Сплайн интерполяция

к.ф.-м.н. Уткин Павел Сергеевич *
e-mail: utkin@icad.org.ru, pavel_utk@mail.ru
(926) 2766560

Данная лекция доступна по адресу
http://mipt.ru/education/chair/computational_mathematics/study/materials/compmath/lectures/

27 сентября 2014, МФТИ, Долгопрудный

*Конспект Ивана Цыбулина, email: tsybulin@crec.mipt.ru

Недостатки глобальной интерполяции

Глобальная интерполяция многочленом высокой ($n > 10 \div 20$) степени нежелательна, поскольку

- при вычислении многочлена высокой степени могут накапливаться ошибки округления (вспомните суммирование ряда Тейлора);
- интерполяционный многочлен может плохо приближать исходную функцию (примеры Бернштейна и Рунге на равномерной сетке)
- задача интерполяции может быть плохо обусловлена (интерполяционный многочлен чувствителен к возмущениям значений в узлах)

В принципе, все эти проблемы могут быть решены введением сетки интерполяции из нулей многочлена Чебышева, но не всегда такая возможность имеется.

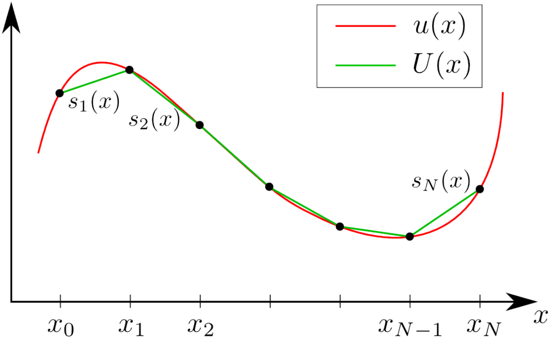
Альтернатива глобальной интерполяции

Задача интерполяции

По данному набору значений функции $u(x)$ на сетке $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ восстановить функцию $U(x)$, совпадающую с $u(x_i)$ в узлах x_i.

- Ранее функцию $U(x)$ мы искали в форме многочлена от x.
- Рассмотрим теперь вариант, когда на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функция является некоторым многочленом $s_i(x)$, причем для каждого отрезка эта функция своя.
- В такой постановке задача имеет множество решений. Единственность решения можно обеспечить, потребовав от функции $U(x)$ некоторой гладкости в местах стыков функций $s_i(x)$, то есть в узлах интерполяции.

Примеры сплайнов

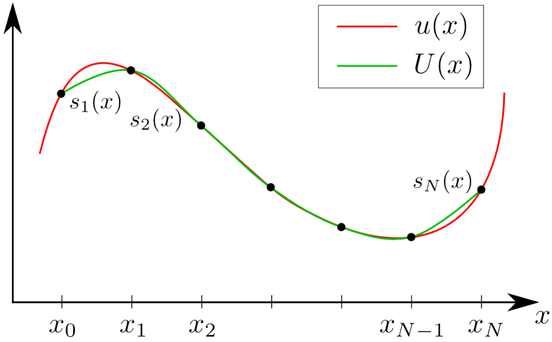


$$U(x) = s_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$s_i(x) = u(x_{i-1})\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + \\ + u(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

Кусочно-линейная интерполяция. На каждом отрезке функция приближается линейной. Дополнительных условий не требуется, условия гладкости на $U(x)$ в данном случае не налагаются.

Примеры сплайнов



$$U(x) = s_i(x), \quad x \in [x_{i-1}, x_i]$$
$$s_i'(x_i) = s_{i+1}'(x_i)$$
$$s_i''(x_i) = s_{i+1}''(x_i)$$

Гладкая кусочно-кубическая интерполяция. На каждом отрезке функция приближается кубическим многочленом. Дополнительно требуется непрерывность первой и второй производных функции $U(x)$ на всем отрезке $[x_0, x_N]$.

Характеристики сплайна

- *Степенью* сплайна называется максимальная из степеней многочленов $s_i(x)$.
- *Гладкостью* сплайна называется количество непрерывных производных, которые $U(x)$ имеет на всем отрезке $[x_0, x_N]$.
- *Дефектом* сплайна называется разность между степенью и гладкостью сплайна.

Характеристики сплайна

- *Степенью* сплайна называется максимальная из степеней многочленов $s_i(x)$.
- *Гладкостью* сплайна называется количество непрерывных производных, которые $U(x)$ имеет на всем отрезке $[x_0, x_N]$.
- *Дефектом* сплайна называется разность между степенью и гладкостью сплайна.

Например, кусочно-линейный сплайн имеет степень 1, гладкость 0 и дефект 1. Гладкий кусочно-кубический сплайн имеет степень 3, гладкость 2 и дефект 1.

