

# Универсальный алгебраический синтез преобразователей на переключаемых конденсаторах основанный на обобщенных числах Фибоначчи

Александр Кушнеров и Сэм Бен-Яков

Лаборатория силовой электроники  
 Университет им. Бен-Гуриона, Беэр-Шева, Израиль  
[www.ee.bgu.ac.il/~pel](http://www.ee.bgu.ac.il/~pel)

**Аннотация**—Разработан универсальный алгебраический подход к синтезу преобразователей на переключаемых конденсаторах (ППК). Предложенный подход снижает потери мощности за счёт увеличения числа целевых напряжений. Показано, что ППК основанные на двоичной и Фибоначчи системах счисления являются частными случаями предложенного подхода. Более того, данный ППК построен на основе такой же системы переключателей как двоичный и Фибоначчи ППК. Эта особенность позволяет задавать различные целевые напряжения и увеличить тем самым разрешение коэффициентов преобразования. Для случая трёх переключаемых конденсаторов введены шесть новых коэффициентов преобразования в дополнение к тринадцати уже имеющимся. Теоретические результаты были подтверждены экспериментально.

## I. ВВЕДЕНИЕ

Преобразователи на переключаемых конденсаторах (ППК) применяются в устройствах малой мощности и могут быть реализованы на кристалле. Они не содержат магнитных элементов, что способствует снижению помех. Преобразователи имеют относительно высокий КПД при условии, что их выходное напряжение  $V_o$  близко к целевому напряжению  $V_{TRG} = M \cdot V_{in}$ , где  $M$  – это коэффициент преобразования на холостом ходу. КПД преобразователей может быть найден приблизительно как  $\eta = V_o/V_{TRG}$  и уменьшается когда ППК нагружен. Снижение КПД происходит из-за характерных потерь мощности, представленных схемой замещения на Рис. 1. Она содержит источник целевого напряжения  $V_{TRG}$  и эквивалентный резистор  $R_{eq}$ , который отражает потери в сопротивлениях ключей и ESR конденсаторов [1], [2]. Упрощённая модель на Рис. 1 не принимает в расчёт потери связанные с управлением транзисторами, токами утечки и другими паразитными эффектами, которые не рассматриваются в данной работе.

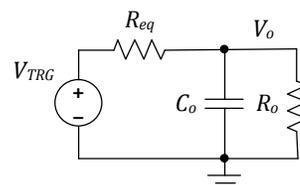


Рис. 1: Схема замещения ППК.

Если пренебречь паразитными эффектами, высокий КПД получается при низком  $R_{eq}$ , поскольку тогда  $V_o$  будет очень близким к  $V_{TRG}$ . Часто есть необходимость поддерживать постоянное выходное напряжение при колебаниях входного или иметь различные выходные напряжения для разных режимов работы системы. Такое управление выходным напряжением может быть реализовано подстройкой  $R_{eq}$  или  $M$  или обоих [3]. Наибольший КПД получается, если  $R_{eq}$  поддерживается низким насколько возможно, а  $M$  изменяет значения с маленьким шагом. Последнее, однако, является сложной задачей, поскольку  $M$  зависит от топологий ППК. Попытки ввести несколько значений для  $M$  приводили до сих пор к схемам с большим числом конденсаторов и ключей, что увеличивает потери.

Эффективный способ получить большое количество целевых напряжений – комбинация двоичного [4],[5] и Фибоначчи ППК [6],[7]. Поведение этой комбинации показано непрерывной линией на Рис. 2, где значения по оси  $X$  – это достижимые коэффициенты преобразования. Целью этого исследования было ввести дополнительные целевые напряжения в комбинированный ППК без добавления конденсаторов или ключей. Пунктирная линия на Рис. 2 показывает дополнительные пики КПД которые получаются вставкой новых, полученных из обобщённых чисел Фибоначчи, целевых напряжений между существующими.

