, исследование ассиметричной симметрии между хаосом и порядком в круговороте энергии по правилу гармонической пропорции [2].

Однако, весьма сомнительно, чтобы идеальная система, основанная на "золотой" пропорции, самопроизвольно порождала некий хаос, пусть даже детерминированного характера, и слабо увязывается с традиционными о ней представлениями, как уникальной математической константе и одной из главных мер порядка и гармонии в природе.

И все же отдельные полезные мысли, изложенные в работе [1], дают повод обратить на них внимание, тщательно проверив еще раз вычислительные эксперименты и интерпретировав новые весьма нетривиальные результаты, которые представляются исключительно важными для последующих исследований и расширения знаний о подлинной роли "золотого" сечения в мироздании.

А для этого следует вернуться к исходной позиции и начать изложение сначала.

Известно, что классический ряд целых чисел Фибоначчи с начальными условиями $F_0 = 0,\ F_1 = 1$ задается с помощью аддитивно-рекуррентной (самой первой в истории математики рекурсии) и аналитической (по Бине) формул

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$$

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-\Phi)^{-n}}{\sqrt{5}}, \quad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\ , \tag{1}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ – числа натурального ряда.

Определим непрерывную функцию Люка (как обобщение функции Фибоначчи) действительного аргумента x

$$f(x) = f(x-1) + f(x-2) = f_1 F(x) + f_0 F(x-1), \tag{2}$$

где начальные условия f_0, f_1 – в общем случае произвольные конечные числа;

$F(x) = \dfrac{\Phi^x - (-\Phi)^{-x}}{\sqrt{5}}$ – комплексная функция (рис. 1), расширяющая ряд F_n на непрерывную область так, что $F(n) = F_n$ для целочисленных величин $x = n$.

В частности, исходные значения $f_0 = 2,\ f_1 = 1$ соответствуют функции Люка (рис. 2), характеризующей колебания с двумя аттракторами.

Дискретный аналог обобщенной функции Фибоначчи с произвольными начальными условиями f_0, f_1 имеет вид

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \tag{3}$$

или

$$f_n = f_1 F_n + f_0 F_{n-1}. \tag{4}$$

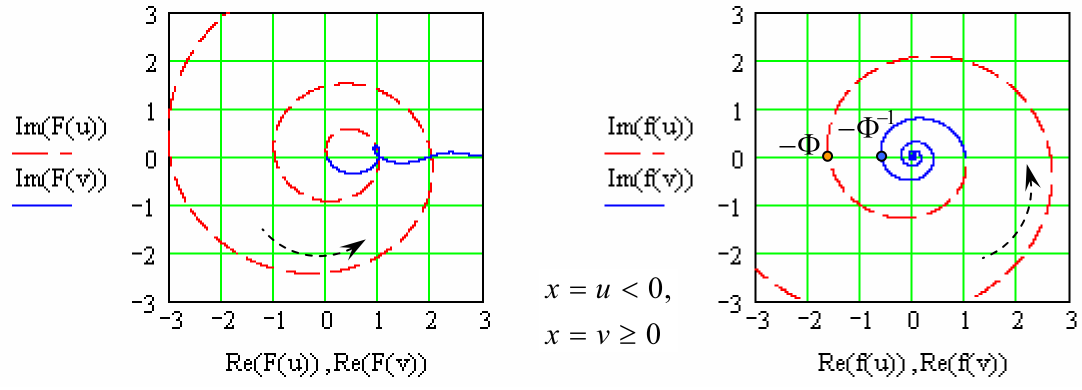

Рис. 1. «Фазовые портреты» комплексных функций Фибоначчи $F(x)$ и $f(x)$ с начальными условиями: $f_0 = 1,\ \ f_1 = 1 - \Phi$

