С.Л. Василенко

# Циклические структуры и сокрытые периодичности суммирующих рекурсий

Ниже описываются и анализируются периодические закономерности последовательностей Фибоначчи (по модулю), которые получили свое "второе дыхание – развитие" с внедрением вычислительной техники.

Классическая аддитивная рекурсия, как правило, порождает возрастающие числовые последовательности, близкие по своим свойствам к геометрической прогрессии.

Периодические свойства подобным рядам не свойственны.

Вместе с тем после несложных преобразований тем или иным способом могут проявляться весьма любопытные сокрытые периодичности.

Это весьма интересное наблюдение математиков и простых любителей арифметических задач на вычисление, поскольку даже простой рекуррентный ряд чисел Фибоначчи по схеме «будущее = прошлое + настоящее» в своем движении приводит к аттрактору в виде иррационального решения, которое проявляет циклические свойства через разложение в бесконечную цепную дробь.

Особо здесь следует отметить большой разрыв между описанием одного и того же явления представителями разных математических школ-направлений с устойчивым восприятием и оценкой ситуации в ракурсе, в котором многие авторы грешат тем, что слабо удосуживаются не только прочтением, но даже беглым просмотром работ своих коллег.

## От сложного к простому...

**1.** ***Мы не читатели, мы писатели...*** Обнаружение циклических структур в аддитивных рекурсиях – не новая проблема, которая в разных аспектах уже нашла свое отражение в результатах исследований ряда ученых.

Но есть один немаловажный, хотя и специфический аспект процесса научного познания, который не позволяет пройти мимоходом.

А история такова, что с момента сравнительно подробного описания в прошествии многих лет в принципе уже единожды решенный вопрос снова всплывает в старом качестве, но с неуклонной претензией на новое математическое открытие.

Именно открытие, а не видоизмененную трактовку, или скажем систему доказательств либо обобщенное видение ситуации и т.п.

Все бы и ничего. Но подобное действо возобладало одновременно у многих авторов с небольшой разницей во времени, что уже отмечалось нами в статье [1].

И никто из них до сих пор даже косвенно не усомнился в своем первенстве.

Ни один из них не приводит перекрестных ссылок, пусть даже "задним числом" в последующих работах, с условной перезагрузкой системы на основе новой информации или как говорят в юриспруденции: с учетом вновь открывшихся обстоятельств.

При этом, мягко говоря, слабо анализируются не только работы своих ближайших предшественников, но и результаты более ранних исследований.

**2.** ***Чур, я первый...*** Именно поэтому небезосновательно возникают мнения-суждения[1], что исследователи " не читают работ других авторов в этой области. Отсюда – огромное количество новых "открытий" или претензий на такие "открытия"».

Со своей стороны ради объективности отметим, что, например, в статье [2] не просто фиксируется нумерологический ряд Фибоначчи, но глубоко и разносторонне анализируются скрытые закономерности на основе специфического аппарата эзотерической математики с представлением целого ряда интересных обобщающих выводов.

Но вот утверждения о том, что «*установлена неизвестная*, скрытая периодичность членов» данного ряда и «*определено* 24-х разрядное число скрытого периода», скорее всего с большой натяжкой могут быть соотнесены с получением ранее неизвестных знаний.

Также и в публикациях [3, 4] вносится собственное особое видение нумерологических свойств чисел Фибоначчи с разбивкой периодичности на 12 шагов, что «соответствует количеству пространственных промежутков между замкнутой, периодически вращающейся системой зодиакальных созвездий». Но по-человечески понятное желание зафиксировать лидерство приводит к тому, что автор продолжает субъективно настаивать на своем «открытии этой математической закономерности», хотя на поверку это далеко не так.

В чем же суть?

**3.** ***Новое – хорошо забытое старое.*** Конечно, если данной темой (как впрочем, и любой другой) заниматься, что называется "по верхам", то не мудрено прийти к переоценке собственного вклада и даже личному признанию своего первенства.

Основные исходные публикации здесь представлены слабо, и то разбросаны по зарубежным математическим журналам, в которые многие из нас не только не заглядывают, но даже не знают об их существовании.

А реальное положение дел таково, что история данного вопроса восходит к глубокой древности.

В календаре Майя использовали сокращение чисел по модулю 13.

Древние скандинавы применяли "урезание" по модулю 24.

В древних рунах[2] нашло отражение нумерологическое сокращение по модулю 8.

Применительно к числам Фибоначчи еще в далеких 60-х годах прошлого столетия математики упорядочили и развили известные разрозненные знания на единой общей теоретической основе.

Так, в работе [5] была установлена периодичность последовательностей Фибоначчи по модулю $m$ (Fibonacci Sequence Modulo $m$).

Составлены таблицы различных последовательностей [6–7], а сами значения периодов названы периодами Пизано [7], что зафиксировано в математической энциклопедии[3].

Для $m$ = 1, 2, 3, ... они равны 1, 3, 8, 6, 20, 24, 16, 12, 24, 60, 10, ... (Sloane's [8] A001175).

Применительно к упомянутой нумерологической ситуации в данном частном случае речь идет о числовых рядах по модулю 9 или $(\bmod 9)$ с периодом 24, что равносильно "свертыванию" чисел по теософской редукции.

Это как раз то самое, скажем не очень частое стечение обстоятельств, когда предметы исследования обычной и эзотерической математики практически совпадают.

Данная тема постоянно развивается.

Достаточно широкое описание числовых рядов по модулю $m$ можно найти в [9].

Многие последовательности зафиксированы в On-line энциклопедии Слоэна [8].

Там же представлена более подробная справочная информация.

В работе [10] выполнено дальнейшее обобщение задачи на случай «$k$-ступенчатой последовательности Фибоначчи по модулю $m$», то есть чисел Трибоначчи и т.п., когда в процессе рекуррентного сложения участвует $k>2$ предшествующих членов.

Доказано, что и в этом случае образующиеся последовательности – периодические.

Так что затронутый вопрос имеет естественное происхождение, давнее решение, изначально мало похожее на изотерический вектор, и продолжает свое дальнейшее развитие.

Но в том, что он пришел из обычной математики 60-х годов, сомневаться не приходится. За столь длительное время (30–40 лет) разными путями его идеи могли "просочиться" на благодатную почву эзотериков и много раз ими же воспроизведены.

И это здорово.

Одно только малопонятно. – Зачем нарочито принижать уровень собственных исследований, опуская ссылки на публикации своих коллег? – И если не очень давнишние статьи, то хотя бы осовремененные.

А так, вместо преемственности, получается сплошная вереница непрерывных открытий, когда мы все – писатели без читателей.

Тем не менее, на сегодня можно уверенно утверждать, что математики обобщили существующие свертывания чисел в рамках единой теории путем простой операции взятия модуля (остатка от деления).

В результате появился очень эффективный, эффектный, наглядный и удобный в пользовании инструментарий.

## От простого к сложному…

**1.** ***Перекличка веков.*** Последующее наше изложение продолжим, пожалуй, также с нумерологического подхода в интерпретации теософской редукции или Num-суммирования.

Подобные трактовки и первый похожий анализ большей своей частью исторически связаны с именем великого Пифагора.

В целом для его школы характерен мистико-математический стиль или изотерическое мировоззрение.

Отдельные положения из этого учения предстают взору неискушенного слушателя местами как теологические знания, в других случаях – философские, а уже потом – математические.

Тем не менее, известный алгоритмический прием многократного последовательного сложения всех цифр анализируемого числа (с доведением в конечном итоге до одной цифры) восходит именно к тем далеким античным временам.

