S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 159–162 (2011) УДК 517.926
MSC 34C10

УРАВНЕНИЕ РИККАТИ И ЛИНЕЙНЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ ПЕРЕМЕННОЙ ЧАСТОТЫ

В. В. ИВАНОВ

Abstract. The necessary and sufficient conditions are presented for oscillability of the equation $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ with variable coefficient ω.

Keywords: linear ocsillators of variable frequency, Riccati's equation and oscillability of linear systems, integral conditions of Wintner and Kamenev, explicit construction of a support solution

Вопрос, на который здесь дается полный ответ, звучит очень просто: какой должна быть функция $\omega = \omega(t)$, определенная и непрерывная для всех $t \geq 0$, чтобы простейшее линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{1}$$

было *осциллирующим*? Это значит [1], что хотя бы одно из его решений имеет бесконечно много нулей. Благодаря Штурму мы знаем, что тогда таким же свойством обладают и все решения нашего уравнения. Классическим примером служит осциллятор с постоянной ненулевой частотой ω, колебания которого описываются комбинациями гармоник $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. Замечательный признак осциллируемости принадлежит Уинтнеру [2]. Для уравнения (1) его условие означает, что интеграл от ω^2 расходится. Ровно к такому же условию в нашем случае сводится и более общий признак, установленный А. И. Каменевым [3]. С другой стороны, осциллирующие системы вовсе не обязаны удовлетворять этому условию — они могут иметь довольно быстро убывающую частоту.

Ivanov, V. V., Riccati Equation and Linear Oscillators of Variable Frequency.

Работа поддержана интеграционным проектом № 107, утвержденным СО РАН.

Поступила 06 июля 2011 г., опубликована 14 июля 2011 г.

Какой бы ни была частота ω, если она непрерывно зависит от времени, можно для любого $t \geq 0$ посчитать интеграл

$$\varphi_1(t) = \int\limits_t^\infty \omega^2(s)\,ds. \tag{2}$$

Не проявляя никакой заботы о конечности интегралов, продолжим построения, для любого целого $k \geq 2$ и для всех $t \geq 0$ полагая

$$\varphi_k(t) = \int\limits_t^\infty \left[\varphi_{k-1}^2(s) + \omega^2(s)\right]\,ds. \tag{3}$$

Легко видеть, что $\varphi_k \geq \varphi_{k-1}$. В самом деле, для $k = 2$ это очевидно, а если $k \geq 3$, можно применить индукцию. Итак, с каждым уравнением вида (1) нам ничто, кроме обычных вычислительных трудностей, не мешает связать предел

$$\varphi(t) = \lim_k \varphi_k(t) = \sup_k \varphi_k(t) \tag{4}$$

для любого $t \geq 0$. В терминах этой *опорной функции* уравнения колебаний мы и дадим исчерпывающий ответ на интересующий нас вопрос. Поскольку все указанные выше интегралы *явно* выражаются через заданную частоту ω, наш критерий осциллируемости невозможно не счесть конструктивным...

Теорема 1. *Решения дифференциального уравнения (1) осциллируют в том и только том случае, когда его опорная функция всюду бесконечна.*

Чтобы пояснить это утверждение, для каждого $k \geq 1$ посчитаем «полный» интеграл $I_k = \varphi_k(0)$. Если первый интеграл I_1 бесконечен, уравнение (1), как мы уже отмечали, ссылаясь на статьи Уинтнера и Каменева, осциллирует. Если же $I_1 < \infty$, их признаки ничего нам не говорят. Между тем, при конечном I_1 колебания тоже могут быть. Но их может и не быть. Не имея заключения классиков, мы строим новый интеграл I_2 и доказываем, что если он бесконечен, уравнение осциллирует. Если конечен, строим интеграл I_3 и так далее. Как только появляется бесконечный интеграл I_k, мы показываем, что уравнение осциллирует, и прекращаем исследование. В противном случае у нас возникает неубывающая серия *конечных* интегралов

