

ФИЗИЧЕСКАЯ ПРИРОДА И УСЛОВИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ПРЕЦЕССИИ РОТОРА

В получившей широкое распространение учебной литературе [1-6] движение статически неуравновешенного ротора рассматривается как прямая синхронная прецессия¹, т.е. предполагается, что, во-первых, ось вала, деформированная под действием центробежных сил, вращается и что, во-вторых, скорость этого вращения, т.е. скорость прецессии, равна угловой скорости собственного вращения вала. Обычно оба эти предположения считаются очевидными и, таким образом, по существу, постулируются. И хотя они имеют под собой определенные основания, но оправдываются далеко не всегда. Наиболее ярким примером может служить обратная прецессия, характеризующаяся тем, что ротор и его ось вращаются в противоположные стороны.

К настоящему времени прецессионные движения роторов достаточно подробно исследованы [7-15], однако их теория не получила должного освещения не только в учебной, но даже в рассчитанной на широкий круг читателей специальной литературе [16, 17]. Возможно, это объясняется спецификой математического аппарата (в основополагающих работах [8, 9] используется теория комплексных чисел), а также отсутствием в большинстве публикаций элементарных трактовок и анализа физического смысла обратной прецессии. Нуждаются в дополнительных пояснениях и основные понятия теории прецессии.

Рассмотрим так называемый ротор Джеффкота [18], представляющий собой бесконечно тонкий жесткий диск, установленный посередине длины безмассового идеально упругого вала, вращающегося с угловой скоростью ω в жестких подшипниках (рис. 1). Центр масс диска расположен на расстоянии e от оси вала, а сам диск совершает плоское движение, оставаясь в своей плоскости и перемещаясь перпендикулярно оси подшипников.

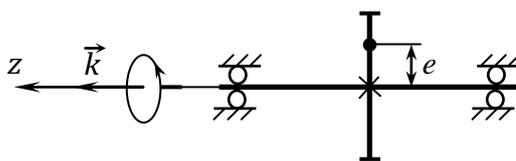


Рис. 1.

Обозначим через m массу диска, через \vec{a}_C – ускорение его центра масс. Тогда

$$m \vec{a}_C = \vec{F}, \quad (1)$$

где \vec{F} – главный вектор, т.е. сумма всех сил, действующих на диск. В условиях рассматриваемой задачи сила \vec{F} равна сумме силы тяжести G диска и силы упругости, с которой мысленно отброшенный вал действует на диск.

Вводя в рассмотрение неподвижную систему координат $Oxyz$ (рис. 2) с осями \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} и определяя силу упругости формулой

$$\vec{F}_{\text{упр}} = -c\vec{r}, \quad (2)$$

для \vec{F} получим

¹ Термин «прецессия» в указанной литературе не используется.

$$\vec{F} = -cx\vec{i} - (G + cy)\vec{j}. \quad (3)$$

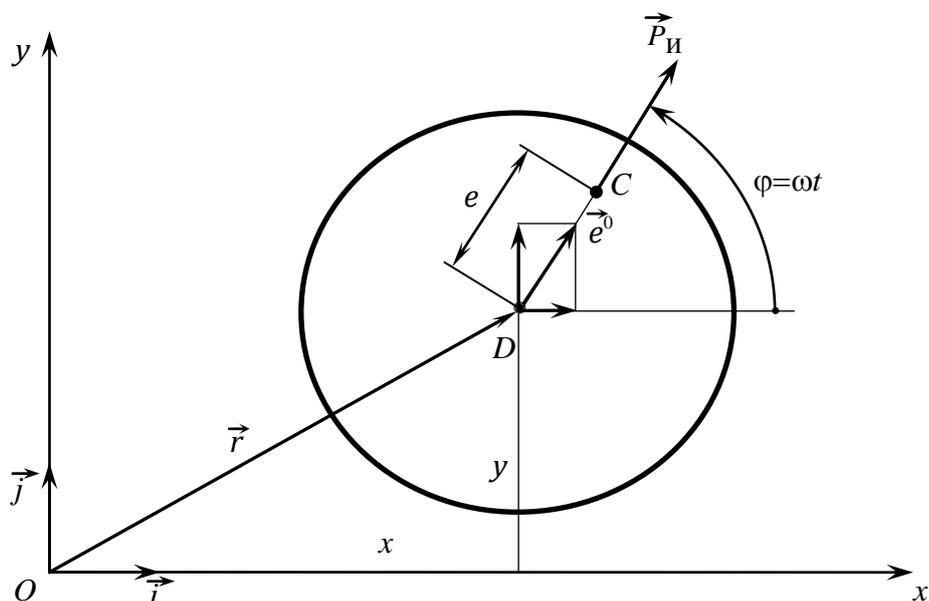


Рис. 2.

В формулах (2) и (3) $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ – радиус-вектор, x и y координаты той точки диска, которая лежит на оси вала. Обозначим эту точку через D , а ее ускорение через \vec{a}_D . Тогда, в силу известной формулы кинематики,

$$\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{CD}, \quad \vec{a}_{CD} = -\omega^2 e \vec{e}^0, \quad (4)$$

где ω – угловая скорость диска (она равна угловой скорости, с которой вокруг своей оси вращается вал), \vec{e}^0 – орт вектора \overline{DC} , \vec{a}_{CD} – центростремительное ускорение точки C по отношению к принятой за полюс точке D .