Соответствующий оператор $\mathsf{N}(x)$ теософской редукции [1], как сокращение чисел до цифр, удовлетворяет *аддитивному* свойству:

$$a + b = c \quad \longrightarrow \quad \mathsf{N}(a{+}b) = \mathsf{N}[\,\mathsf{N}(a) + \mathsf{N}(b)\,] = \mathsf{N}(c).$$

Но что такое теософская редукция на обычном математическом языке? – В теории чисел эта процедура эквивалентна замене исходного числа его остатком от целочисленного деления на 9 (с заменой $0 \to 9$) и может определяться по формуле:

$$\mathsf{N}(x) = x(\mathrm{mod}\, 9),$$

которая читается как "$x$ по модулю 9".

То есть, как и положено, в наличии имеется множество цифр (знаков), количество которых равно основанию позиционной системы счета.

Только вместо нулей используются девятки.

Отсюда следует, что нумерологическая последовательность чисел Фибоначчи сводится к последовательному суммированию чисел ($k = 1, 2, \ldots$)

$$F_{k+1} = (F_k + F_{k-1})(\mathrm{mod}\ 9)$$

с заданными (принятыми) начальными условиями ($F_0$, $F_1$), не равными одновременно нулю.

Откуда берутся периоды в такой последовательности? – Они существуют абсолютно объективно. – Здесь нет особо потаенного сакрального начала и тем более необъяснимого или таинственно-мистического присутствия чего-либо.

Две последовательные цифры (от 1 до 9) в разных сочетаниях и с учетом порядка следования образуют ровно 80 возможных комбинаций $80 = 9 \cdot 9 - 1$, за вычетом одной тривиальной пары (9, 9), эквивалентной (0, 0), которая формирует ряд нулевой ряд.

Таким образом, максимум через 80 шагов после полного перебора возможных пар мы обязательно выйдем на уже встречающуюся пару чисел, что и будет означать возникновение периода. В виду специфики вычислений и суммирования отдельных цифр, фактически у нас появляется основной период в 24 шага (табл. 1) $24 \cdot 3 + 8 = 80$, что составляет $(24/80) \cdot 100 = 30$ % от максимально возможной длины интервала.

Почему именно 24, – будет показано ниже.

*Таблица* 1

**Полный набор возможных "затравочных" пар чисел (по горизонтали) для формирования периодов последовательностей Фибоначчи /по модулю 9/**

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **1** | 2 | 3 | 5 | 8 | 4 | 3 | 7 | 1 | 8 | 9 | **8** | **8** | 7 | 6 | 4 | 1 | 5 | 6 | 2 | 8 | 1 | 9 | 1 1 ... | 24 |
| **2** | **2** | 4 | 6 | 1 | 7 | 8 | 6 | 5 | 2 | 7 | 9 | **7** | **7** | 5 | 3 | 8 | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 2 | 9 | 2 2 ... | 24 |
| **3** | **3** | 6 | 0 | **6** | **6** | 3 | 0 | 3 3 ... | | | | | | | | | | | | | | | | | 8 |
| **4** | **4** | 8 | 3 | 2 | 5 | 7 | 3 | 1 | 4 | 5 | 9 | **5** | **5** | 1 | 6 | 7 | 4 | 2 | 6 | 8 | 5 | 4 | 9 | 4 4 ... | 24 |

Для упрощения отслеживания всей ситуации в процессе исследований рекомендуется выбирать вначале одинаковые затравочные числа $F_0 = F_1$, а уже потом – недостающие пары, если таковые вдруг окажутся.

Какую бы двоицу соседних чисел мы не взяли из любой строчки табл. 1 в качестве начальных условий, мы автоматически выходим на соответствующую периодичность по этой строке.

**2.** ***Аппетит приходит во время еды***. Посмотрим на описанную задачу чуть шире. Собственно, а почему отграничиваться только нумерологическим описанием? – Ничто нам не мешает попытаться проследить закономерности и в других системах исчисления.

В этом случае текущее число также получается как сумма двух предыдущих с последующим вычислением остатка от деления полученной суммы на модуль $m$.

Конечно, удобнее всего начать с самого младшего разряда (в его чистом виде).

Он абсолютный "донор". Изменение его состояния совершенно не зависит от поведения цифр (знаков) в старших разрядах.

Подчиняется он только принятому правилу (схеме) сложения и частично зависит от выбранных начальных условий.

Рассмотрим ход движения последней цифры в аддитивно-рекуррентной двухчленной последовательности (Фибоначчи) чисел, представленных в произвольной позиционной[4] системе счисления с основанием $m$.

Так, сравнительно недавно было представлено в энциклопедии[5], что в числах Фибоначчи последняя цифра (нулевой разрядности) при $m = 10$ образует периодическую последовательность с периодом $T = 60$. Примечательно, что данную закономерность впервые отмечал еще Лагранж в 1774 г. [11, с. 105].

Фактически, это продолжение нашей задачи, только уже по модулю 10, когда остается только цифра младшего разряда в чистом виде.

При аддитивном двухчленном суммировании две цифры (от 0 до 9) в разных сочетаниях и с учетом порядка их следования образуют уже ровно $99 = 10^2 - 1$ возможных комбинаций, за вычетом одной пары (0, 0), которая "бесплодна" (дает тривиальный ряд) и не может создать полноценную рекурсию с ненулевым рядом.

Рано или поздно, но по мере движения не позже 90 шагов рекурсивная схема счета опять выходит на исходную пару цифр $(a, b)$, после чего процесс периодически повторяется.

Понятно, что любая пара однозначных чисел может реализовать последовательность Фибоначчи, из которых период 60 с начальными условиями $(0, 1)$ охватывает только 60 пар.

Начало следования в самой последовательности не является принципиальным и может начинаться с любой пары чисел.

При этом порядок следования строго сохраняется.

Кроме того, могут быть и иные комбинации пар начальных условий (табл. 2), а не только традиционной (0, 1), общее число которых равно $3 + 4 + 12 + 20 + 60 = 99$.

При любой паре затравочных чисел мы обязательно выходим на одну из этих пяти последовательностей, одна из которых – самая длинная и базовая с периодом $T = 60$.

Периоды остальных рядов делят этот основной период $T$ (смотри ниже теорему 5).

Иначе говоря, сам период 60 должен делиться на 3, 4, 12 и 20, – так оно и есть!

*Таблица* 2

**Возможные пары начальных условий (по горизонтали) и соответствующего их "движения" в младшем разряде последовательностей Фибоначчи /по модулю 10/**

<table>
<tr><td colspan="30">60</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>8</td><td>3</td><td>1</td><td>4</td><td>5</td><td>9</td><td>4</td><td>3</td><td>7</td><td>0</td><td>7</td><td>7</td><td>4</td><td>1</td><td>5</td><td>6</td><td>1</td><td>7</td><td>8</td><td>5</td><td>3</td><td>8</td><td>1</td><td>9</td><td>0</td></tr>
<tr><td>9</td><td>9</td><td>8</td><td>7</td><td>5</td><td>2</td><td>7</td><td>9</td><td>6</td><td>5</td><td>1</td><td>6</td><td>7</td><td>3</td><td>0</td><td>3</td><td>3</td><td>6</td><td>9</td><td>5</td><td>4</td><td>9</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>7</td><td>2</td><td>9</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td><td>0</td><td>6</td><td>6</td><td>2</td><td>8</td><td>0</td><td></td><td></td><td>1</td><td>3</td><td>4</td><td>7</td><td>1</td><td>8</td><td></td><td></td><td>2</td><td>6</td><td></td><td></td><td>5</td><td>0</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>8</td><td>8</td><td>6</td><td>4</td><td>0</td><td>4</td><td>4</td><td>8</td><td>2</td><td>0</td><td></td><td></td><td>9</td><td>7</td><td>6</td><td>3</td><td>9</td><td>2</td><td></td><td></td><td>8</td><td>4</td><td></td><td></td><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="10">20</td><td colspan="2"></td><td colspan="6">12</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">4</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">3</td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

Заметим, что $(a, b)$ и $(b, a)$ – разные образования, хотя и дают в сумме одно число.