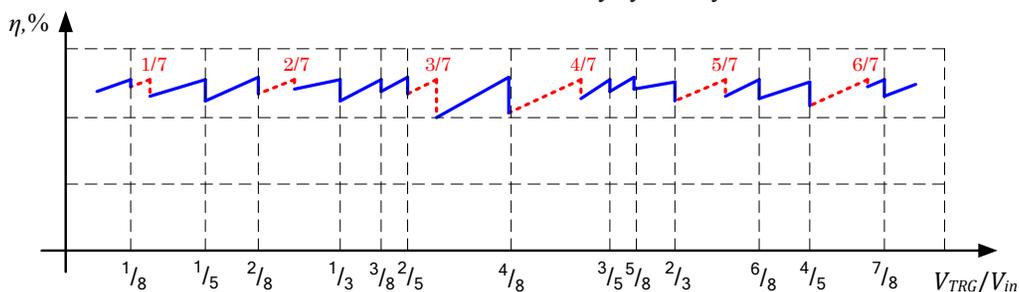


Рис. 2: Ожидаемый общий КПД.

II. ОБОБЩЁННОЕ ФИБОНАЧЧИ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ  
СО ЗНАКОМ (SGF)

Предлагаемый алгебраический синтез обобщённого Фибоначчи ППК основан на новой системе счисления описываемой в этом разделе. Обобщённые  $(h, k)$ -числа Фибоначчи [8]-[10] определяются для  $i \geq 2$  и  $h \leq k \leq h+1$  как:

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-k} + (k-h) \quad (1)$$

где начальные значения  $F_{2-k} = F_{3-k} = \dots = F_0 = (h-k+1)$ , а  $F_1=1$ . Для  $h \leq k \leq 3$  первые восемь  $(h, k)$ -чисел Фибоначчи приведены в Таблице I. Заметим, что первая и третья строки – это двоичная и Фибоначчи последовательности соответственно.

ТАБЛИЦА I: Обобщённые числа Фибоначчи.

$h$	$k$	Выражение	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	$F_i=2F_{i-1}$	1	2	4	8	16	32	64	128
1	2	$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}+1$	1	2	4	7	12	20	33	54
2	2	$F_i=F_{i-1}+F_{i-2}$	1	2	3	5	8	13	21	55
2	3	$F_i=F_{i-1}+F_{i-3}+1$	1	2	3	5	8	12	18	27
3	3	$F_i=F_{i-1}+F_{i-3}$	1	2	3	4	6	9	13	19

Согласно теореме Дайкина [8]-[10], любое целое число  $F_i \leq N_n < F_{i+1}$  может быть однозначно представлено как сумма различных  $(h, k)$ -чисел Фибоначчи:

$$N_n = \sum_{j=0}^n A_j F_{n-j+1} \quad (2)$$

где  $n$  – это резолюция, а коэффициенты  $A_j$  принимают значения 0 или 1. Инкрементируя индекс  $j$ , мы получим наибольшее  $(h, k)$ -число Фибоначчи  $F_{n+1}$  в крайней левой позиции как показано в Таблице II для  $h=1, k=2$ , и  $n=6$ .

ТАБЛИЦА II: (1, 2)-веса Фибоначчи для  $n=6$

$j$	0	1	2	3	4	5	6
$F_{n-j+1}$	33	20	12	7	4	2	1

Поскольку теорема Дайкина фактически обобщает теорему Цекендорфа [11], далее разложение Дайкина будет называться EZ-код. Главное отличие EZ-кода от двоичного – это то, что не все комбинации "0" и "1" разрешены. В частности, две единицы должны быть разделены по крайней мере  $k-1$  нулями, с единственным исключением для двух крайних единиц справа, которые могут быть разделены  $h-1$  нулями.

Например: если  $h=2$  и  $k=3$ , то каждая пара единиц в EZ-коде разделена, по крайней мере, двумя нулями, за исключением крайней пары справа, которая разделена, по крайней мере, одним нулем и может продолжаться строкой из нулей. Эти две разрешенные комбинации битов показаны в (3).

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & \underbrace{\quad\quad}_{k-1} & \underbrace{\quad\quad}_{h-1} & & \end{array} \quad (3)$$

Определим теперь для дробей  $M_n = N_n/F_{n+1}$ , лежащих в диапазоне (0, 1), обобщённое Фибоначчи представление со знаком (SGF) следующим образом.