Из (1), (3) и (4) находим

$$m\vec{a}_D = -cx\vec{i} - (G + cy)\vec{j} + m\omega^2 e \vec{e}^0. \quad (5)$$

Отсюда, полагая (см. рис. 2)

$$\vec{e}^0 = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \quad (6)$$

и имея в виду, что

$$\vec{a}_D = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}, \quad (7)$$

приходим к уравнениям

$$m\ddot{x} + cx = m\omega^2 e \cos \varphi, \quad m\ddot{y} + cy = -G + m\omega^2 e \sin \varphi. \quad (8)$$

Если еще пренебречь весом диска и предположить, что угловая скорость ω постоянна, и на этом основании принять

$$\varphi = \omega t, \quad (9)$$

то для определения закона движения центра диска D получим уравнения

$$m\ddot{x} + cx = m\omega^2 e \cos \omega t, \quad m\ddot{y} + cy = m\omega^2 e \sin \omega t. \quad (10)$$

Заметим, что, в отличие от обычно используемых уравнений [8, 9, 17], в уравнениях (10) фигурируют координаты точки D , а не центра масс C , что делает их особенно удобными именно для изучения прецессии.

Уравнения (10) – это хорошо известные уравнения теории вынужденных колебаний. Их решения при $\omega \neq k$ могут быть записаны в виде

$$x = A_1 \cos kt + B_1 \sin kt + \tilde{r} \cos \omega t, \quad y = A_2 \cos kt + B_2 \sin kt + \tilde{r} \sin \omega t. \quad (11)$$

Здесь A_1, B_1, A_2, B_2 – произвольные постоянные (определяются из начальных условий),

$$\tilde{r} = \frac{\omega^2 e}{k^2 - \omega^2}, \quad (12)$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} - \quad (13)$$

частота собственных колебаний (совпадает с частотой собственных изгибных колебаний невращающегося одномассового вала).

Первые два слагаемых в (11) отражают влияние собственных колебаний. Эти колебания под действием хотя и не учтенных, но всегда присутствующих внешних сопротивлений, быстро затухают². Поэтому после выхода на установившийся режим работы в формулах (11) остаются только последние слагаемые. В результате получим

$$x = \tilde{r} \cos \omega t, \quad y = \tilde{r} \sin \omega t, \quad (14)$$

откуда следует, что

$$x^2 + y^2 = \tilde{r}^2. \quad (15)$$

Формула (15) означает, что центр диска D движется по окружности, причем, как сейчас будет показано, это движение происходит в том же направлении, что и вращение вала. Действительно, согласно (14),

$$\dot{x} = -\omega \tilde{r} \sin \omega t, \quad \dot{y} = \omega \tilde{r} \cos \omega t. \quad (16)$$

Поэтому, например, при $t=0$:

$$x = \tilde{r}, \quad y = 0, \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \omega \tilde{r}, \quad (17)$$

² Здесь и далее обнаруженное П.Л. Капицей дестабилизирующее действие сил, развивающихся в определенных условиях в аэродинамической среде [19, 20, 21, 22], не рассматривается. Не учитывается и влияние внутреннего трения (вал предполагается, как и принято в модели Джеффкотта, идеально упругим).

и из рис. 3 (построен в предположении, что $\omega < k$, так что $\tilde{r} = r > 0$) ясно, что при $\omega > 0$ точка D движется против часовой стрелки, а это и означает, что ось вала вращается в ту же сторону, что и сам ротор. Скорость точки D , как это следует из (16), определяется формулой

$$v_D = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \omega r, \quad (18)$$

а угловая скорость вектора \overrightarrow{OD} равна $v_D/r = \omega$.

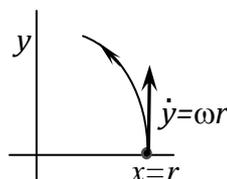


Рис. 3.

Таким образом, в рассматриваемых условиях направление вращения изогнутой оси вала совпадает с направлением собственного вращения ротора и, следовательно, ротор совершает прямую прецессию, и эта прецессия синхронная (так как скорость прецессии равна угловой скорости собственного вращения вала). Выполненный анализ показывает также, что по своей физической природе вращение оси ротора в случае его установившегося движения – это суперпозиция вынужденных (под действием сил инерции) колебаний координат x и y , определяющих положение оси ротора в неподвижном пространстве.

Полученный сейчас результат установлен для того случая, когда вес диска $G=0$. Если $G \neq 0$, то, полагая

$$y = y_1 - \frac{G}{c}, \quad (19)$$

из уравнения (8₂) будем иметь

$$m\ddot{y}_1 + cy_1 = m\omega^2 e \sin \varphi. \quad (20)$$

Присоединяя это уравнение к уравнению (8₁) и полагая по-прежнему $\varphi = \omega t$, вместо (11) с учетом (19) получим

$$x = A_1 \cos kt + B_1 \sin kt + \tilde{r} \cos \omega t, \quad y = -\frac{G}{c} + A_2 \cos kt + B_2 \sin kt + \tilde{r} \sin \omega t. \quad (21)$$

Здесь k и \tilde{r} по-прежнему определяются формулами (13) и (12). Отбрасывая, как и выше, слагаемые, отвечающие свободным колебаниям, для траектории точки, в которой диск соединен с валом, получим уравнение

$$x^2 + \left(y + \frac{G}{c}\right)^2 = \tilde{r}^2, \quad (22)$$

откуда следует, что ось вала вращается вокруг линии его прогибов, образующихся в результате деформаций под действием силы тяжести диска. Таким образом, осью прецессии оказывается не ось подшипников, а кривая линия, определяющая положение вала под действием статической (в данном случае весовой) нагрузки.