Но уже на следующем шаге указанное различие себя воочию проявляет.

Характерно, что данные закономерности являются свойством не столько чисел Фибоначчи, сколько самой идеи рекуррентного суммирования двух предшествующих состояний независимо от затравочных чисел.

Например, для 4-х шаговой периодичности имеем:

$$2+6=8, \quad 6+8=14 \to 4, \quad 8+4=12 \to 2, \quad 4+2=6, \ldots$$

Число 60 – главный период, а 3, 4, 12, 20 – это как бы (на языке музыки) "обертоны", которые кратны основному тону.

Примечательно, что $60/99 \approx 0{,}606$. А с учетом одной степени свободы, забираемой на одну пару назначаемых исходных данных, величина $60/98 \approx 0{,}612$, что находится в самой ближней зоне досягаемости числа $\phi = 0{,}618$.

С другой стороны, этот факт позволяет акцентировать особое внимание на нетривиальном статусе числа $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$. Что собственно было предметом изучения еще в древнем Вавилоне за две тысячи лет до н.э.

Вавилоняне знали шестидесятеричную и десятичную системы счета [12, с. 30; 13, с. 54–59] и основы той цифровой системы, которой под именем арабской мы пользуемся ныне.

Происхождение 60-ричной позиционной системы счисления (по целочисленному основанию 60) точно неизвестно.

Возможно, она связана с 12-ричной системой (60 = 5×12, где 5 – число пальцев на руке) или с тем, что окружность делится циркулем на шесть равных частей. При записи чисел использовались всего два знака: прямой клин ↓ для обозначения единиц и лежачий клин ← как обозначение десятков внутри 60-ричного разряда.

У вавилонян были систематические дроби, вроде наших десятичных, с основанием 60.

Им принадлежит деление окружности на 360 градусов, градуса – на 60 минут, минуты – на 60 секунд.

Аналогичным образом могут быть построены последовательности Фибоначчи и по и другим модулям или остаткам от деления целых чисел (табл. 3), что в целом приводит к такому феномену как арифметика циклически повторяемых чисел.

*Таблица* 3

**Периодические последовательности Фибоначчи по модулю $m$ = 5, 7, 8**

| $m = 5$: $5^2 - 1 = 20+4 = 24$ | |
|---|---|
| 1 1 2 3 0 3 3 1 4 0<br>4 4 3 2 0 2 2 4 1 0 | 20 |
| 1 3 4 2 | 4 |
| $m = 7$: $7^2 - 1 = 16\cdot3 = 48$ | |
| 1 1 2 3 5 1 6 0 6 6 5 4 2 6 1 0 | 16 |
| 2 2 4 6 3 2 5 0 5 5 3 1 4 5 2 0 | 16 |
| 3 3 6 2 1 3 4 0 4 4 1 5 6 4 3 0 | 16 |

| $m = 8$: $8^2 - 1 = 12\cdot4+6\cdot2+3 = 63$ | |
|---|---|
| 1 1 2 3 5 0 5 5 2 7 1 0 | 12 |
| 3 3 6 1 7 0 7 7 6 5 3 0 | 12 |
| 1 3 4 7 3 2 5 7 4 3 7 2 | 12 |
| 1 4 5 1 6 7 5 4 1 5 6 3 | 12 |
| 6 6 4 2 6 0 | 6 |
| 2 2 4 6 2 0 | 6 |
| 4 4 0 | 3 |

Весьма любопытно, что последовательности Фибоначчи по модулю $m = 13$ (табл. 4) составляют арифметическую основу сфайрологии[6] и сфайрологического аспекта познания.

Общее число возможных числовых пар-переходов составляет $28\cdot6 = 168 = 13^2 - 1$.

*Таблица* 4

**Циклическая структура Фибоначчи по модулю $m$ = 13**

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 0 | 8 | 8 | 3 | 11 | 1 | 12 | 0 | 28 |
| 12 | 12 | 11 | 10 | 8 | 5 | 0 | 5 | 5 | 10 | 2 | 12 | 1 | 0 | |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 10 | 3 | 0 | 3 | 3 | 6 | 9 | 2 | 11 | 0 | 28 |
| 11 | 11 | 9 | 7 | 3 | 10 | 0 | 10 | 10 | 7 | 4 | 11 | 2 | 0 | |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 7 | 6 | 0 | 6 | 6 | 12 | 5 | 4 | 9 | 0 | 28 |
| 9 | 9 | 5 | 1 | 6 | 7 | 0 | 7 | 7 | 1 | 8 | 9 | 4 | 0 | |
| 1 | 3 | 4 | 7 | 11 | 5 | 3 | 8 | 11 | 6 | 4 | 10 | 1 | 11 | 28 |
| 12 | 10 | 9 | 6 | 2 | 8 | 10 | 5 | 2 | 7 | 9 | 3 | 12 | 2 | |
| 1 | 4 | 5 | 9 | 1 | 10 | 11 | 8 | 6 | 1 | 7 | 8 | 2 | 10 | 28 |
| 12 | 9 | 8 | 4 | 12 | 3 | 2 | 5 | 7 | 12 | 6 | 5 | 11 | 3 | |
| 1 | 5 | 6 | 11 | 4 | 2 | 6 | 8 | 1 | 9 | 10 | 6 | 3 | 9 | 28 |
| 12 | 8 | 7 | 2 | 9 | 11 | 7 | 5 | 12 | 4 | 3 | 7 | 10 | 4 | |

Некоторые последовательности включены в энциклопедию Нейла Слоэна [8]: A082115(mod 03), A079343(mod 04), A082116(mod 05), A082117(mod 06), A105870(mod 07), A079344(mod 08), A004090(mod 09), A003893(mod 10), A105955(mod 11), A089911(mod 12), A105994(mod 13), A105995(mod 14), A106005(mod 15), A079345(mod 16), A105471(mod 100).

Сами значения периодов выделены самостоятельной последовательностью A096534.

Для двух рядов получены оригинальные производящие функции (H. Fischer, 2007):

$m = 3$: $G(x) = (x+x^2+2x^3+2x^5+2x^6+x^7)/(1-x^8)$;

$m = 5$: $G(x) = (x+x^2+2x^3+3x^4+3x^6+3x^7+x^8+4x^9+4x^{11}+4x^{12}+3x^{13}+2x^{14}+2x^{16}+2x^{17}+4x^{18}+x^{19})/(1-x^{20})$.

Достаточно большая коллекция последовательностей и соответствующие периоды представлены в работе [9]. Первые 500 периодов (по модулю от 2 до 500) показаны в приложении 3 (табл. П.3.1). Там же цветовой гаммой отмечены некоторые закономерности периодов числовых последовательностей Фибоначчи по модулю $m$.

**3.** ***Кружевная аналитика скрытых периодичностей в числах Фибоначчи.***

Приведем некоторые основные сведения для чисел Фибоначчи по модулю.

Они достаточно простые и основаны на широко известных положениях теории чисел.

Их представление позволяет теоретически обосновать ряд основополагающих выводов.

<u>Определение.</u> $F(\bmod m)$ – последовательность Фибоначчи по модулю $m$ или неотрицательные остатки от деления членов исходного ряда на $m$.

Напомним [14]: целые числа $a$ и $b$ называются сравнимыми по модулю $m$, если: их разность делится без остатка на $m$ или остатки при делении на $m$ одинаковы.

Записывается так: $a = b\,(\mathrm{mod}\ m)$. Слово "модуль" происходит от лат. modulus (мера).