Для начала нормализуем выражение (2) к наибольшему  $(h, k)$ -числу Фибоначчи  $F_{n+1}$ , а затем позволим  $A_j$  ( $j \geq 1$ ) принимать одно из трех значений 0, 1 или -1, как было сделано в [12]. Коэффициент  $A_0$  в SGF представлении, как и прежде, будет равен либо 0 либо 1. Таким образом,

$$M_n = A_0 + \sum_{j=1}^n A_j \frac{F_{n-j+1}}{F_{n+1}} \quad (4)$$

где  $n$  – это резолюция. Из-за того, что  $A_j$  принимает дополнительное значение -1, одно и то же  $M_n$  может быть представлено различными SGF кодами, например:

$$\begin{aligned} 4/7 &= 1 - 1 \cdot (4/7) + 0 \cdot (2/7) + 1 \cdot (1/7) \rightarrow \{1 -1 0 1\} \\ 4/7 &= 1 - 1 \cdot (4/7) + 1 \cdot (2/7) - 1 \cdot (1/7) \rightarrow \{1 -1 1 -1\} \\ 4/7 &= 1 + 0 \cdot (4/7) - 1 \cdot (2/7) - 1 \cdot (1/7) \rightarrow \{1 0 -1 -1\} \end{aligned} \quad (5)$$

Эти коды получаются в соответствии с правилом, которое основано на тождестве  $2F_i = F_{i+1} + F_{i-1} - F_{i-k+1} + F_{i-k}$ . Фактически это тождество говорит о том, что сложение двух единиц в EZ-коде вызывает, в общем случае, четыре переноса. Первый перенос идет на один бит влево, второй на один бит вправо, а третий и четвертый идут на  $k-1$  и  $k$  бит вправо соответственно. Заметим, что для  $k=1$  приведенное выше тождество сокращается до правила сложения двоичных чисел  $2F_i = F_{i+1}$ , тогда как для  $k=2$  оно сокращается до правила сложения чисел Фибоначчи  $2F_i = F_{i+1} + F_{i-2}$ .

**Правило для получения SGF кодов:**

Эта итеративная процедура начинается с EZ-кода  $M_n$ . Пропуская нули слева, добавим "1" к первому  $A_j = 1$ . Это превратит  $A_j$  в "0" и вызовет четыре переноса. Для того чтобы сохранить исходное значение  $M_n$  добавим "-1" к полученному  $A_j = 0$ , что даст новый SGF код. Описанная выше процедура повторяется для всех  $A_j = 1$  в исходном коде и для всех  $A_j = 1$  в каждом новом SGF коде.

**Следствие 1:** Минимальное количество SGF кодов для данного  $M_n$  с резолюцией  $n$  равно  $n+1$ .

Это объясняется тем, что каждая единица в EZ-коде с резолюцией  $n$  дает новый SGF код и четыре переноса. В следующих итерациях эти переносы распространяются так, что каждый ноль в EZ-коде превращается в единицу, которая затем используется для получения нового кода. Таким образом, минимальное количество кодов – это исходный код плюс  $n$ , т.е.  $n+1$ .

**Следствие 2:** Каждый  $A_j = 1$  в EZ-коде или в полученном SGF коде дает по крайней мере один  $A_j = -1$  в той же самой позиции  $j$  другого SGF кода.

Это объясняется тем, что в процедуре получения кодов происходит замена "1" на "-1".

1	$4/7$	$2/7$	$1/7$	1	$4/7$	$2/7$	$1/7$	1	$4/7$	$2/7$	$1/7$
0	0	1	1	0	1	-1	1	0	1	-1	1
			+1			+1					+1
0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
			-1			-1					-1
0	1	-1	1	1	-1	0	0	0	1	0	-1

Рис. 3: Получение SGF кодов для  $M_3=3/7$  из EZ-кода {0 0 1 1}.