Рассмотрим теперь тот случай, когда вал вращается в упругих, одинаковых, но анизотропных опорах. Предполагая, что суммарная жесткость опор вдоль оси Ox равна c_x , а вдоль оси Oy – c_y , и пренебрегая весом диска, вместо (8) получим уравнения

$$m\ddot{x} + c_1x = m\omega^2e \cos \omega t, \quad m\ddot{y} + c_2y = m\omega^2e \sin \omega t. \quad (23)$$

Здесь c_1 и c_2 определяются формулами

$$c_1 = \frac{cc_x}{c + c_x}, \quad c_2 = \frac{cc_y}{c + c_y}. \quad (24)$$

Формулы (24) – это известные формулы для определения жесткости последовательно-го соединения линейных упругих элементов (податливость последовательного соединения равна сумме податливостей соединяемых элементов).

Так же, как и при переходе от (10) к (14), интегрирование уравнений (23) приводит к формулам

$$x = \tilde{r}_1 \cos \omega t, \quad y = \tilde{r}_2 \sin \omega t, \quad (25)$$

где

$$\tilde{r}_1 = \frac{\omega^2 e}{k_1^2 - \omega^2}, \quad \tilde{r}_2 = \frac{\omega^2 e}{k_2^2 - \omega^2}, \quad (26)$$

$$k_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{c_2}{m}}. \quad (27)$$

Физический смысл формул (27) – частоты собственных колебаний диска при его движении вдоль осей Ox и Oy соответственно. Этими же формулами определяются критические скорости вращения: амплитуда колебаний неограниченно возрастает, если угловая скорость диска приближается к одной из частот k_1 или k_2 . Таким образом, при $c_1 \neq c_2$ мы имеем уже не одну, а две критические скорости вращения. Поэтому, если только $\tilde{r}_2 \neq -\tilde{r}_1$, то $|\tilde{r}_1| \neq |\tilde{r}_2|$, и траекторией центра диска будет уже не окружность, а эллипс

$$\frac{x^2}{\tilde{r}_1^2} + \frac{y^2}{\tilde{r}_2^2} = 1, \quad (28)$$

который, однако, обращается в окружность, если $k_2 = k_1$.

Скорость, с которой центр диска перемещается по своей траектории, определяется очевидной формулой (см. (25))

$$v_D = \omega \sqrt{\tilde{r}_1^2 \sin^2 \omega t + \tilde{r}_2^2 \cos^2 \omega t}, \quad (29)$$

из которой с учетом (26) и (27) видно, что в общем случае v_D есть функция времени.

Найдем еще скорость изменения углового положения радиуса-вектора \overrightarrow{OD} . Из рис. 4 и формул (25) и (26) имеем

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x} = \frac{k_1^2 - \omega^2}{k_2^2 - \omega^2} \operatorname{tg} \omega t, \quad (30)$$

откуда следует, что

$$\dot{\phi} = \omega \frac{k_1^2 - \omega^2}{k_2^2 - \omega^2} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \omega t}{1 + \operatorname{tg}^2 \phi}. \quad (31)$$

С помощью (30) формула (31) преобразуется к виду

$$\dot{\phi} = \frac{\alpha}{\alpha^2 \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t} \omega, \quad \alpha = \frac{k_2^2 - \omega^2}{k_1^2 - \omega^2}. \quad (32)$$

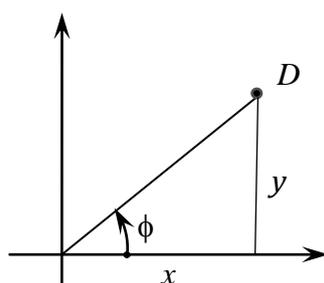


Рис. 4.

Из (32) ясно, что знак $\dot{\phi}$ определяется знаком α и если, например, $\alpha > 0$, то центр диска D движется по своей орбите в том же направлении, что и направление собственного движения ротора. Если же $\alpha < 0$, направления этих движений противоположны. Таким образом, в первом случае реализуется прямая прецессия, во втором – обратная.

Условия, определяющие тот или иной вид прецессии, вытекают из формул (32) и в графической форме при $k_1 < k_2$ представлены на рис. 5.



Рис. 5.

Из этого рисунка видно, что прямая прецессия возникает при скоростях вращения $\omega < k_1$ и $\omega > k_2$; если угловая скорость собственного вращения удовлетворяет неравенству $k_1 < \omega < k_2$, прецессия обратная. При $c_2 \neq c_1$ синхронной (с точки зрения численного значения угловой скорости) может быть только обратная прецессия. В этом случае $\alpha = -1$, а угловая скорость согласно (32) определяется формулой

$$\omega = \omega^*, \quad \omega^* = \sqrt{0,5(k_1^2 + k_2^2)}. \quad (33)$$

По-видимому, впервые формула (33) была получена Ф.М. Диментбергом [8].