<u>*Утверждение*</u> <u>1</u>. $F(\mathrm{mod}\, m)$ – является периодической последовательностью.

Это следует естественным образом из двух следующих положений:

– при взятии модуля $m$ возможно только $m^2 - 1$ пар остатков, поэтому некоторые пары в процессе реализации $F(\mathrm{mod}\, m)$ рано или поздно должны повториться;

– любые два элемента $F(\mathrm{mod}\, m)$ полностью определяют всю последовательность, поскольку два элемента ряда дают в рекурсии однозначно следующий третий элемент.

Одно из доказательств периодичности приведено в приложении 2.

Обозначим через $T = T(m)$ период числового ряда $F(\mathrm{mod}\, m)$.

Тогда для пары начальных условий $(F_0, F_1) = (0, 1)$ очевидны два простых следствия:

– $F_T = 0(\mathrm{mod}\, m)$ и $F_{T+1} = 1(\mathrm{mod}\, m)$;

– если $F_k = 0(\mathrm{mod}\, m)$ и $F_{k+1} = 1(\mathrm{mod}\, m)$, то $T\,|\,k$ ($T$ делит $k$).

Напомним, если для некоторой пары целых чисел $a$ и $b$ существует такое целое число $q$, что $bq = a$, то говорят, что число <u>$a$ делится нацело на $b$</u> или, что <u>$b$ делит $a$</u>, то есть $b|a$.

<u>*Теорема*</u> <u>1</u>. Для любого целого $m$ найдется бесконечно много чисел Фибоначчи, делящихся на $m$.

Доказательство. Исходная пара начальных условий (0, 1) в последовательности Фибоначчи снова возникнет в $F(\mathrm{mod}\, m)$. Но так как $F(\mathrm{mod}\, m)$ является периодическим рядом, то пара (0,1) появится в $F(\mathrm{mod}\, m)$ бесконечное число раз.

<u>*Теорема*</u> <u>2</u>. Для $m > 2$, период $T(m)$ – четный.

Доказательство. Пусть $T = T(m)$. Положим для определенности $(F_0\,, F_1) = (0, 1)$.

Тогда $F_1 = F_{1+T} = F_{1-T} = F_{T-1} = 1$ или $F_{-(T-1)} = F_{T-1}$.

С учетом известного в теории чисел Фибоначчи соотношения $F_{-k} = (-1)^{k+1}F_k$, равенство $F_{-(T-1)} = F_{T-1}$ обеспечивается только для нечетных значений $k = T-1$, откуда и следует четность $T = T(m)$.

<u>*Утверждение*</u> <u>2</u>. Если $F_v = F_u = 0(\mathrm{mod}\ m)$, то $F_{v+u} = 0(\mathrm{mod}\ m)$.

Непосредственно следует из известного равенства $F_{v+u} = F_{v-1}F_u + F_vF_{u+1}$.

<u>*Утверждение*</u> <u>3</u>. Если $a|b$ ($a$ делит $b$), то $T(a)|T(b)$.

Пример. $9|54$, $T(9) = 24$ и $T(54) = 72$.

Примечательно, что $54/9 = 6$, в то же время $72 / 24 = 3$.

<u>*Утверждение*</u> <u>4</u>. Пусть $m$ разложимо на простые сомножители $p_i^{\alpha_i}$. Тогда $T(m) = \mathrm{lcm}\left[T\left(p_i^{\alpha_i}\right)\right]$.

Здесь через $\mathrm{lcm}(\cdot)$ обозначено НОК – наименьшее общее кратное (см. приложение).

Примеры. $180 = 3^2\cdot 4\cdot 5$. T(9) = 24, T(4) = 6, T(5) = 20. lcm[24, 6, 20] = 120 = T(180).

60=3·4·5. T(3) = 8, T(4) = 6, T(5) = 20, lcm(8, 6, 20) = 120, то есть T(60) = 120.

Этот означает, что если мы найдем $T(p)$ для простых чисел $p$, то мы потом сможем определить период $T(m)$ для любого заданного $m$.

Следствие 1. Для четных модулей $m = 2k$ периоды $T(m)$ кратны 3.

То есть всегда верно: $3\,|\,T(2k)$.

Действительно, если модуль четный, то период $T(m)$ должен быть кратен $T(2) = 3$.

Следствие 2. Подобно последовательности $F(\mathrm{mod}\ 2) = (1, 1, 0)$, любой "четно-модульный" ряд $T(2k)$ также может содержать самый короткий частный подпериод $(k, k, 0)$.

*Утверждение* 5. Для простого числа $p$ с целой степенью $\alpha > 0$ верно: $T(p^{\alpha}) = p^{\alpha-1}\cdot T(p)$.
Пример. $T(27) = T(3^3) = 3^2\cdot T(3) = 9\cdot 8 = 72$;  $T(81) = T(3^4) = 3^3\cdot T(3) = 27\cdot 8 = 216$.

Совместное применение двух последних утверждений приводит к формуле:

$$T(m) = \mathrm{lcm}\left[p_i^{\alpha_i - 1} T(p_i)\right].$$

Пример. $T(360) = T(2^3\cdot 3^2\cdot 5) = \mathrm{lcm}[2^2\cdot T(2),\ 3\cdot T(3),\ T(5)] = \mathrm{lcm}[4\cdot 3,\ 3\cdot 8,\ 20] = 120$.
$T(1000) = T(2^3\cdot 5^3) = \mathrm{lcm}[2^2\cdot T(2),\ 5^2\cdot T(5)] = \mathrm{lcm}[4\cdot 3,\ 25\cdot 20] = 1500$.

Явных формул для $T(p)$ не выявлено, но существуют некоторые закономерности:
– если $p = 5n \pm 1$, то $T(p) \mid (p–1)$,
например, $T(71) = 70$ и $1\cdot 70 = 71–1$ или $T(139) = 46$ и $3\cdot 46 = 139 – 1$;
– если $p = 5n \pm 2$, то $T(p) \mid (2p+2)$,
например, $T(73) = 148$ и $148 = 2\cdot 73 + 2$ или $T(47) = 32$ и $32\cdot 3 = 2\cdot 47 + 2$.

Для самих чисел Фибоначчи и чисел Люка $L_n = F_{n–1} + F_{n+1}$ справедливы следующие интересные теоремы [9]:

*Теорема* 3. $n \geq 5$: для $n$ четного – $T(F_n) = 4n$, для $n$ нечетного – $T(F_n) = 2n$.
Примеры. $T(F_{12}) = T(144) = 2\cdot 12 = 24$; $T(F_{11}) = T(89) = 4\cdot 11 = 44$.

*Теорема* 4. $n \geq 3$: для $n$ четного – $T(L_n) = 2n$, для $n$ нечетного – $T(L_n) = 4n$.
Примеры. $T(L_{12}) = T(322) = 4\cdot 12 = 48$; $T(L_{11}) = T(199) = 2\cdot 11 = 22$.

*Теорема* 5. Последовательность $G(\mathrm{mod}\, m)$ с произвольными целыми начальными условиями $(G_0, G_1)$ имеет период ("гармонику") $h(m)$, кратный $T = T(m)$, то есть $h(m) \mid T$.

Действительно, для $(F_0, F_1) = (0, 1)$ верно $(F_{T–1}, F_T, F_{T+1}) = (1,\ 0, 1)$. А согласно свойствам чисел Фибоначчи [15] $G_T = F_{T–1}G_0 + F_TG_1$ и $G_{T+1} = F_TG_0 + F_{T+1}G_1$, откуда следует $G_T = G_0(\mathrm{mod}\, 9)$ и $G_{T+1} = G_1(\mathrm{mod}\, 9)$. Поэтому ряд $G(\mathrm{mod}\, m)$ обязательно повторяется (один или несколько раз) в пределах блока длиной $T(m)$. Из этого мы можем заключить: $h(m) \mid T$.