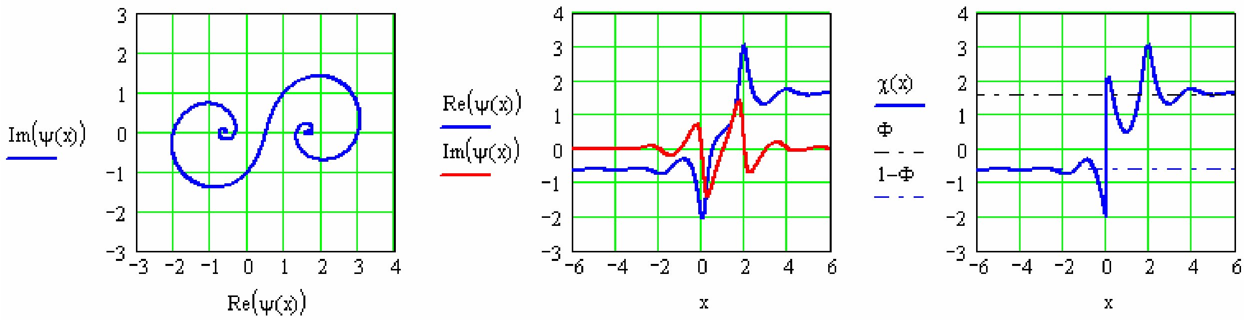

Рис. 2. Некоторые характеристики комплексной функции Люка $L(x) = F(x) + 2F(x-1)$:

$$\psi(x) = \frac{F(x)}{F(x-1)}, \quad \chi(x) = \operatorname{sign}x \frac{|F(x)|}{|F(x-1)|},$$

$\operatorname{sign}x = \{-1,\ x < 0;\quad 0,\ \ x = 0;\quad 1,\ x > 0\}$ – знаковая функция

Зададим начальные условия $f_0 = 1,\ \ f_1 = 1 - \Phi = -\dfrac{1}{\Phi} = -\dfrac{f_0}{\Phi}$.

Тогда с учетом соотношений (1), (2) имеем

$$f(x) = -\frac{F(x)}{\Phi} + F(x-1) = -\frac{(-\Phi)^{-x-1} + (-\Phi)^{-x+1}}{\sqrt{5}}$$

или после несложных преобразований

$$f(x) = (-\Phi)^{-x}. \tag{5}$$

Это знакопеременная функция затухающих колебаний $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ с непрерывным сходящимся к нулю отображением в области комплексных значений (см. рис. 1) и дискретным аналогом

$$f_n = (-\Phi)^{-n}. \tag{6}$$

Отношение $\dfrac{f(x)}{f(x-1)} = -\dfrac{1}{\Phi}$ не зависит от x.

Итак, один и тот же рекурсивный нелинейный процесс f_n имеет два разные математические описания: в виде рекуррентного представления (3) с операцией сложения и аналитического выражения (6) через степенную зависимость.

Их адекватность несомненна, но в вычислительном плане тождественными их назвать нельзя, в виду разного количества производимых операций.

Так, точность представления числа $\Phi > 1$ в формулах (4), (6) не оказывает существенного влияния на конечный результат, то есть $f_n \to 0$.

Иначе себя ведет аддитивно-рекуррентная форма (3), которая в зависимости от порядка "загрубления" числа Φ рано или поздно приводит к срыву затухающего автоколебательного процесса со спонтанным возникновением эффекта нарастающего хаоса (рис. 2). И дело здесь обстоит не столько в выборе исходных значений, как утверждают авторы [1], сколько в обычной точности машинных вычислений по формуле (3).