Из формул (26) и (32) видно, что

$$\tilde{r}_2 = \frac{1}{\alpha} \tilde{r}_1. \quad (34)$$

Поэтому в случае синхронной обратной прецессии

$$|\tilde{r}_2| = |\tilde{r}_1|. \quad (35)$$

Формула (35) означает, что так же, как и в рассмотренной выше задаче о прямой прецессии вала на жестких опорах, траектория центра диска есть окружность (такой же результат получится и в случае упругих опор, но при $c_2=c_1$). Во всех остальных случаях, которые рассматривались в настоящей работе, траекторией прецессии является эллипс, а движение центра диска происходит с переменной скоростью (см. (29)). Примеры траекторий и графиков безразмерных скоростей $\bar{v} = 2v_D/(v_{Dmin} + v_{Dmax})$ и $\bar{\omega}_\phi = \dot{\phi}/\omega$ (для $k_2/k_1=1,1$) даны на рис. 6.

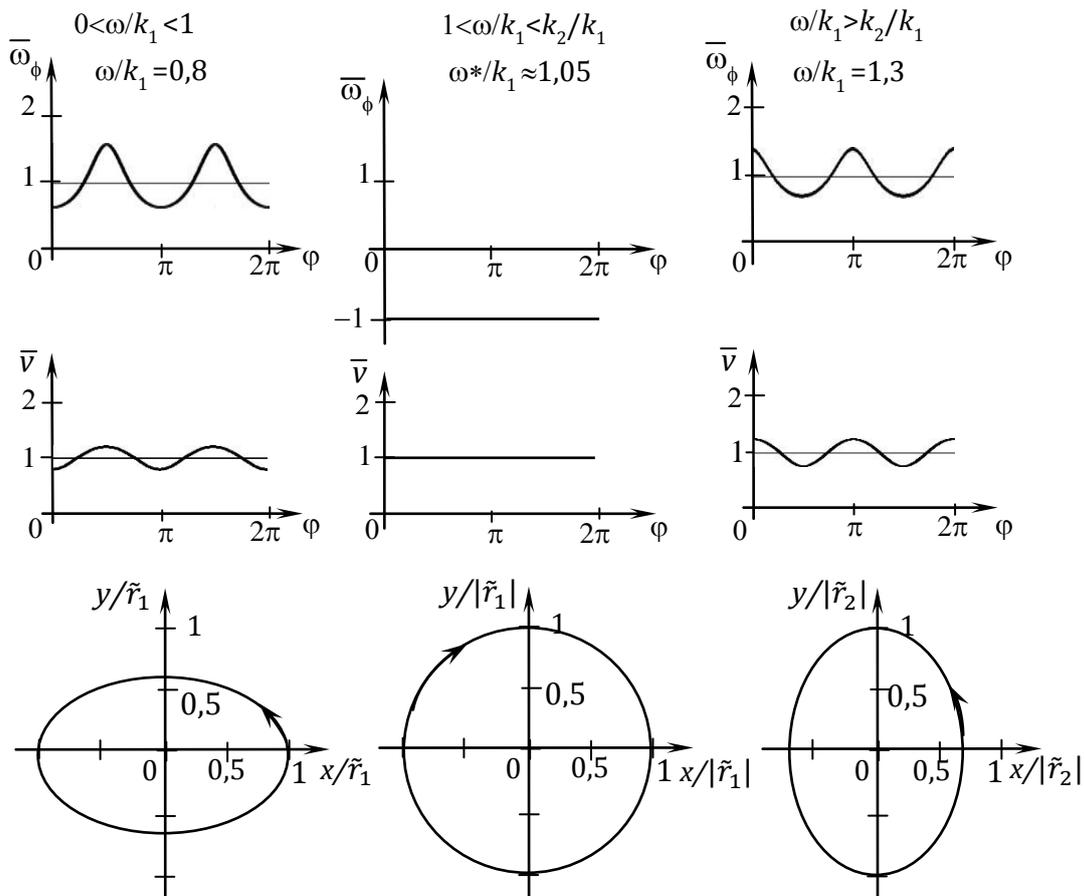


Рис. 6.

Результаты расчетов, представленные на рис. 6, качественно хорошо согласуются с результатами анализа, выполненного в [14], с той, однако, разницей, что, во-первых, в [14] даны только примеры построения траекторий, причем синхронная прецессия не рассматривается, и, во-вторых, влияние угловой скорости собственного вращения ротора на форму траектории рассмотрено не в чистом виде, а в сочетании с изменением прогиба вала. Кроме того, траектории в [14] построены для центра масс, а не для точки, лежащей на оси вала (точка D на рис. 2). В некоторых задачах (гидродинамические подшипники и уплотнения) именно эта точка представляет основной интерес.

Возвращаясь к анализу физического смысла полученных результатов, рассмотрим сначала случай $c_2 = c_1$. Для этого воспользуемся формулой (12) и, с учетом (13), перепишем ее при $\tilde{r}_2 = r > 0$ в виде

$$e = \frac{cr - m\omega^2 r}{m\omega^2}. \quad (36)$$

Числитель формулы (36) равен разности упругой силы cr и центробежной силы $m\omega^2 r$, а вся система сил, действующих на ротор, состоит из трех сил. Эти силы имеют одну и ту же линию действия (направлены вдоль радиуса-вектора, определяющего положение центра диска D) и могут быть записаны следующим образом

$$\vec{P}_и = \vec{P}_e = em\omega^2 \vec{r}^o, \quad \vec{P}_c = -cr\vec{r}^o, \quad \vec{P}_r = rm\omega^2 \vec{r}^o, \quad (37)$$

где \vec{r}^o – орт радиуса-вектора, а величины c , r , m и ω^2 положительные.