Для чисел, оканчивающихся на 9, нами также установлена теорема:
*Теорема* 6. Если $p = 9(\mathrm{mod}\, 10)$, то $T(p) \mid (p – 1)$.
Другими словами, если модуль является простым числом, содержащим на конце 9, то период делит уменьшенный на единицу модуль.

**4. *Восстановление статус-кво в периодичности Num-суммы чисел Фибоначчи.***

а) Сначала рассмотрим последовательность $F(\mathrm{mod}\, 3)$: 0 1 1 2 0 2 2 1.
Ее период равен максимально возможному значению $T(3) = 3^2 – 1 = 8$.

Больше 8 он просто не может быть, так как всего имеется $m^2$ пар остатков за вычетом единицы, соответствующей запрещенной паре (0, 0), не способной к генерации чисел по аддитивной двухчленной рекурсии.

Но и меньше 8 период тоже никак не получается (простым перебором) чисто физически, поскольку это одновременно минимальное количество шагов, необходимых на "раскрутку" периодичности.

б) Непосредственно из утверждения 5 следует, что $T(9) = T(3^2) = 3^1\cdot T(3) = 3\cdot 8 = 24$.
Это и объясняет, почему Num-сумма чисел Фибоначчи имеет периодичность 24.
Формализованное доказательство имеет вид:

$$F(\mathrm{mod}\, 3) = (0\ 1\ 1\ 2\ 0\ 2\ 2\ 1) \rightarrow T(3) = 8;\quad T(9) = T(3^2) = 3\cdot T(3) = 24.$$

Можно обосновать и по-другому.

В описании числовой последовательности в энциклопедии Н.Слоэна [8] A007887 приведена формула (O.Wittenberg, 2004) для $F(\mathrm{mod}\, 9)$ – чисел Фибоначчи по модулю 9:

$$F_{k+24} = F_k + 9\cdot(5152\cdot F_{k+1} + 3184\cdot F_k).$$

Но если к числу $F_k$ прибавить другое число, умноженное на 9, то его Num-сумма не изменяется, откуда следует $N(F_{k+24}) = N(F_k)$, что эквивалентно периодичности $T(9) = 24$.

Таким образом, обоснование периодичности $T(9) = 24$ для $F(\mathrm{mod}\,9)$ можно считать законченным и полностью аргументированным.

Что хотелось бы добавить в этой связи? – Сегодня трудно говорить, как человек пришел к идее "модульных" преобразований чисел Фибоначчи. Однако нам представляется, что не последнюю, а возможно и главную роль здесь сыграла именно теософская редукция или Num-суммирование чисел, которые в последующем подтолкнули математиков расширить это действо с 9 на произвольное целое значение модуля $m \geq 2$.

**5. *"Переходной возраст" или обобщение задачи.*** Безусловный интерес представляет периодическое "движение" нескольких младших разрядов. Подобный процесс может формироваться, в частности, $k$-разрядными сумматорами на основе регистров сдвига с отбрасыванием цифр старших разрядов.

Расширяя поле исследований, установлено, что описанными выше свойствами обладают и более старшие разряды (табл. 5):

*Таблица* 5

**Параметры двухчленных *k*-разрядных сумматоров по модулю $m = 10^k$**

| Максим. разряд, $k$ | Модуль, $m$ | Период, $T_k$ | Число вариантов |
|---|---|---|---|
| 1 | $10^1$ | 60 | 99 |
| 2 | $10^2$ | 300 | $10^2\cdot 99$ |
| 3 | $10^3$ | $15\cdot 10^2$ | $\sim 10^6$ |
| 4 | $10^4$ | $15\cdot 10^3$ | $\sim 10^8$ |
| . . . . . . . . . . . . . . . . . . | | | |
| $k$ | $10^k$ | $15\cdot 10^{k-1}$ | $\sim 10^{2k}$ |

Кстати, похожие результаты (до 5 цифр) были известны и ранее[7].

То есть последняя цифра повторяется с периодом 60, последние две цифры – с периодом 300, последние три – с периодом 1500 и т.д. В общем случае показано [11, с. 105–106], что последние $k \geq 3$ цифры имеют период $15\cdot 10^{k-1}$.

Поскольку старший разряд кратен младшему, то периодичностью обладает не только старший разряд, но и все число, составленное из последующих разрядов.

Например, $F_{21} = \ldots 10946$ и $F_{15021} = \ldots 10946$, $F_{100} = \ldots 15075$ и $F_{15100} = \ldots 15075$.

По сути, речь идет о $k$-значных числах, образуемых из подмножества младших разрядов по аддитивному алгоритму Фибоначчи с отбрасыванием старших разрядов.

Возможно, при этом уместно говорить о $k$-значных псевдочислах Фибоначчи по модулю $m$, не обязательно равному 10 (прилож. 3, табл. П.3.2).

Трудно судить о каком-либо практическом применении указанных свойств, поскольку сами числа Фибоначчи при этом записываются невообразимым количеством цифр. Так, число $F_{15100}$ имеет 3155 цифр и т.п.

Тем не менее, даже такого рода периодичности в иррациональных числах (не всегда имеющих свои периодичности коэффициентов при их разложении в цепные дроби) представляют определенный смысл и математико-академическое значение.

**6. "*Зацикленные*" *циклы.*** Анализ некоторых периодических последовательностей Фибоначчи по модулю $m$ показывает, что суммы значений ряда в полупериоды равны самим модулям $(F_t + F_{t+T/2})(\mathrm{mod}\, m) = m$.

Изначально это свойство представлялось нам универсальным для произвольных значений $m$, но проведенные расчеты показали (прилож. 3, табл. П.3.3), что это далеко не так. Более того, из представленной таблицы не просматриваются явно выраженные закономерности. Во всяком случае, нам не удалось обнаружить циклические или иные подобные свойства, однако это нисколько не означает их полное отсутствие.

**7.** ***Не было счастья, да несчастье помогло...*** Предыдущий анализ показывает, что с увеличением разрядности резко возрастают и периоды числовых последовательностей.

Это наблюдение в свое время стало основой решения задач по генерации в вычислительных системах псевдослучайных чисел (ПСЧ), которые широко используются в самых разных приложениях современной информатики (метод Монте-Карло, имитационное модулирование, криптография и др.).

Одно из первых предложений связано с получением ПСЧ как значения дробной части многочлена первой степени (линейный конгруэнтный генератор)

$$x_t = (a \cdot x_{t-1} + b)(\mathrm{mod}\ m).$$

где $a$ и $b$ – натуральные числа-константы, $y_0$ – исходное порождающее число.

Эти три величины образуют ключ.

Значение модуля $m$ обычно устанавливается равным $2^k$, где $k$ – длина машинного слова в битах, что позволяет избавиться от относительно медленной операции приведения по модулю.

Если $t$ пробегает значения натурального ряда чисел, то поведение $x_t$ выглядит довольно хаотичным, образуя псевдослучайные числа с периодом повторения $T$.

Линейный конгруэнтный метод дает максимальную длину $T = m$ если [16]:

- приращение $b$ и модуль $m$ взаимно просты, то есть НОД$(b, m) = 1$;
- $a - 1$ кратно $p$ для всех простых $p$ – делителей $m$;
- $a - 1$ кратно 4, если $m$ кратно 4, то есть $a(\mathrm{mod}\ 4) = 1$.

Понятно, что никакой детерминированный алгоритм не может генерировать полностью случайные числа и дает только аппроксимацию их некоторых свойств.

По мере повышения требований к качеству случайных чисел получило развитие семейство фибоначчиевых алгоритмов[8].