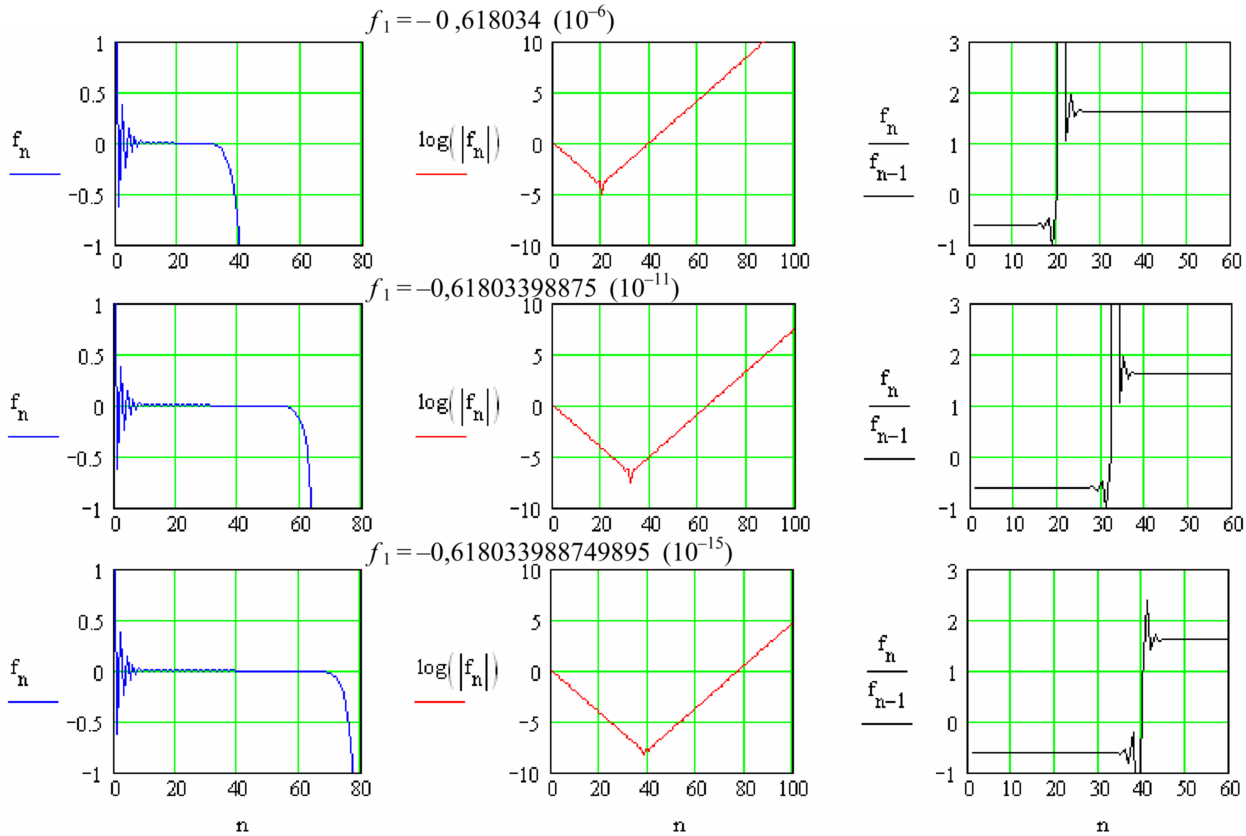

Рис. 3. Потеря устойчивости аддитивно-рекуррентной модели $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ с начальными условиями $f_0 = 1$, $f_1 = 1 - \Phi$ в зависимости от точности иррационального числа Φ

В частности, обычно принимаемое по умолчанию преставление чисел в ряде вычислительных программных средств ЭВМ (например, MatCad) с 16 значащими цифрами как раз и приводит к возникновению точки перехода в области $n = 39–40$ (см. нижний график на рис. 3).

То есть само по себе соответствие точки бифуркации именно 39–40 циклам не несет никакого фундаментального смысла, в том числе для эзотерических знаний.

Чтобы в этом убедиться лишний раз, достаточно перейти к вычислениям с плавающей запятой, когда по мере увеличения количества значащих цифр критическая точка будет сдвигаться по числовой оси все дальше вправо до бесконечности, приближаясь в идеале к аналитическому виду (6).

Таким образом, накопление ошибок машинного округления в реальных расчетах и приводит к ошибочному толкованию спонтанного возникновения бифуркации.

Но так ли уж все плохо? Математика – в порядке. Проблема издержек округления – тоже не нова. Какие же новые полезные знания может нам дать полученный результат?

Прежде всего, это наличие самого явления, когда в неидеальной математической системе, каковой является аддитивная рекурсия, на смену почти полностью исчезающему процессу рано или поздно приходит его возрождение, но в совершенно новом качестве (см. графики справа на рис. 3).

Число Φ настолько идеально по своим уникальным качествам, что малейшее отклонение в исследуемой системе приводит к потере ее устойчивости и смене состояний, а коридор колебаний становится здесь соизмеримым с бесконечно малыми величинами.

Возвратимся к модели (3) $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, но с измененными начальными условиями $f_0 = 1,\ \ f_1 = 1 - \Phi + \delta$, где параметр δ – достаточно малое внешнее возмущение системы.

Точка приложения возмущающего воздействия «привязана» к параметру $n = 1$ чисто условно из соображений удобства сопоставления величины δ с единицей или точностью представления числа Фидия Ф.

В общем случае импульсное вмешательство в систему может произойти на любом итеративном цикле n.

Результаты машинных экспериментов при вычислении выражений с плавающей запятой и повышенной точностью расчетов (рис. 4) показывают, что с уменьшением начального возмущения системы δ точка срыва затухающего процесса сдвигается вправо.

И даже в самой идеальной вычислительной системе (с безукоризненно точным представлением иррациональных чисел) каким бы малым ни было возмущение δ, рано или поздно мы подойдем к точке бифуркации, что обусловлено чрезвычайно сильной чувствительностью поведения системы к начальным условиям.

Результатом такой чувствительности является то, что поведение нашей системы в определенный момент (спонтанного всплеска) кажется случайным, хотя исходная модель, описывающая нелинейную динамическую систему, является детерминированной.