В соответствии с принципом Даламбера сумма всех этих сил должна равняться нулю. В результате приходим к уравнению

$$em\omega^2 \vec{r}^o + (-cr\vec{r}^o) + rm\omega^2 \vec{r}^o = \vec{0}, \quad (38)$$

из которого вытекает полученная ранее из других соображений формула (36), а также имеющий принципиальное значение вывод об отрицательности величины e при $\omega > k$ (см. (13)).

Аналогичным образом интерпретируется и изменение на противоположную фазы вынужденных колебаний при сверхрезонансных частотах. Тот же результат может быть получен с помощью понятия о динамической жесткости [23], определяемой формулой

$$c_\partial = c - m\omega^2 \quad (39)$$

(если $\omega > \sqrt{c/m}$, динамическая жесткость отрицательна).

Обращаясь теперь к формулам (25) и (26), видим, что в интервале $k_1 < \omega < k_2$ фазы колебаний вдоль осей Ox и Oy противоположны (величины \tilde{r}_1 и \tilde{r}_2 имеют разные знаки).

Поэтому, приняв $t=0$, из (25) получим

$$x = \tilde{r}_1 < 0, \quad \dot{x} = 0, \quad y = 0, \quad \dot{y} = \omega \tilde{r}_2 > 0, \quad (40)$$

и, как ясно из рис. 7, движение центра диска происходит по часовой стрелке.

Если же $\omega > k_2$, то $x(t)$ и $y(t)$ синфазны, знаки \tilde{r}_1 и \tilde{r}_2 совпадают и прецессия снова становится прямой.

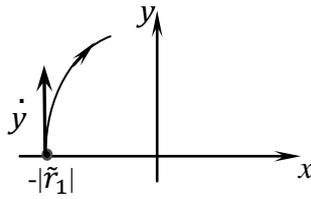


Рис. 7.

Физический смысл прецессии можно пояснить и с помощью модели в виде канала, к точке A которого прикреплена пружина и который не испытывает сопротивления вращению вокруг оси O (перпендикулярна плоскости чертежа), рис. 8. Предположим, что в недеформированном состоянии пружины ее конец, противоположный точке A , находится в точке O , и приложим к пружине силу $\vec{F} = F\vec{F}^0$, направленную вдоль оси канала, так что

$$\vec{F}^0 = \vec{r}^0. \quad (41)$$

Здесь \vec{r}^0 – орт вектора \overline{AO} .

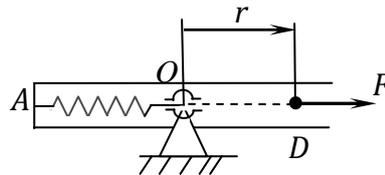


Рис. 8.

Тогда конец пружины переместится на величину

$$r = \frac{F}{c}, \quad (42)$$

где c – жесткость пружины, а вектор \overline{OD} (см. рис. 8) будет равен

$$\overline{OD} = r\vec{r}^0. \quad (43)$$

Если сила \vec{F} , оставаясь постоянной по величине, будет равномерно вращаться с угловой скоростью Ω вокруг оси O , то точно так же, не изменяя своей длины, будет вращаться и вектор \overline{OD} , а точка D будет иметь ускорение

$$\vec{a}_D = -\Omega^2 r\vec{r}^0. \quad (44)$$

На точку D действуют две силы: сила $\vec{F} = F\vec{F}^0$ и направленная в противоположную сторону сила упругости $(-cr\vec{r}^0)$. Поэтому, присоединив к концу пружины точечную массу m , получим уравнение

$$-m\Omega^2 r\vec{r}^0 = F\vec{F}^0 - cr\vec{r}^0, \quad (45)$$

которое в этом случае может быть использовано взамен (42) для определения r .

В уравнении (45) m , Ω и c – заданные величины, и для того, чтобы найти r , нужно только задать F . Зададим F формулой

$$F = m \Omega^2 e, \quad (46)$$

выразив тем самым F через m и Ω и задав имеющую размерность длины величину e . Из (45) и (46) получим

$$r = \frac{\Omega^2 e}{(c/m) - \Omega^2}. \quad (47)$$

Формула (47) полностью аналогична формуле (12) и отличается от нее только тем, что в схеме на рис. 8 сила F назначалась произвольно, путем определения ее формулой (46), а при выводе (12) роль силы F , как это следует из уравнений (10) и рис. 2³, играла центробежная сила $m \omega^2 e$ (см. также (37)), вращающаяся вместе с ротором вокруг оси его собственного вращения.

Таким образом, формулы (12)-(18) можно рассматривать не только как результат решения задачи о вынужденных колебаниях, но и как описание своего рода «эффекта иголки и нитки»: вращающаяся центробежная сила увлекает за собой плоскость, в которой лежит ось подшипников и изогнутая ось вала.

Еще одну трактовку результатов, представленных в настоящей работе, можно получить, воспользовавшись теорией комплексных чисел [8, 9, 24]. Записывая вектор \underline{r} на плоскости в виде (рис. 9, *a*)

$$\underline{r} = x + iy, \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (48)$$

и воспользовавшись формулой Эйлера

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (49)$$

получим (при $\varphi = \omega t$)

$$\underline{r} = r e^{i\omega t}, \quad (50)$$

а для вектора скорости $\underline{v} = d\underline{r}/dt$ при $r = \text{const}$ будем иметь

$$\underline{v} = i\omega r e^{i\omega t}. \quad (51)$$

Так как $i = e^{0,5\pi i}$, то

$$\underline{v} = \omega r e^{i(\omega t + 0,5\pi)}. \quad (52)$$

Отсюда, во-первых, имеем известную формулу для численного значения скорости ($v = \omega r$), а во-вторых, определяем и направление вектора \underline{v} (его линия действия, как это вытекает из (52) и рис. 9, *б*, перпендикулярна к \underline{r} , а сам вектор \underline{v} направлен в сторону увеличения φ , т.к., в соответствии с (52), получен поворотом вектора \underline{r} на 90° против часовой стрелки).