Построение сплайна

Найдем выражения для функций $s_i(x)$, составляющих гладкий кубический сплайн.
Поскольку сплайн имеет степень 3, все функции $s_i(x)$ являются многочленами степени 3. Запишем их в виде

$$s_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3.$$

Такая форма записи соответствует ряду Тейлора для $s_i(x)$ в окрестности точки x_i. Поскольку $s_i(x)$ — кубический многочлен, его ряд Тейлора обрывается после кубического слагаемого. Из аналогии с рядом Тейлора заключаем, что

$$a_i = s_i(x_i), \quad b_i = s_i'(x_i), \quad c_i = s_i''(x), \quad d_i = s_i'''(x_i),$$

хотя в этом можно убедиться и обычной подстановкой.

Условия непрерывности

Выразим условия непрерывности и гладкости сплайна в терминах коэффициентов a_i, b_i, c_i, d_i. Для удобства введем обозначение для длины i-го отрезка $h_i = x_i - x_{i-1}$. Запишем условие непрерывности $U(x)$ в точке x_{i-1}:

$$a_{i-1} = s_{i-1}(x_{i-1}) = s_i(x_{i-1}) = a_i + b_i(x_{i-1} - x_i) + \frac{c_i}{2}(x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x_{i-1} - x_i)^3$$

или, пользуясь h_i,

$$a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3, \qquad i = 2, \ldots, N. \tag{1}$$

Условия гладкости

Выпишем условия непрерывности первой и второй производной $U(x)$ в точках x_{i-1}:

$$b_{i-1} = s'_{i-1}(x_{i-1}) = s'_i(x_{i-1}) = b_i + c_i(x_{i-1} - x_i) + \frac{d_i}{2}(x_{i-1} - x_i)^2,$$
$$c_{i-1} = s''_{i-1}(x_{i-1}) = s''_i(x_{i-1}) = c_i + d_i(x_{i-1} - x_i).$$

Пользуясь обозначением $h_i = x_i - x_{i-1}$,

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2, \qquad i = 2, \ldots, N, \tag{2}$$
$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \qquad i = 2, \ldots, N. \tag{3}$$

Условия интерполирования

Выпишем условия интерполирования, то есть $U(x_i) = u(x_i)$

$$a_i = s_i(x_i) = U(x_i) = u(x_i), \qquad i = 1, \dots, N.$$

Кроме этого, есть еще условие в точке x_0,

$$a_1 + b_1(x_0 - x_1) + \frac{c_1}{2}(x_0 - x_1)^2 + \frac{d_1}{6}(x_1 - x_0)^3 = s_1(x_0) = \\ = U(x_0) = u(x_0).$$

Мы не требуем дополнительно $s_{i+1}(x_i) = U(x_i)$, поскольку эти условия автоматически удовлетворяются при выполнении условий непрерывности.

$$a_i = u(x_i), \qquad i = 1, \dots, N \tag{4}$$

$$a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) \tag{5}$$

Система уравнений

Объединим полученные ранее уравнения в единую систему

$$
\begin{aligned}
&a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3, && i = 2, \ldots, N && (1)\\
&b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2, && i = 2, \ldots, N && (2)\\
&c_{i-1} = c_i - d_i h_i, && i = 2, \ldots, N && (3)\\
&a_i = u(x_i), && i = 1, \ldots, N && (4)\\
&a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) && && (5)
\end{aligned}
$$

Всего в этой линейной системе $3(N-1) + N + 1 = 4N - 2$ уравнения, хотя неизвестных a_i, b_i, c_i, d_i — $4N$. Два дополнительных условия могут быть выбраны достаточно произвольно. Обычно их задают на концах отрезка в точках x_0 и x_N. В этом случае они называются краевыми условиями.

Краевые условия

В качестве краевых условий обычно используют

- «Естественный сплайн»

$$U''(x_0) = U''(x_N) = 0.$$

- Понижение степени сплайна на краях до второй

$$U'''(x_0) = U'''(x_N) = 0.$$

- Периодический сплайн

$$U'''(x_0) = U'''(x_N), \quad U''(x_0) = U''(x_N).$$

Рассмотрим наиболее используемый первый вариант.

$$c_N = s_N''(x_N) = U''(x_N) = 0 \tag{6}$$

$$c_1 - d_1 h_1 = s_1''(x_0) = U''(x_0) = 0 \tag{7}$$

Линейная система

- После добавления двух краевых условий количество уравнений совпало с количеством неизвестных. Можно было бы на этом остановиться, ведь формально задача сведена к хорошо изученной.
- Тем не менее, можно значительно упростить эту систему линейных уравнений, сведя ее к системе линейных уравнений специального трехдиагонального вида. В вычислительной математике такие системы линейных уравнений часто встречаются при решении краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Упрощение системы

Начнем с исключения из системы неизвестных a_i.

$$a_{i-1} = a_i - b_i h_i + \frac{c_i}{2} h_i^2 - \frac{d_i}{6} h_i^3, \qquad i = 2, \dots, N \qquad (1)$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2} h_i^2, \qquad i = 2, \dots, N \qquad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \qquad i = 2, \dots, N \qquad (3)$$

$$a_i = u(x_i), \qquad i = 1, \dots, N \qquad (4)$$

$$a_1 - b_1 h_1 + \frac{c_1}{2} h_1^2 - \frac{d_1}{6} h_1^3 = u(x_0) \qquad (5)$$

$$c_N = 0 \qquad (6)$$

$$c_1 - d_1 h_1 = 0 \qquad (7)$$

Удобно воспользоваться обозначениями разделенных разностей Ньютона:

$$u(x_{i-1}, x_i) = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = \frac{a_i - a_{i-1}}{h_i}$$