Однако и новое качественное состояние нельзя назвать абсолютным хаосом, поскольку четко сохраняется вновь возникшее соотношение между соседними членами последовательности.

Вернемся к непрерывному аналогу (2).

Изменение начальных условий дает

$$f(x) = \left(-\Phi^{-1} + \delta\right)F(x) + F(x-1)$$

или после несложных преобразований

$$f(x) = (-\Phi)^{-x} + \delta F(x), \qquad (7)$$

где $F(x)$ – комплексная функция Фибоначчи действительного аргумента x.

Непрерывная функция (7) для целочисленных значений x адекватна рекурсии $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ с начальными условиями $f_0 = 1,\ \ f_1 = 1 - \Phi + \delta$.

С помощью функции (7) уже можно проводить расчеты с любой приемлемой (инженерной) точностью вычислений, изучая поведение аддитивной рекурсии.

В частности, достаточно точно определяется момент бифуркации.

Прекращение процесса затухания колебаний происходит в точке $x = N$ (рис. 5) при достижении модуля $f(x)$ минимума или соизмеримости двух слагаемых в правой части уравнения (7), что для малых значений δ приводит к уравнению $\sqrt{5}\Phi^{-N} \approx \delta\Phi^{N}$, откуда

$$N = \frac{\lg\sqrt{5} - \lg\delta}{2\lg\Phi}.$$

То есть для сколь угодно малого значения возмущения $\delta = 10^{-k}$ в системе обязательно возникнет срыв затухающих колебаний в точке $N \approx 1 + 2{,}4 \cdot k$.