$$I_1 \leq I_2 \leq I_3 \leq \ldots \leq I_k \leq I_{k+1} \leq \ldots \tag{5}$$

Но даже здесь осцилляции вполне возможы, хотя и далеко не всегда. Точный и окончательный диагноз дает только наша теорема. Заметим, что именно теперь все наши интегралы $\varphi_k(t)$ оказываются «настоящими» да еще и непрерывными функциями переменной $t \geq 0$. Каждая из них неотрицательна, невозрастает и стремится к нулю на бесконечности, а все они в совокупности составляют неубывающую функциональную последовательность. Легко представить, как выглядит их предельная функция φ, которую мы назвали опорной. Несмотря на конечность мажорируемых ею функций, она может быть всюду бесконечной. Тогда, как утверждает наша теорема, все решения уравнения (1) осциллируют. Если же в какой-то момент $t_0 \geq 0$ значение $\varphi(t_0)$ оказалось конечным, как снова нам говорит наша теорема, осцилляций нет. Мы увидим, что в этом случае уравнение (1) имеет решение, строго положительное на полупрямой $t \geq t_0$. Так мы полностью исследуем вопрос об осциллируемости уравнения Ньютона, когда сила Гука противоположна отклонению от положения равновесия.

Логика доказательства теоремы будет абсолютно прозрачна для читателя, если мы заметим, что нули решения уравнения (1) не могут сгущаться в той или иной конечной точке. Это хорошо известно [1] и очевидно одновременно. Иначе говоря, если решение не осциллирует, то с некоторого момента оно принимает значения одного знака, который можно считать положительным.

Доказательство. Предположим, что уравнение (1) имеет решение $x = x(t)$, которое больше нуля для всех t, начиная с некоторого момента $t_0 \geq 0$. Следуя хрестоматии, положим $y = y(t) = \dot{x}(t)/x(t)$ для всех $t \geq t_0$. Совсем нетрудно убедиться, что функция y оказывается решением *уравнения Риккати*

$$\dot{y} + y^2 + \omega^2 = 0. \tag{6}$$

Важнейшее для нас достоинство этого решения в том, что оно определено *на всей* полупрямой $t \geq t_0$. При этом $\dot{y} \leq 0$, откуда $y \geq 0$, поскольку иначе, как легко сообразить, решение y за конечное время «уйдет» в отрицательную бесконечность... Столь же ясно, что $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Но тогда, как снова нам показывает уравнение (6), функции y^2 и ω^2 интегрируемы от t_0 до ∞ и

$$y(t) = \int\limits_t^\infty \left[y^2(s) + \omega^2(s)\right]\, ds \tag{7}$$

для всех $t \geq t_0$. Отсюда, если вспомнить (2), сразу следует, что $\varphi_1 \leq y$. Но тогда и $\varphi_2 \leq y$, как это ясно из (3). Продолжая этот радостный процесс, мы видим, что $\varphi_k \leq y$ для всех k, а значит, $\varphi \leq y$. В частности, $\varphi(t_0) \neq \infty$.

Теперь мы докажем обратное утверждение. А именно, пусть $\varphi(t_0) < \infty$ для некоторого $t_0 \geq 0$. Тогда функция $\varphi(t)$ и уж тем более функции $\varphi_k(t)$ для всех $k \geq 1$ не только определены, но и конечны на полупрямой $t \geq t_0$. Нам нельзя умолчать об удивительном соотношении, вытекающем прямо из формулы (3), если в ней перейти к пределу по индексу k, на что мы имеем полное право благодаря Лебегу и его чудесной теореме «о монотонной сходимости»:

$$\varphi(t) = \int\limits_t^\infty \left[\varphi^2(s) + \omega^2(s)\right]\, ds. \tag{8}$$

Здесь из интегрируемости подынтегральной функции вытекает непрерывность интеграла, откуда следует его гладкость и возможность «естественного» его дифференцирования, которое приводит нас к уравнению Риккати:

$$\dot{\varphi}(t) + \varphi^2(t) + \omega^2(t) = 0, \quad t \geq t_0. \tag{9}$$

Если мы теперь возьмем в качестве $x = x(t)$, где $t \geq t_0$, решение уравнения $\dot{x} = \varphi\, x$, удовлетворяющее, например, условию $x(t_0) = 1$, то легко обнаружим, что оно служит положительным решением уравнения (1) на полуоси $t \geq t_0$. Его продолжение как решения уравнения (1) на всю неотрицательную полупрямую может иметь лишь конечное число нулей. Теорема доказана.