Один из подобных генераторов основан на итеративной формуле:

$$x_k = \Delta_k + \mathbf{1}(-\Delta_k),$$

где $\Delta_k = x_{k-a} - x_{k-b}$, $\mathbf{1}(t)$ – единичная функция (Хевисайда), равная $\{1,\ t \geq 0;\ \ 0,\ t < 0\}$.

Рекомендуются следующие значения лагов: $(a, b) = (55, 24)$, $(17, 5)$ или $(97, 33)$.

Получаемые случайные числа обладают хорошими статистическими свойствами.

Все биты случайного числа равнозначны по вероятностным характеристикам.

Период датчика оценивается по формуле: $T = (2^{\max(a,\, b)} - 1) \cdot 2^k$, где $k$ – число битов в мантиссе вещественного числа.

Для старта фибоначчиевому алгоритму требуется $\max(a, b)$ случайных чисел, которые могут быть сформированы линейным конгруэнтным генератором.

**Резюме:**

1. Нумерологическое суммирование чисел Фибоначчи, эквивалентное операнду (mod 9), – одно из бесконечного множества "свертываний" данных рядов по модулю $m$.
2. Аддитивные двухчленные последовательности по модулю $m$ периодичны и имеют четные периоды.
3. Конкретная конфигурация и периодичность следования разрядных цифр зависят от основания позиционной системы счисления.

4. Теософская редукция (Num-суммирование) чисел Фибоначчи эквивалентна операнду по модулю $m = 9$ и приводит к периоду: $T(9) = T(3^2) = 3 \cdot T(3) = 3 \cdot 8 = 24$.

**Литература.**


1. *Василенко С.Л.* Периодичность теософской редукции для линейных возвратных последовательностей // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.15368, 27.06.2009. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321130.htm.
2. *Корнеев А.А.* Структурные тайны золотого ряда // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14359, 21.04.2007. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321047.htm.
3. *Сергиенко П.Я.* Об одном интересном математическом открытии... (Реплика) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14415, 24.05.2007. – http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02321054.htm.
4. *Сергиенко П.Я.* Начала математики гармонии (Русский проект). Всеобщий принцип гармонии, его общие и частные проявления в началах математики. (Продолжение 1) // Академия Тринитаризма. – М.: Эл. № 77-6567, публ.14322, 29.03.2007. – http://trinitas.ru/rus/doc/0012/001b/00121608.htm.
5. *Wall D.D.* Fibonacci Series Modulo *m* // American Mathematical Monthly. – Vol. 67 (1960). – P. 525–532.
6. *Shah A.P.* Fibonacci Sequence Modulo *m* // Fibonacci Quarterly. – Vol. 6 (1968). – P. 139–141.
7. *Wrench J.W.* Review of B.H. Hannon and W.L. Morris. Tables of Arithmetical Functions Related to the Fibonacci Numbers // Math. Comput. **– 23**, 459–460, 1969.
8. *Sloane N.J.A.* The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. – http://www.research.att.com/~njas/sequences.
9. *Renault M.* The Fibonacci Sequence Modulo *m*. – 1996. – http://www.math.temple.edu/~renault/fibonacci/fib.html.
10. *Kebo L., Wang Jun.* k-stepFibonacci sequence modulo m // Util. Math. 2006, 71. – P. 169–177.
11. *Livio M.* The Golden Ratio: The Story of Phi, the World's Most Astonishing Number. – New York: Broadway Books, 2002.
12. *Депман И.Я.* История арифметики: 2-е изд., испр. – М.: Просвещение, 1965. – 418 с.
13. *Ван дер Варден.* Пробуждающаяся наука. Математика древнего Египта, Вавилона и Греции: Пер. с голланд. И.Н. Веселовского. – М.: Физматлит, 1959. – 462 с.
14. *Виленкин Н.* Сравнения и классы вычетов // Квант. – 1978. – № 10. – С. 4–8. – http://kvant.mirror1.mccme.ru.
15. *Vajda S.* Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section: Theory and Applications. – Dover Books on Mathematics, 2007.
16. *Кнут Д.* Искусство программирования. Том 2. Получисленные методы: 3-е изд. – М.: Вильямс, 2007. – 832 с.

*Приложение* 1

## Некоторые сведения из теории чисел

<u>*Наименьшее общее кратное*</u> (НОК) двух целых чисел $a$ и $b$ есть наименьшее натуральное число, которое делится на $a$ и $b$. Обозначается одним из следующих способов: НОК$(a, b)$ или $\mathrm{lcm}(a, b)$ от англ. *least common multiple*.

Для вычисления НОК исходные числа обычно раскладываются на простые множители, после чего к одному из таких разложений приписываются множители, недостающие у него по сравнению с разложением остальных чисел.

В общем случае разложение чисел на простые множители – очень трудоемкая вычислительная задача.

Существуют способы нахождения НОК и без такого разложения, в частности, по формуле: $\mathrm{lcm}(a, b) = a{\cdot}b/\mathrm{gcd}(a, b)$, где $\mathrm{gcd}(a, b)$ – их наибольший делитель чисел $a$ и $b$, который может быть эффективно вычислен при помощи известного алгоритма Евклида и др.

Под <u>*позиционной системой счисления*</u> обычно понимается $b$-ричная система счисления, которая определяется целым числом $b > 1$, называемым основанием системы счисления.

Целое число $x$ в $b$-ричной системе счисления представляется в виде конечной линейной комбинации степеней числа $b$: $x = \sum_{k=0}^{n-1} a_k b^k$, где $a_k$ – целые числа (цифры), удовлетворяющие неравенству $0 \le a_k \le b-1$.

Степень $b^k$ в такой записи называется весовым коэффициентом разряда.

Старшинство разрядов и соответствующих им цифр определяется значением показателя $k$ (номером разряда).

Для ненулевого числа $x$ требуют, чтобы старшая цифра $a_{n-1}$ в $b$-ричном представлении $x$ была также ненулевой.

*Приложение* 2

## Периодичность последовательности Фибоначчи по модулю

(Числа Фибоначчи и их быстрое вычисление, 2008. – http://e-maxx.ru/algo/fibonacci_numbers)

Рассмотрим последовательность Фибоначчи $F_i$ по некоторому модулю $m$. Докажем, что она является периодичной, и причем период начинается с заданного числа $F_1 = 1$.

Докажем это от противного. Рассмотрим $n = m^2$ пар чисел Фибоначчи, взятых по модулю $m$: $(F_1, F_2)$, $(F_2, F_3)$, ..., $(F_n, F_{n+1})$

Поскольку по модулю $m$ может быть только $m^2 - 1$ различных пар (за вычетом одной нулевой), то среди этой последовательности найдется как минимум две одинаковые пары.

Выберем среди них две одинаковые пары с наименьшими номерами $(F_a, F_{a+1})$ и $(F_b, F_{b+1})$.

Докажем, что $a = 1$.

Действительно, в противном случае предыдущими для этих пар являются пары $(F_{a-1}, F_a)$ и $(F_{b-1}, F_b)$, которые, по свойству чисел Фибоначчи, также будут равны между собой.

Однако это противоречит тому, что мы выбрали совпадающие пары с наименьшими номерами, что и требовалось доказать.