Пример получения трёх различных SGF кодов для  $M_3=3/7$  из (1, 2)-EZ-кода  $\{0\ 0\ 1\ 1\}$  представлен на Рис. 3. Поскольку  $k=2$ , применяется сокращенное правило  $2F_i=F_{i+1}+F_{i-2}$ . Заметим, что  $F_0=0$  и поэтому переполнения за LSB можно не учитывать. SGF коды для других  $M_3$ ,  $h=1$ ,  $k=2$  приведены в Таблице III.

### III. ПЕРЕВОД SGF КОДОВ В ТОПОЛОГИИ ППК

Правила для перевода SGF кодов в топологии ППК совпадают с правилами, приведенными в [4]-[7] для двоичного и Фибоначчи ППК. Рассмотрим понижающий ППК, который подключен к источнику входного напряжения  $V_{in}$  и содержит набор из  $n$  переключаемых конденсаторов  $C_j$ , а также выходной конденсатор  $C_o$  подключённый параллельно с нагрузкой  $R_o$ . Соединения между  $V_{in}$ ,  $C_j$  и  $C_o$  для заданного  $M_n$  осуществляются по следующим правилам:

- 1) Если  $A_0 = 1$ , то  $V_{in}$  подключен и заряжает схему.
- 2) Если  $A_0 = 0$ , то  $V_{in}$  не подключен.
- 3) Если  $A_j = -1$ , то  $C_j$  заряжается вместе с нагрузкой.
- 4) Если  $A_j = 0$ , то  $C_j$  не подключен.
- 5) Если  $A_j = 1$ , то  $C_j$  разряжается на нагрузку.

Результат применения этих правил показан на Рис. 4, где SGF коды для  $M_3=3/7$  переведены в топологии ППК.

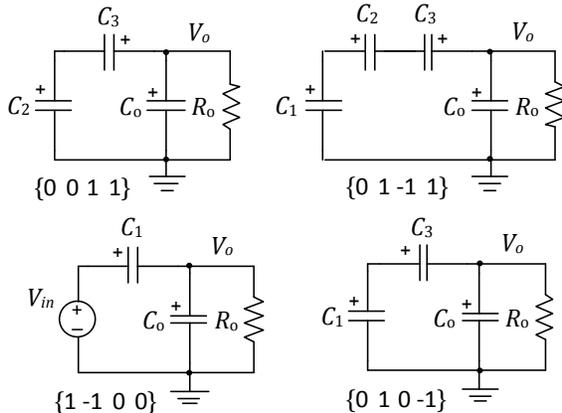


Рис. 4: Топологии обобщённого понижающего Фибоначчи ППК с коэффициентом преобразования  $M_3=3/7$ .

Топологии на Рис. 4 переключаются циклически и, через некоторое время, напряжение на выходном конденсаторе достигает целевого. Предположим, что ППК работает в установившемся режиме и все конденсаторы в топологиях на Рис. 4 заряжены до постоянных, но неизвестных напряжений  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  и  $V_o$ . Чтобы найти эти напряжения, мы применим второй закон Кирхгофа к каждой топологии, что приводит к следующей системе из четырех линейных уравнений:

$$\begin{cases} 0 \cdot V_{in} + 0 \cdot V_1 + 1 \cdot V_2 + 1 \cdot V_3 = V_o \\ 0 \cdot V_{in} + 1 \cdot V_1 - 1 \cdot V_2 + 1 \cdot V_3 = V_o \\ 1 \cdot V_{in} - 1 \cdot V_1 + 0 \cdot V_2 + 0 \cdot V_3 = V_o \\ 0 \cdot V_{in} + 1 \cdot V_1 + 0 \cdot V_2 - 1 \cdot V_3 = V_o \end{cases} \quad (6)$$

Решая (6) мы получим целевое и (1, 2)-Фибоначчи напряжения:  $V_o=(3/7)V_{in}$ ;  $V_1=(4/7)V_{in}$ ;  $V_2=(2/7)V_{in}$ ;  $V_3=(1/7)V_{in}$  на выходном и трёх переключаемых конденсаторах соответственно. Рассматривая тот факт, что система (6) имеет решение, оно также должно быть, если поменять местами  $V_{in}$  и  $V_o$ . Это означает, что подключив источник напряжения к выходу, а нагрузку ко входу, как показано на Рис. 5, можно превратить понижающий ППК в повышающий.