³ На рис. 2 векторы \overrightarrow{OD} и \overrightarrow{DC} имеют не совпадающие друг с другом линии действия, что действительно возможно, если еще не затухли собственные колебания.

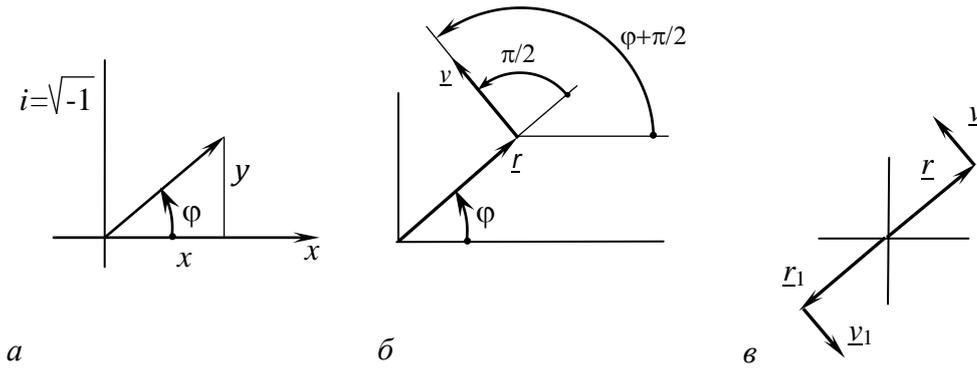


Рис. 9.

Таким образом, направление движения точки в процессе изменения углового положения ее радиуса-вектора \underline{r} определяется знаком коэффициента при i в формуле (50). Поэтому если $\underline{r} = r e^{i\omega t}$ и $\omega > 0$, то \underline{r} поворачивается против часовой стрелки; если же $\underline{r} = r e^{-i\omega t}$, то вращение происходит в противоположном направлении (т.е. по часовой стрелке).

Стоит также обратить внимание на то, что изменение в формуле (50) знака перед r на противоположный сводится только к изменению фазового угла, а на направление вращения не влияет.

Это сразу следует из того, что если $\underline{r} = r e^{i\varphi}$, а $\underline{r}_1 = -r e^{i\varphi}$, то

$$\underline{r}_1 = r e^{(\varphi+\pi)i} = \underline{r} e^{\pi i}, \quad \underline{v}_1 = \underline{v} e^{\pi i} = -\underline{v}$$

и, следовательно, направление вектора \underline{v}_1 , как и в рассмотренном выше случае, соответствует (при $\omega > 0$) повороту вектора \underline{r}_1 против часовой стрелки (рис. 9, в).

После этих вводных замечаний воспользуемся формулами (25). Принимая во внимание, что в силу формулы Эйлера (49)

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}), \quad (53)$$

для \underline{r} получим

$$\underline{r} = 0,5(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2)e^{i\omega t} + 0,5(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)e^{-i\omega t}. \quad (54)$$

Формула (54) означает, что определяемое ею движение является в общем случае суперпозицией прямой (первое слагаемое) и обратной (второе слагаемое) прецессий, причем каждому из этих слагаемых отвечает синхронная прецессия с угловой скоростью ω .

Если опоры жесткие или упругие, но изотропные, то $\tilde{r}_1 = \tilde{r}_2 = \tilde{r}$, и второе слагаемое в формуле (54) исчезает. В этом случае $\underline{r} = r e^{i\omega t}$ и мы имеем прямую синхронную прецессию с угловой скоростью ω и радиусом орбиты $r = |\tilde{r}|$.

Если $\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2 = 0$, то исчезает первое слагаемое, и формулой (54) определяется синхронная, но обратная прецессия с угловой скоростью ω и радиусом орбиты $r = |\tilde{r}_1| = |\tilde{r}_2|$.

Во всех остальных случаях скорость прецессии постоянной во время движения ротора не остается. Например, при $t = 0$ и $t = 0,5\pi/\omega$ имеем соответственно

$$\underline{r} = \tilde{r}_1 \text{ и } \underline{r} = 0,5(\tilde{r}_1 + \tilde{r}_2)i + 0,5(\tilde{r}_1 - \tilde{r}_2)(-i) = \tilde{r}_2 i. \quad (55)$$

Скорости в те же самые моменты времени, согласно формулам (51) и (54), будут

$$\underline{v} = i\omega\tilde{r}_2 \text{ и } \underline{v} = -\omega\tilde{r}_1 \quad (56)$$

и их численные значения совпадут друг с другом, только если $|\tilde{r}_2| = |\tilde{r}_1|$.

Точно так же, воспользовавшись тем, что начало отсчета времени может выбираться произвольно, и определяя с помощью формул (54) и (51) \underline{r} и \underline{v} при $t=0$ и пользуясь тем же способом рассуждений, что и при анализе рис. 3 и рис. 7, приходим к уже полученным ранее выводам о характере прецессии в зависимости от соотношения между угловой скоростью собственного вращения и частотами k_1 и k_2 (см. рис. 5).