*Приложение* 3

*Таблица* П.3.1

**Значения периодов Пизано (последовательностей Фибоначчи по модулю *m*)**

| *m* | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **0** | 0 | 0 | 3 | 8 | 6 | 20 | 24 | 16 | 12 | **24** |
| **1** | **60** | 10 | 24 | 28 | 48 | 40 | 24 | 36 | 24 | 18 |
| **2** | 60 | 16 | 30 | 48 | 24 | 100 | 84 | 72 | 48 | 14 |
| **3** | 120 | 30 | 48 | 40 | 36 | 80 | 24 | 76 | 18 | 56 |
| **4** | 60 | 40 | 48 | 88 | 30 | 120 | 48 | 32 | 24 | 112 |
| **5** | 300 | 72 | 84 | 108 | 72 | 20 | 48 | 72 | 42 | 58 |
| **6** | 120 | 60 | 30 | 48 | 96 | 140 | 120 | 136 | 36 | 48 |
| **7** | 240 | 70 | 24 | 148 | 228 | 200 | 18 | 80 | 168 | 78 |
| **8** | 120 | 216 | 120 | 168 | 48 | 180 | 264 | 56 | 60 | 44 |
| **9** | 120 | 112 | 48 | 120 | 96 | 180 | 48 | 196 | 336 | 120 |
| **10** | 300 | 50 | 72 | 208 | 84 | 80 | 108 | 72 | 72 | 108 |
| **11** | 60 | 152 | 48 | 76 | 72 | 240 | 42 | 168 | 174 | 144 |
| **12** | 120 | 110 | 60 | 40 | 30 | 500 | 48 | 256 | 192 | 88 |
| **13** | 420 | 130 | 120 | 144 | 408 | 360 | 36 | 276 | 48 | 46 |
| **14** | 240 | 32 | 210 | 140 | 24 | 140 | 444 | 112 | 228 | 148 |
| **15** | 600 | 50 | 36 | 72 | 240 | 60 | 168 | 316 | 78 | 216 |
| **16** | 240 | 48 | 216 | 328 | 120 | 40 | 168 | 336 | 48 | 364 |
| **17** | 180 | 72 | 264 | 348 | 168 | 400 | 120 | 232 | 132 | 178 |
| **18** | 120 | 90 | 336 | 120 | 48 | 380 | 120 | 180 | 96 | 144 |
| **19** | 180 | 190 | 96 | 388 | 588 | 280 | 336 | 396 | 120 | 22 |
| **20** | 300 | 136 | 150 | 112 | 72 | 40 | 624 | 48 | 168 | 90 |
| **21** | 240 | 42 | 108 | 280 | 72 | 440 | 72 | 240 | 108 | 296 |
| **22** | 60 | 252 | 456 | 448 | 48 | 600 | 228 | 456 | 72 | 114 |
| **23** | 240 | 80 | 84 | 52 | 168 | 160 | 174 | 312 | 144 | 238 |
| **24** | 120 | 240 | 330 | 648 | 60 | 560 | 120 | 252 | 60 | 168 |
| **25** | 1500 | 250 | 48 | 240 | 768 | 360 | 384 | 516 | 264 | 304 |
| **26** | 420 | 168 | 390 | 176 | 120 | 540 | 144 | 88 | 408 | 268 |
| **27** | 360 | 270 | 72 | 112 | 276 | 100 | 48 | 556 | 138 | 120 |
| **28** | 240 | 56 | 96 | 568 | 210 | 360 | 420 | 80 | 48 | 612 |
| **29** | 420 | 392 | 444 | 588 | 336 | 580 | 228 | 360 | 444 | 336 |
| **30** | 600 | 176 | 150 | 200 | 72 | 60 | 72 | 88 | 240 | 208 |
| **31** | 60 | 310 | 168 | 628 | 948 | 240 | 78 | 636 | 216 | 70 |
| **32** | 480 | 72 | 48 | 36 | 216 | 700 | 984 | 216 | 120 | 32 |
| **33** | 120 | 110 | 168 | 456 | 336 | 680 | 48 | 676 | 1092 | 152 |
| **34** | 180 | 30 | 72 | 784 | 264 | 240 | 348 | 232 | 168 | 174 |
| **35** | 1200 | 504 | 240 | 236 | 696 | 140 | 132 | 144 | 534 | 358 |
| **36** | 120 | 342 | 90 | 440 | 336 | 740 | 120 | 736 | 48 | 120 |
| **37** | 1140 | 432 | 120 | 748 | 180 | 1000 | 96 | 28 | 144 | 378 |
| **38** | 180 | 256 | 570 | 768 | 192 | 80 | 1164 | 264 | 588 | 388 |
| **39** | 840 | 144 | 336 | 520 | 396 | 780 | 120 | 796 | 66 | 144 |
| **40** | 600 | 200 | 408 | 420 | 150 | 1080 | 336 | 380 | 72 | 408 |
| **41** | 120 | 552 | 624 | 464 | 48 | 840 | 336 | 184 | 90 | 418 |
| **42** | 240 | 84 | 42 | 96 | 108 | 900 | 840 | 240 | 72 | 280 |
| **43** | 1320 | 430 | 72 | 868 | 240 | 280 | 108 | 144 | 888 | 438 |
| **44** | 60 | 336 | 252 | 888 | 456 | 220 | 1344 | 296 | 96 | 448 |
| **45** | 600 | 40 | 228 | 200 | 456 | 560 | 72 | 916 | 114 | 72 |
| **46** | 240 | 46 | 240 | 928 | 168 | 120 | 156 | 936 | 168 | 272 |
| **47** | 480 | 632 | 348 | 440 | 312 | 900 | 144 | 216 | 714 | 478 |
| **48** | 240 | 532 | 240 | 48 | 330 | 980 | 648 | 976 | 60 | 328 |
| **49** | 1680 | 490 | 120 | 252 | 252 | 120 | 120 | 560 | 168 | 498 |

*Примечание*: xxx → $T = m$; xxx → $T = 2m$; xxx → $T = 2m + 2$; xxx → $T = m - 1$.

Обозначение $m$: по горизонтали – единицы, по вертикали десятки.

Например, на пересечении 4-й строки и 2-го столбца ($m = 42$) находится $T(42) = 48$.

*Таблица* П.3.2

**Периоды *k*-значных псевдочисел Фибоначчи по модулю *m***

| *m* | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | ***k* = 1** | | | | | |
| **0** | 0 | 0 | 3 | 8 | 6 | 20 | 24 | 16 | 12 | 24 |
| **1** | 60 | 10 | 24 | 28 | 48 | 40 | 24 | 36 | 24 | 18 |
| **2** | 60 | 16 | 30 | 48 | 24 | 100 | 84 | 72 | 48 | 14 |
| **3** | 120 | 30 | 48 | 40 | 36 | 80 | 24 | 76 | 18 | 56 |
| **4** | 60 | 40 | 48 | 88 | 30 | 120 | 48 | 32 | 24 | 112 |
| **5** | 300 | 72 | 84 | 108 | 72 | 20 | 48 | 72 | 42 | 58 |
| **6** | 120 | 60 | 30 | 48 | 96 | 140 | 120 | 136 | 36 | 48 |
| **7** | 240 | 70 | 24 | 148 | 228 | 200 | 18 | 80 | 168 | 78 |
| **8** | 120 | 216 | 120 | 168 | 48 | 180 | 264 | 56 | 60 | 44 |
| **9** | 120 | 112 | 48 | 120 | 96 | 180 | 48 | 196 | 336 | 120 |
| | | | | | ***k* = 2** | | | | | |
| **0** | 0 | 0 | 0 | 24 | 24 | 100 | 24 | 112 | 96 | 216 |
| **1** | 300 | 110 | 24 | 364 | 336 | 600 | 384 | 612 | 216 | 342 |
| **2** | 600 | 336 | 330 | 1104 | 96 | 2500 | 1092 | 1944 | 336 | 406 |
| **3** | 600 | 930 | 1536 | 1320 | 612 | 2800 | 216 | 2812 | 342 | 2184 |
| **4** | 2400 | 1640 | 336 | 3784 | 1320 | 5400 | 1104 | 1504 | 384 | 5488 |
| **5** | 7500 | 1224 | 2184 | 5724 | 1944 | 1100 | 672 | 1368 | 1218 | 3422 |
| **6** | 600 | 3660 | 930 | 3024 | 6144 | 9100 | 1320 | 9112 | 1224 | 1104 |
| **7** | 8400 | 4970 | 864 | 10804 | 8436 | 15000 | 1368 | 6160 | 2184 | 6162 |
| **8** | 9600 | 17496 | 4920 | 13944 | 336 | 15300 | 11352 | 4872 | 5280 | 3916 |
| **9** | 5400 | 1456 | 1104 | 3720 | 4512 | 17100 | 1536 | 19012 | 16464 | 11880 |
| | | | | | ***k* = 3** | | | | | |
| **0** | 0 | 0 | 0 | 72 | 96 | 500 | 72 | 784 | 768 | 1944 |
| **1** | 1500 | 1210 | 288 | 4732 | 2352 | 9000 | 6144 | 10404 | 1944 | 6498 |
| **2** | 12000 | 7056 | 7260 | 25392 | 2304 | 62500 | 14196 | 52488 | 4704 | 11774 |
| **3** | 9000 | 28830 | 49152 | 43560 | 10404 | 98000 | 7776 | 104044 | 12996 | 85176 |
| **4** | 96000 | 67240 | 7056 | 162712 | 58080 | 243000 | 25392 | 70688 | 18432 | 268912 |
| **5** | 187500 | 20808 | 113568 | 303372 | 52488 | 60500 | 37632 | 25992 | 70644 | 201898 |
| **6** | 36000 | 223260 | 57660 | 190512 | 393216 | 591500 | 43560 | 610504 | 83232 | 76176 |
| **7** | 294000 | 352870 | 62208 | 788692 | 312132 | 1125000 | 103968 | 474320 | 85176 | 486798 |
| **8** | 768000 | 1417176 | 201720 | 1157352 | 14112 | 1300500 | 488136 | 423864 | 464640 | 348524 |
| **9** | 243000 | 132496 | 50784 | 345960 | 212064 | 1624500 | 147456 | 1844164 | 806736 | 1176120 |