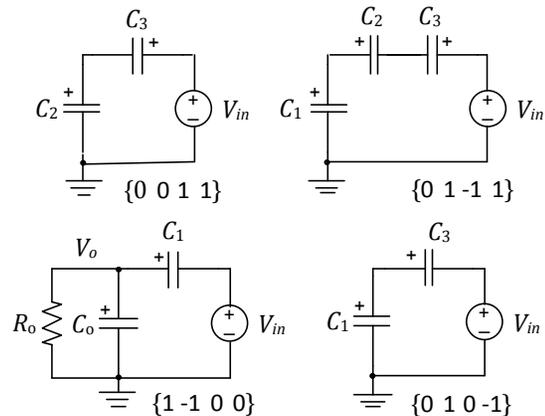


Рис. 5: Топологии обобщённого повышающего Фибоначчи ППК с коэффициентом преобразования  $1/M_3=7/3$ .

В установившемся режиме второй закон Кирхгофа для топологий ППК на Рис. 5 дает:

$$\begin{cases} 0 \cdot V_o + 0 \cdot V_1 + 1 \cdot V_2 + 1 \cdot V_3 = V_{in} \\ 0 \cdot V_o + 1 \cdot V_1 - 1 \cdot V_2 + 1 \cdot V_3 = V_{in} \\ 1 \cdot V_o - 1 \cdot V_1 + 0 \cdot V_2 + 0 \cdot V_3 = V_{in} \\ 0 \cdot V_o + 1 \cdot V_1 + 0 \cdot V_2 - 1 \cdot V_3 = V_{in} \end{cases} \quad (7)$$

Решением этой системы будет:  $V_o=(7/3)V_{in}$ ;  $V_1=(7/4)V_{in}$ ;  $V_2=(7/2)V_{in}$ ;  $V_3=(7/1)V_{in}$ . Очевидно, что полученное целевое напряжение  $V_o=(7/3)V_{in}$  обратно к полученному ранее в понижающем преобразователе. То же самое наблюдается в двоичном и Фибоначчи ППК. Заметим, что для  $n$  переключаемых конденсаторов и  $h=k=2$  наибольший коэффициент преобразования равен обычному числу Фибоначчи  $F_{n+2}$ . Этот случай имеет практическое значение при необходимости построить специальный множитель напряжения и рассматривается в [6], [7].

ТАБЛИЦА III: SGF коды для дробей  $M_3$ ,  $h=1$ ,  $k=2$

$M_3=1/7$				$M_3=2/7$				$M_3=3/7$				$M_3=4/7$				$M_3=5/7$				$M_3=6/7$							
$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_0$	$A_1$	$A_2$	$A_3$																				
0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	-1	0	1	-1	0	0	1	-1	1	1	-1	0	1	1	-1	1	0	1	-1	0	1	0	1	-1	1
0	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	0	0	1	-1	1	-1	1	0	-1	0	1	0	-1	1	0	1	0	1
1	-1	-1	0	1	-1	0	-1	0	1	0	-1	1	0	-1	-1	0	1	1	-1	1	0	0	-1	1	0	0	-1

Таким образом, для такого же числа переключаемых конденсаторов ( $n=3$ ) удалось получить шесть новых (1, 2)-Фибоначчи коэффициентов преобразования, а именно:  $\{1/7, 2/7, 3/7, 4/7, 5/7, 6/7\}$  в дополнение к тринадцати уже имеющимся в двоичном и Фибоначчи ППК:  $\{1/8, 1/5, 1/4, 1/3, 3/8, 2/5, 1/2, 3/5, 5/8, 2/3, 3/4, 4/5, 7/8\}$ , что должно улучшить КПД как показано на Рис. 2.