Рассмотрим еще с позиций теории комплексных чисел вопрос о роли теории механических колебаний в выяснении физической природы прецессионных движений вращающегося ротора. Для этого воспользуемся самой простой моделью – моделью ротора Джеффко-та. В этом случае уравнение движения точки D (см. рис. 2) может быть, в силу (5) и с учетом (2), записано в виде (как и выше, силу G в (5) полагаем равной нулю)

$$m \ddot{\underline{r}} + c\underline{r} = \underline{P}_и, \quad (57)$$

где

$$\underline{P}_и = m\omega^2 e e^{i\omega t} - \quad (58)$$

центробежная сила, вращающаяся с угловой скоростью ω .

Таким образом, приходим к уравнению

$$m \ddot{\underline{r}} + c \underline{r} = m\omega^2 e e^{i\omega t}. \quad (59)$$

Его стационарное решение приводит для \underline{r} к формуле

$$\underline{r} = \frac{\omega^2 e}{(c/m) - \omega^2} e^{i\omega t}, \quad (60)$$

которая означает, что точка D движется по окружности с радиусом $r = \omega^2 e / |k^2 - \omega^2|$, и направление этого движения совпадает с направлением собственного вращения ротора.

Таким образом, получаем те же результаты (см. (12) – (14)), что и выше.

Существенно, что подобно уравнениям (10) уравнение (59) представляет собой дифференциальное уравнение вынужденных колебаний, отличающееся от (10) лишь тем, что оно определяет движение всего радиуса-вектора \underline{r} в целом.

Полезно также обратить внимание на то, что хотя вектор \underline{r} и координаты точки D изменяются во времени по гармоническому закону, колебаний вала в целом не происходит: напряженное состояние вала в случае прямой синхронной прецессии и при $G = 0$ во времени не изменяется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Гузенков П.Г.** Детали машин. – М.: Высш. шк., 1986. – 359 с.
2. **Дмитриев В.А.** Детали машин. – Л.: Судостроение, 1970. – 791 с.
3. **Иванов М.Н., Финогенов В.А.** Детали машин. – М.: Высш. шк., 2008. – 408 с.
4. **Иосилевич Г.Б.** Детали машин. – М.: Машиностроение, 1988. – 368 с.
5. **Красковский Е.Я., Дружинин Ю.А., Филатова Е.М.** Расчет и конструирование механизмов приборов и вычислительных систем / Под редакцией Ю.А. Дружинина.

- М.: Высш. шк., 1991. – 480 с.
6. **Кудрявцев В.Н.** Детали машин. – Л.: Машиностроение, 1980. – 464 с.
 7. Вибрация энергетических машин. Справочное пособие. / **Н.В. Григорьев, Н.Г. Беляковский, В.К. Дондошанский и др.**. Под ред. д.т.н. Н.В. Григорьева. – Л.: Машиностроение, 1974. – 464 с.
 8. **Диментберг Ф.М.** Изгибные колебания вращающихся валов. – М.: Академия наук СССР, 1959. – 258 с.
 - 8 a. **Dimentberg F.M.** Flexural Vibrations of Rotating Shafts. – London: Butter worths, 1961. – 243 p.
 9. **Диментберг Ф.М., Шаталов К.Т., Гусаров А.А.** Колебания машин. – М.: Машиностроение, 1964. – 307 с.
 10. **Пасынкова И.А.** Динамика прецессионного движения неуравновешенного ротора / Дисс. на соиск. ученой степени докт. физ.-мат. наук. – СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2006. – 217 с.
 11. **Позняк Э.Л.** Колебания роторов // В справочнике «Вибрации в технике». – М.: Машиностроение, 1980. – Том 3. С. 130-189.
 12. **Раер Г.А.** Динамика и прочность центробежных компрессорных машин. – Л.: Машиностроение, 1968. – 258 с.
 13. **Тондл А.** Динамика роторов турбогенераторов. / Пер. с англ. Б.Ш. Неймана под ред. В.И. Олимпиаева. – М.-Л.: Энергия, 1971. – 387 с.
 14. **Пановко Я.Г.** Механика деформируемого твердого тела: Современные концепции, ошибки и парадоксы. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
 15. **Вульфсон И.И., Ерихов М.Л., Коловский М.З. и др.** Механика машин / Под редакцией Г.А. Смирнова. – М.: Высш. шк., 1996. – 511 с.
 16. **Пановко Я.Г.** Основы прикладной теории колебаний и удара. – Л.: Машиностроение, 1976. – 320 с.
 17. **Тимошенко С.П.** Колебания в инженерном деле. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 439 с.
 18. **Пасынкова И.А., Сабонеев В.С.** Из истории развития динамики роторов // Четвертые Поляховские чтения: Избранные труды. – СПб.: Изд-во ВВМ, 2006. – С. 644-654.
 19. **Капица П.Л.** Устойчивость и переход через критические обороты быстро вращающихся роторов при наличии трения // ЖТФ. 1939. Т. IX. В. 2. – С. 124-147.
 20. **Бидерман В.Л.** Теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1980. – 408 с.
 21. **Меркин Д.Р.** Введение в теорию устойчивости движения. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
 22. **Подольский М.Е.** Физическая природа и дискуссионные вопросы теории масляных вибраций // Теория механизмов и машин. – Т. 7, №1 (13), 2009. – С. 42-59.
 23. **Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б.** Расчет на прочность деталей машин. Справочник. – М.: Машиностроение, 1993. – 639 с.
 24. **Подольский М.Е.** О применении комплексных чисел к изучению плоского движения твердого тела // Труды Ленинградского кораблестроительного института. – Л., 1954. – Вып. XIII. С. 213-218.