*Примечание*:

Обозначение *m*: по горизонтали – единицы, по вертикали десятки.

Например, для $k = 3$ на пересечении 2-й строки и 4-го столбца ($m = 24$) находится $T(24) = 2304$.

*Таблица* П.3.3

**Модули, для которых суммы значений ряда в полупериоды равны самим модулям**

$(F_t + F_{t+T/2})(\mathrm{mod}\ m) = m$

| *m* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | | | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | |
| 30 | | | | | 1 | | | 1 | | | | 1 | | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | | | | |
| 60 | | 1 | | | | 1 | | 1 | | | | | | 1 | 1 | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | | | 1 |
| 90 | | | | | 1 | | | 1 | 1 | | | | | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | | | | 1 | | | | | | |
| 120 | | | 1 | 1 | | 1 | | 1 | | 1 | 1 | | | | 1 | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | 1 |
| 150 | | | | | | | | 1 | | | | 1 | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | 1 | 1 | | | 1 | | | | | 1 | |
| 180 | | | | | | 1 | | | | | | | | 1 | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | | | 1 | | | |
| 210 | | | | | 1 | | | | 1 | | | 1 | | 1 | | | 1 | 1 | | | | | | 1 | | | | | | |
| 240 | | 1 | | 1 | | | 1 | | | 1 | 1 | | | | 1 | | | 1 | 1 | | | | | 1 | | 1 | | | | 1 |
| 270 | | | | | 1 | | | 1 | | | | 1 | | 1 | | | | | | 1 | | | | 1 | | | | | 1 | |
| 300 | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | 1 | 1 | | | 1 | | | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | | |
| 330 | | | | | 1 | | | 1 | 1 | | | | | 1 | | | 1 | 1 | | | | | | 1 | | | | | | |
| 360 | | | | | | 1 | | 1 | | 1 | 1 | | | 1 | | | | | | | | | | 1 | | | 1 | 1 | | 1 |
| 390 | | | | | 1 | | | 1 | | | | 1 | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | | |
| 420 | | 1 | | | | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | 1 | | 1 | 1 | | | 1 |
| 450 | | | | | 1 | | | 1 | | | | | | 1 | | | 1 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 480 | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | 1 | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | 1 | | | | | | |
| 510 | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | 1 | | | 1 | 1 | | | | | | | | 1 | |
| 540 | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | | 1 | | | 1 | | | | | 1 | 1 | | 1 | 1 | | | 1 |
| 570 | | | | | | | | 1 | 1 | | | | | | | | 1 | 1 | | | | | | 1 | | | | | | |
| 600 | | 1 | | 1 | | | | 1 | | | 1 | | | 1 | 1 | | | 1 | | | | | | | | 1 | 1 | | | 1 |
| 630 | | | | | 1 | | | | | | | 1 | 1 | 1 | | | | 1 | | | 1 | | | 1 | | | | | | |
| 660 | | 1 | | | | | | | | | | | | 1 | 1 | | | 1 | | | | 1 | | 1 | | 1 | 1 | | | 1 |
| 690 | | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 720 | | 1 | | | | | | 1 | | 1 | 1 | | | 1 | 1 | | | | 1 | | | | | 1 | | 1 | 1 | 1 | | |
| 750 | | | | | | | | 1 | | | | 1 | | | | | 1 | | | 1 | | | | 1 | 1 | | | | 1 | |
| 780 | | | | | | 1 | | 1 | | | | | | 1 | 1 | | | 1 | | | | | 1 | | | | | | | |
| 810 | | | | | | | | | 1 | | | 1 | | 1 | | | | 1 | | 1 | | | | | | | | | | |
| 840 | | | 1 | 1 | | 1 | | | | 1 | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | | | | 1 | | 1 | 1 | | | |
| 870 | | | | | | | | 1 | | | | 1 | | 1 | | | 1 | 1 | | | 1 | | | | | | | | 1 | |
| 900 | | 1 | | | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | 1 | 1 | | | 1 |
| 930 | | | | | 1 | | | 1 | | | | | | | | | | 1 | | 1 | | | | 1 | | | | | | |
| 960 | | | 1 | 1 | | 1 | | 1 | | | 1 | | | | 1 | | | 1 | 1 | | | | | 1 | | 1 | | | | |
| 990 | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | |

*Примечание*: результаты сгруппированы по 30 значений в строке с нарастанием вниз по вертикали

[1] Закон красоты. Диспут. 17.05.2007. – http://www.a3d.ru/disput/45/1711.

[2] Рунический алфавит является отражением горизонтальной и вертикальной организации пространства, а общее число этих знаков 24=3·8. Восьмичленность рунических отделов указывает, вероятно, на горизонтальное деление пространства на 8 сторон света. Рунический алфавит – это некое сакральное пространство, в котором первая буква символизирует жизнь, а последняя – смерть // Руны старшие. – http://www.rbardalzo.narod.ru/4/run_st.html.

[3] Wolfram MathWord. – http://mathworld.wolfram.com/PisanoPeriod.html.

[4] В позиционных системах счисления как символическом методе записи чисел (представлении чисел с помощью письменных знаков) один и тот же числовой знак (цифра) в записи числа имеет различные значения в зависимости от того места (разряда), где он расположен.

[5] Можно найти в «On-line энциклопедии целочисленных последовательностей Нейла Слоэна» при описании чисел Фибоначчи A000045 / Mohamed Bouhamida. – Sep 05 2009. – http://www.research.att.com/~njas/sequences/A000045.

[6] Сфайрология. Галактика и мозг. – http://www.sphairology.ru.

[7] Богатырев Р. – http://www.source-code.ru/pascal/articles/gtriang.htm.

[8] Википедия Д.Уэйлса. Метод Фибоначчи с запаздываниями. – http://ru.wikipedia.org.