Следующее утверждение фактически уже доказано, но более подробно чем предыдущая теорема говорит нам о том, как опорная функция φ, которая при любых обстоятельствах однозначно определяется переменной частотой ω, позволяет полностью исследовать вопрос о колебаниях в системе (1).

Теорема 2. *Пусть $t_0 \geq 0$. Уравнение (1) имеет решение, положительное на полупрямой $t \geq t_0$, тогда и только тогда, когда $\varphi(t_0) < \infty$. Среди таких* *решений $x = x(t)$, удовлетворяющих условию $x(t_0) = 1$, в точности одно имеет начальный наклон $\dot{x}(t_0) = \varphi(t_0)$. Это самый пологий наклон, который может в момент t_0 позволить себе решение, если ему после t_0 нужно быть положительным. Оно определяется формулой $x(t) = \exp\Phi(t)$, где Φ означает первообразную функции φ, равную нулю в точке t_0.*

Здесь навряд ли уместно упражняться в интегрировании, но мы в качестве иллюстрации нашего критерия можем привести результаты полного анализа вопроса о колебаниях давно изученного во многих учебниках уравнения

$$\ddot{x} + \frac{c}{(1+t)^\sigma}\, x = 0, \quad t \geq 0, \tag{10}$$

где $c > 0$, а σ может быть любым вещественным числом. Главное назначение этого примера — показать, что абсолютно все логически возможные варианты, относящиеся к предложенной здесь последовательности интегралов, на самом деле реализуются. Нет никаких сомнений, что при помощи нашего критерия бесконечное число полезных примеров осциллирующих систем получат сами читатели в своих исследованиях, скажем, прикладного характера.

Начнем с интеграла I_1. Он бесконечен при $\sigma \leq 1$. Как мы знаем, в этом случае система осциллирует. Тот же вывод следует из работ [2] и [3], хотя он ясен и непосредственно. Если же $1 < \sigma \leq 3/2$, интеграл I_1 уже конечен, но мы точно знаем, что система осциллирует, поскольку здесь $I_2 = \infty$. Аналогично, если $2 - 2^{1-k} < \sigma \leq 2 - 2^{-k}$, где $k \geq 2$, то интегралы $I_1, \ldots, I_{k-1}$ конечны, но $I_k = \infty$. Словом, в случае $\sigma < 2$ уравнение осциллирует. Если $\sigma = 2$, так что (10) становится уравнением Эйлера, начинается новая история, ибо все интегралы I_k теперь конечны. Дальнейший анализ показывает, что цепочка $\varphi_k(t)$ при любых $t \geq 0$ неограничена, если $c > 1/4$. Осцилляции продолжаются. Новая бифуркация происходит при $\sigma = 2$ и легендарно-мистическом $c = 1/4$. Здесь полные интегралы I_k оказываются ограниченными. Сей торжественный момент знаменуется появлением положительного при $t \geq 0$ решения x нашего уравнения, а именно, $x = \sqrt{1+t}$. Картина в остальных случаях соответствует общим положениям — частота становится меньше критической, бесконечные колебания невозможны. Точнее, их вовсе нет, если $\sigma = 2$ и $c < 1/4$. Если же $\sigma > 2$, каким бы ни был коэффициент c, осцилляций тем более нет.

Автор, как всегда, благодарен В. М. Чересизу за внимание и поддержку.

Список литературы

[1] Ф. Хартман. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* М.: Мир, 1970. Zbl 0214.09101, MR0352574

[2] A. Wintner. *A criterion of oscillatory stability* // Quart. Appl. Math., **7**: 1 (1949), 115–117. Zbl 0032.34801, MR0486798

[3] И. В. Каменев. *Об одном интегральном признаке колеблемости линейных дифференциальных уравнений второго порядка* // Матем. заметки, **23**: 2 (1978), 249–251. Zbl 0386.34032, MR0486798

Владимир Вениаминович Иванов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4, 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: iva@math.nsc.ru