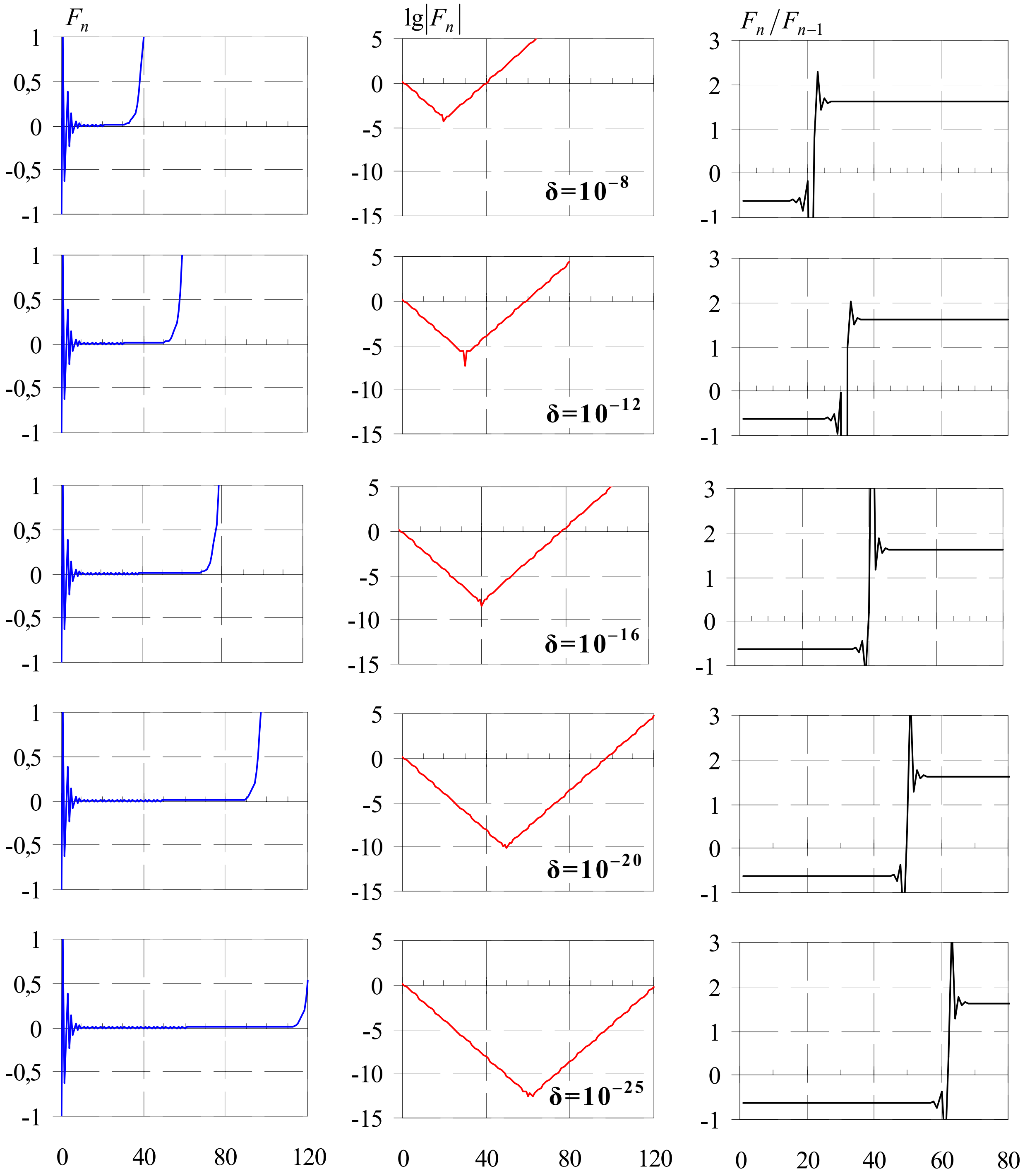

Рис. 4. Отклик исследуемой системы на возмущающее воздействие δ

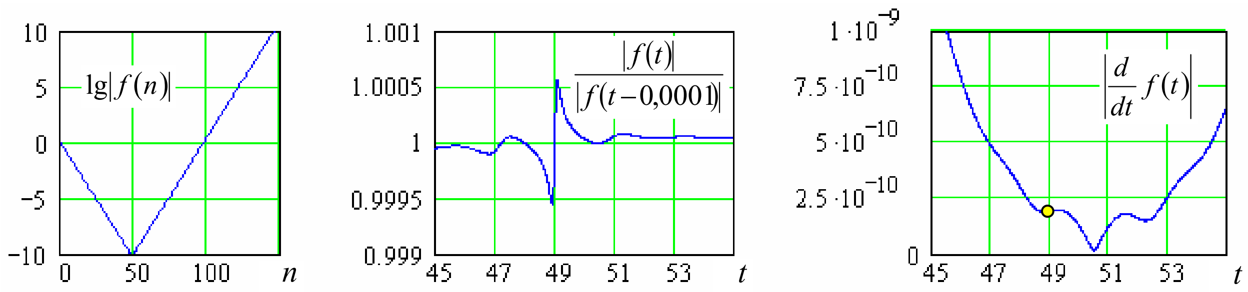

Рис. 5. Характеристики возникновения бифуркации в системе $f(t) = (-\Phi)^{-t} + 10^{-20} F(t)$ со срывом затухающих колебаний в точке $N = 49$

Анализируя графики (рис. 3–4), не трудно заметить похожесть процесса на модель «большого взрыва» Вселенной, но об этом в следующий раз.

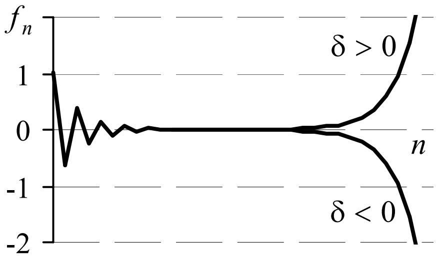

Рис. 6. Бифуркация (расслоение) решений нелинейной динамической модели $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$: $f_0 = 1$, $f_1 = -\Phi^{-1} + \delta$

Выводы. Показано, что для идеальной нелинейной динамической системы $f(x) = (-\Phi)^{-x}$ аддитивная рекурсия ее двух предшествующих состояний $\left(x \in n = \overline{0, \infty}\right)$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad f_0 = 1, \; f_1 = -\Phi^{-1} + \delta$$

при сколь угодно малом значении $\delta = 10^{-k}$ за конечное число шагов $N \approx 1 + 2{,}4 \cdot k$ выводит систему из равновесия и приводит к бифуркации (рис. 6).

Изложенное позволяет высказать гипотезу, что такая система является прообразом (исходным алгоритмом) образования космоса или кодом Вселенной, в основе которого лежит аддитивная рекурсия с "золотой" пропорцией.

Изучению теории данного вопроса автор планирует посвятить последующие работы.

Литература

1. *Сокольчук К.Ю.*, *Остапович В.В.* Золотая пропорция, фракталы и хаос в связи с некоторыми представлениями о мироздании // Клуб константа. – Киев, 2007. – http://314159.ru/mathematics.htm.

2. *Харитонов А.С.* Симметрия хаоса и порядка в круговороте энергии. – М.: Энергия, 2004. – 172 с.