#### IV. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Экспериментальный ППК построен на разработанной ранее [4]-[7] системе переключателей (Рис. 6). В ней используются двунаправленные КМОП ключи MAX4678 с сопротивлением  $1.2\Omega$ . Конденсаторы  $C_1=C_2=C_3=4.7\mu F$ ,  $C_o=470\mu F$ , а  $V_{in}=8V$ . Интервал времени, выделенный для каждой топологии равен  $5\mu s$ . Выходное напряжение было измерено для  $R_o=300\Omega$  и  $R_o=100\Omega$  и представлено на Рис. 7(а) непрерывной и пунктирной линиями соответственно. КПД преобразователя представлен на Рис. 7(б) для  $R_o=300\Omega$  (ромбы) и  $R_o=100\Omega$  (квадраты).

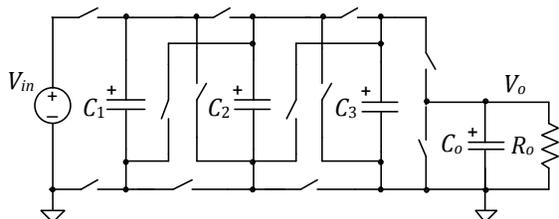


Рис. 6: Система переключателей обобщенного Фибоначчи ППК.

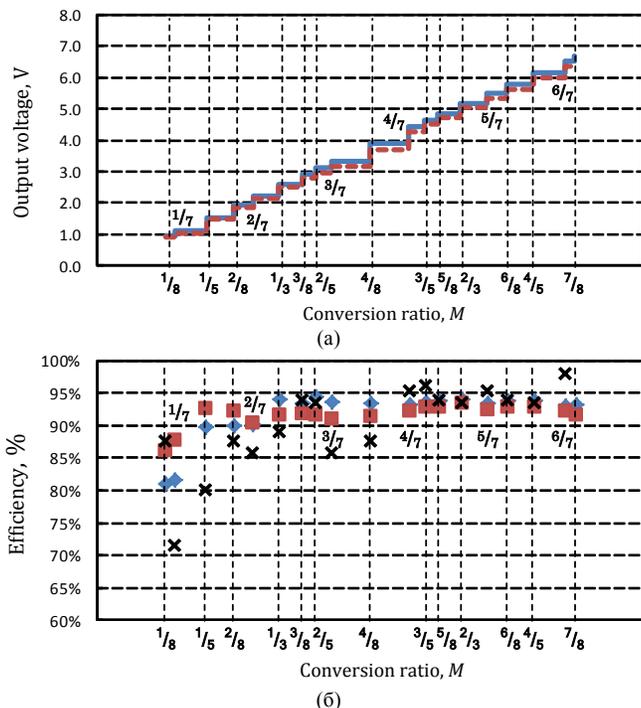


Рис. 7: Выходное напряжение (а) и КПД (б) экспериментального ППК. Верхний и нижний графики на (а) также как ромбы и квадраты на (б) получены для  $R_o=300\Omega$  и  $R_o=100\Omega$  соответственно. Точки обозначенные "X" на (б) оценивают минимальный КПД при регулировке между целевыми напряжениями.

Из Рис. 7(б) видно, что для низких коэффициентов преобразования  $M_n$  получен низкий КПД. Это может объясняться тем, что в реальном ППК есть некоторые постоянные потери, влияние которых существенно при низких  $M_n$ . Ещё одно свидетельство постоянных потерь – это низкий КПД для тех же  $M_n$  при слабой нагрузке.

#### V. ВЫВОДЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

На основе теоремы Дайкина разработано новое SGF представление, которое затем было использовано для алгебраического синтеза обобщенного Фибоначчи ППК. Этот, новый, класс ППК позволяет снизить потери мощности путём увеличения числа целевых напряжений. Он совместим с разработанными ранее двоичным и Фибоначчи ППК и построен на основе такой же системы переключателей. Это позволяет увеличить плотность пиков КПД путём переключения между соседними целевыми напряжениями расположенными достаточно близко. Большое число различных целевых напряжений полезно как в случае нерегулируемого ППК, так и в случае регулируемого, в котором выходное напряжение поддерживается постоянным при изменениях нагрузки и/или входного напряжения. В рассматриваемом ППК с тремя переключаемыми конденсаторами введены шесть новых коэффициентов преобразования в дополнение к тринадцати уже реализованным. Предложенный ППК может рассматриваться как устройство, которое решает систему линейных уравнений заданную SGF кодами.