REFERENCES

1. **Guzenkov P.G.** Detali mashin. – М.: Vyissh. shk., 1986. – 359 p. (rus.)
2. **Dmitriev V.A.** Detali mashin. – L.: Sudostroenie, 1970. – 791 p. (rus.)
3. **Ivanov M.N., Finogenov V.A.** Detali mashin. – М.: Vyissh. shk., 2008. – 408 p. (rus.)
4. **Iosilevich G.B.** Detali mashin. – М.: Mashinostroenie, 1988. – 368 p. (rus.)
5. **Kraskovskiy E.Ya., Druzhinin Yu.A., Filatova E.M.** Raschet i konstruirovanie mehanizmov priborov i vyichislitelnyih sistem / Pod redaktsiey Yu.A. Druzhinina. – М.: Vyissh. shk., 1991. – 480 p. (rus.)
6. **Kudryavtsev V.N.** Detali mashin. – L.: Mashinostroenie, 1980. – 464 p. (rus.)

7. Vibratsiya energeticheskikh mashin. Spravochnoe posobie. / **N.V. Grigorev, N.G. Belyakovskiy, V.K. Dondoshanskiy i dr.** Pod red. d.t.n. N.V. Grigoreva. – L.: Mashinostroenie, 1974. – 464 p. (rus.)
8. **Dimentberg F.M.** Izgibnye kolebaniya vraschuschihsya valov. □ M.: Akademiya nauk SSSR, 1959. – 258 p. (rus.)
1. 8 a. **Dimentberg F.M.** Flexural Vibrations of Rotating Shafts. – London: Butter worths, 1961. – 243 p.
9. **Dimentberg F.M., Shatalov K.T., Gusarov A.A.** Kolebaniya mashin. – M.: Mashinostroenie, 1964. – 307 p. (rus.)
10. **Pasynkova I.A.** Dinamika precessionnogo dvizheniya neuravnoveshehnogo rotora / Diss. na soisk. uchenoy stepeni dokt. fiz.-mat. nauk. □ SPb.: S.-Peterb. gos. un-t, 2006. – 217 p. (rus.)
11. **Poznyak E.L.** Kolebaniya rotorov // V spravochnike «Vibracii v tehnikе». – M.: Mashinostroenie, 1980. – Tom 3. Pp. 130-189 (rus.)
12. **Raer G.A.** Dinamika i prochnost centrobeznykh kompressornykh mashin. – L.: Mashinostroenie, 1968. – 258 p. (rus.)
13. **Tondl A.** Dinamika rotorov turbogeneratorov. / Per. s angl. B.Sh. Neymana pod red. V.I. Olimp'eva. – M.-L.: Energiya, 1971. – 387 p. (rus.)
14. **Panovko Ya.G.** Mehanika deformiruemogo tverdogo tela: Sovremennye koncepcii, oshibki i paradoksy. – M.: Nauka, 1985. – 288 p. (rus.)
15. **Vulfson I.I., Erihov M.L., Kolovskiy M.Z. i dr.** Mehanika mashin / Pod redakciey G.A. Smirnova. – M.: Vyssh. shk., 1996. – 511 p. (rus.)
16. **Panovko Ya.G.** Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara. – L.: Mashinostroenie, 1976. – 320 p. (rus.)
17. **Timoshenko S.P.** Kolebaniya v inzhenernom dele. – M.: GIFML, 1959. – 439 p. (rus.)
18. **Pasynkova I.A., Saboneev V.S.** Iz istorii razvitiya dinamiki rotorov // Chetvertye Polyahovskie chteniya: Izbrannye trudy. – SPb.: Izd-vo VVM, 2006. – Pp. 644-654 (rus.)
19. **Kapica P.L.** Ustoychivost i perehod cherez kriticheskie oboroty bystro vraschuschihsya rotorov pri nalichii treniya // ZhTF. 1939. T. IX. V. 2. – Pp. 124-147 (rus.)
20. **Biderman V.L.** Teoriya mehanicheskikh kolebaniy. – M.: Vyssh. shk., 1980. – 408 p. (rus.)
21. **Merkin D.R.** Vvedenie v teoriyu ustoychivosti dvizheniya. – M.: Nauka, 1987. – 304 p. (rus.)
22. **Podolskiy M.E.** Fizicheskaya priroda i diskussionnye voprosy teorii maslyanykh vibraciy // Teoriya mehanizmov i mashin. – T. 7, №1 (13), 2009. – Pp. 42-59 (rus.)
23. **Birger I.A., Shorr B.F., Iosilevich G.B.** Raschet na prochnost detaley mashin. Spravochnik. – M.: Mashinostroenie, 1993. – 639 p. (rus.)
24. **Podolskiy M.E.** O primenenii kompleksnykh chisel k izucheniu ploskogo dvizheniya tverdogo tela // Trudy Leningradskogo korablestroitel'nogo instituta. – L., 1954. – Vyp. XIII. Pp. 213-218 (rus.)

Поступила в редакцию 17.02.2014

После доработки 13.03.2014