Упрощение системы

Подставим вместо a_i значения $u(x_i)$:

$$b_i - \frac{c_i}{2}h_i + \frac{d_i}{6}h_i^2 = u(x_{i-1}, x_i), \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (1')$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{d_i}{2}h_i^2, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (2)$$

$$c_{i-1} = c_i - d_i h_i, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (3)$$

$$b_1 - \frac{c_1}{2}h_1 + \frac{d_1}{6}h_1^2 = u(x_0, x_1) \qquad (5')$$

$$c_N = 0 \qquad (6)$$

$$c_1 - d_1 h_1 = 0 \qquad (7)$$

Из уравнений (3) и (7) выразим $d_i h_i$:

$$d_1 h_1 = c_1, \qquad d_i h_i = c_i - c_{i-1}, \quad i = 2, \ldots, N$$

Упрощение системы

Исключим d_i из уравнений

$$b_i - \frac{c_i}{2}h_i + \frac{h_i}{6}(c_i - c_{i-1}) = u(x_{i-1}, x_i), \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (1'')$$

$$b_{i-1} = b_i - c_i h_i + \frac{h_i}{2}(c_i - c_{i-1}), \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (2')$$

$$b_1 - \frac{c_1}{2}h_1 + \frac{h_1}{6}c_1 = u(x_0, x_1) \qquad (5'')$$

$$c_N = 0 \qquad (6)$$

и приведем подобные при c_i.

Упрощение системы

После приведения подобных

$$b_i - \frac{c_i}{3} h_i - \frac{c_{i-1}}{6} h_i = u(x_{i-1}, x_i), \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (1''')$$

$$b_i - b_{i-1} - \frac{c_i}{2} h_i - \frac{c_{i-1}}{2} h_i = 0, \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (2'')$$

$$b_1 - \frac{c_1}{3} h_1 = u(x_0, x_1) \qquad (5''')$$

$$c_N = 0 \qquad (6)$$

выразим b_i

$$b_1 = \frac{c_1 h_1}{3} + u(x_0, x_1)$$

$$b_i = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1}}{6} h_i + u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 2, \ldots, N$$

и подставим в уравнение (2'')

Упрощение системы

Заметим, что выражение для b_1 формально совпадает с выражением для b_i при $i = 1$, если доопределить $c_0 \equiv 0$.

$$b_i = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1}}{6} h_i + u(x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \ldots, N$$

$$b_i - b_{i-1} = \frac{c_i h_i}{3} + \frac{c_{i-1} h_i}{6} - \frac{c_{i-1} h_{i-1}}{3} - \frac{c_{i-2} h_{i-1}}{6} + u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1}).$$

Подставляя это выражение в (2'') и упрощая, получаем

$$\frac{h_{i-1}}{6} c_{i-2} + \left(\frac{h_i}{3} + \frac{h_{i-1}}{3} \right) c_{i-1} + \frac{h_i}{6} c_i =$$

$$= u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1}), \qquad i = 2, \ldots, N \qquad (2''')$$

$$c_0 = c_N = 0. \qquad (6')$$

Для удобства умножим каждое уравнение на $\frac{6}{h_i + h_{i-1}}$. Заметим, что

$$\frac{u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1})}{h_i + h_{i-1}} = \frac{u(x_{i-1}, x_i) - u(x_{i-2}, x_{i-1})}{x_i - x_{i-2}} = u(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)$$

Трехдиагональная система

В результате серии упрощений у нас получилась система относительно значений только $c_1, \ldots, c_{N-1}$, причем структура уравнений довольно специфическая. В i-е уравнение системы входят только три неизвестные — c_{i-1}, c_i и c_{i+1}. В первое и последнее уравнения входят только две неизвестные.

$$\begin{array}{ccccccc}
2c_1 & + & \frac{h_2}{h_1+h_2}c_2 & & & = & 6u(x_0, x_1, x_2) \\
 & \ddots & & & & & \\
\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}c_{i-1} & + & 2c_i & + & \frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}c_{i+1} & = & 6u(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & \frac{h_{N-1}}{h_{N-1}+h_N}c_{N-2} & + & 2c_{N-1} & = & 6u(x_{N-2}, x_{N-1}, x_N)
\end{array}$$

Системы данного вида будут подробно рассмотрены в лекции по решению линейных систем.

Свойства сплайна

- Оказывается, что если $u(x)$ непрерывна, то последовательность кубических сплайнов $U_N(x)$ будет сходиться к $u(x)$ равномерно, то есть

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \max h_i\to 0}} \max_{[x_0,x_N]} |U_N(x)-u(x)| = 0$$

- Построенный сплайн относится к глобальным. Если изменить значение $u(x_i)$ в какой-либо точке, это приведет к изменению всего сплайна $U(x)$. Правда, амплитуда изменения быстро уменьшается при удалении от точки x_i.