Максимальный КПД в точках целевых напряжений ограничен эквивалентным резистором и паразитными потерями мощности. Для большинства коэффициентов преобразования КПД экспериментального ППК, где использовались ключи с сопротивлением  $1.2\Omega$ , был выше 90%. Регулировка между целевыми напряжениями может осуществляться с помощью подстройки частоты и/или ШИМ, но за счёт увеличения потерь [1]-[3], что означает низкий КПД. Учитывая, однако, близкое расстояние между целевыми напряжениями ожидаемое снижение КПД довольно незначительно. Регулировка между 1/7 и 1/5 (Рис. 7б) происходит с наибольшими потерями. Из соотношения  $\eta=V_o/V_{TRG}$ , минимальный КПД (перед достижением 1/7) равен 71.4%. Для этого же интервала минимальный КПД Фибоначчи ППК [6], [7] будет 62.5%. Следовательно, достигнуто значительное улучшение даже при очень низких коэффициентах преобразования. Минимальный КПД для более высоких коэффициентов преобразования значительно выше. Таким образом, предложенное обобщение улучшает производительность ППК. Важно отметить, что это улучшение получено без увеличения стоимости схемы, поскольку нет необходимости в дополнительных ключах и/или конденсаторах.

#### БЛАГОДАРНОСТИ

Первый автор хотел бы поблагодарить д-ра Моше Шварца за популярную интерпретацию результатов Дайкина. Эта работа была выполнена при поддержке Израильского научного фонда (ISF), грант № 476/08 и № 517/11.

## ИСТОЧНИКИ

- [1] S. Ben-Yaakov and M. Evzelman, "Generic and unified model of switched capacitor converters," IEEE Energy Conversion Congress and Expo. (ECCE) 2009, pp.3501-3508.
- [2] S. Ben-Yaakov, "On the influence of switch resistances on switched capacitor converter losses," IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 59, no.1, 2012, pp.638-640.
- [3] S. Ben-Yaakov and A. Kushnerov, "Analysis and implementation of output voltage regulation in multi-phase switched capacitor converters," IEEE Energy Conversion Congress and Expo. (ECCE) 2011, pp.3350-3353.
- [4] S. Ben-Yaakov and A. Kushnerov, "Algebraic foundation of self-adjusting switched capacitor converters," IEEE Energy Conversion Congress and Expo. (ECCE) 2009, pp.1582-1589.
- [5] A. Kushnerov, *High-efficiency self-adjusting switched capacitor DC-DC converter with binary resolution*, M.Sc. thesis, Ben-Gurion University of the Negev, 2009, 115p.
- [6] A. Kushnerov and S. Ben-Yaakov, "Algebraic synthesis of Fibonacci switched capacitor converters," IEEE Conference on Microwaves, Communications, Antennas and Electronics Systems (COMCAS) 2011, pp.1-4.
- [7] A. Kushnerov and S. Ben-Yaakov, "The best of both worlds: Fibonacci and binary switched capacitor converters combined," IET Power Electronics, Machines and Drives Conference (PEMD) 2012, pp.1-5.
- [8] D. E. Daykin, "Representation of natural numbers as sums of generalised Fibonacci numbers," J. London Math. Soc., 35, 1960, pp. 143-160.
- [9] D. E. Daykin, "Representation of natural numbers as sums of generalized Fibonacci numbers – II," The Fibonacci Quarterly, Vol. 7, no.5, 1969, pp. 494-509.
- [10] V. Laohakosol and J. Chalermchai, "Representing natural numbers as unique sums of positive integers," J. Korea Soc. Math. Edu. Ser. B, Vol. 11, no.1, 2004, pp. 63-72.
- [11] J. L. Brown, "Zeckendorf's theorem and some applications," Fibonacci Quarterly, Vol. 2, no.3, 1964, pp.163-168.
- [12] P. Ligomenides and R. Newcomb, "Multilevel Fibonacci conversion and addition," Fibonacci Quarterly, Vol. 22, no.3, 1984, pp.196-203.