УДК 517.443+517.18::517.16

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ФУНКЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ ДВУХ СИГНАЛОВ

© Г.С. Ханян

Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Москва, Россия.

Аннотация. *Работа посвящена исследованию взаимной характеристики переменных во времени процессов – функции когерентности, используемой во многих приложениях цифровой обработки сигналов. Получены аналитические выражения для функции от пар процессов, взаимосвязанных различным образом. Проведен анализ влияния шума, нелинейности и периодического фона на поведение функции. Введено понятие парциальной когерентности целого порядка для отдельно взятого сигнала. Подчеркнута роль автокогерентности (парциальной нулевого порядка) для устранения неопределенности 0/0, возникающей при вычислении взаимной когерентности.*

Ключевые слова: *функция когерентности, усреднение по реализациям, нелинейность, шум, парциальная когерентность, автокогерентность.*

1. Дискретная функции когерентности двух переменных во времени процессов $x(t)$ и $y(t)$

$$\mathbf{\Gamma}_{xy}(f_m)=\frac{\left|\overline{S_{xy}(f_m)}\right|}{\sqrt{\overline{S_{xx}(f_m)}\;\overline{S_{yy}(f_m)}}} \qquad (1)$$

формируется усреднением взаимной и авто спектральных плотностей мощности (СПМ)

$$\overline{S_{xy}(f_m)}=\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}S_{xy,j}(f_m),\quad \overline{S_{xx}(f_m)}=\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}S_{xx,j}(f_m),\quad \overline{S_{yy}(f_m)}=\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}S_{yy,j}(f_m) \qquad (2)$$

по числу J цифровых реализаций $x(t_{n,j})$ и $y(t_{n,j})$ этих процессов длительностью T и длиной N отсчетов каждая. При равномерной дискретизации частота f_m и время $t_{n,j}$ линейным образом зависят от дискретных переменных m, n и j:

$$f_m=m/T;\quad t_{n,j}=T_0+(j-1)T+nT/N;\quad m=0,1,\dots,N/2;\quad n=0,1,\dots,N-1;\quad j=1,2,\dots,J\,. \qquad (3)$$

Сами СПМ текущей, j-й пары реализаций x и y представляют собой эрмитовы произведения

$$S_{xy,j}(f_m)=S^{*}_{x,j}(f_m)S_{y,j}(f_m),\quad S_{xx,j}(f_m)=|S_{x,j}(f_m)|^2,\quad S_{yy,j}(f_m)=|S_{y,j}(f_m)|^2 \qquad (4)$$

дискретных преобразований Фурье (ДПФ)

$$S^{*}_{x,j}(f_m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(t_{n,j})e^{i2\pi f_m t_{n,j}}=\frac{e^{i2\pi mT_0/T}}{N}\sum_{n=0}^{N-1}x(t_{n,j})e^{i2\pi mn/N},\quad S_{y,j}(f_m)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}y(t_{n,j})e^{-i2\pi f_m t_{n,j}} \qquad (5)$$

этих реализаций, вычисляемых с учетом их общего начала отсчета времени T_0.

Функция когерентности $\Gamma_{xy}(f_m)$ описывает эволюцию связи процессов (на данной частоте f_m) по дискретному времени, изменяющемуся с шагом T – более длительному «кванту» времени, чем интервал дискретизации T/N, характерный для корреляционной функции – описывающей связь «настоящего» с «прошедшим» на протяжении лишь одной реализации. В дальнейшем, для простоты изложения, опустим зависимость функции Γ_{xy} от ее аргумента, и будем иметь дело с квадратом функции Γ^2_{xy}.

2. Основным свойством функции когерентности является подчинение ее неравенству

$$0 \le \Gamma^2_{xy} \le 1\,, \tag{6}$$

известному в «чистой математике» как неравенство Коши-Буняковского, и в соответствии с которым обычно трактуется «физический смысл» функции когерентности, а именно: полностью когерентными считаются процессы x и y, для которых Γ_{xy}=1, и наоборот – процессы эти совершенно некогерентны, если Γ_{xy}=0. Условием полной когерентности (кроме тривиального случая отсутствия усреднения, или же, формально, усреднения СПМ по одной реализации $J = 1$) является пропорциональность спектральных функций процессов x и y с постоянным по реализациям комплексным коэффициентом H:

$$S_{y,j} = H(f_m)S_{x,j}\,; \quad y(t_{n,j}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} h(t_k)x(t_{n-k,j}); \quad h(t_k) = \sum_{m=0}^{N-1} H(f_m)e^{i2\pi f_m t_k}\,; \quad t_k = kT/N\,. \tag{7}$$

В модели (7) процесс $x(t)$ можно рассматривать как входной, $y(t)$ – как выходной сигнал некоторой линейной системы с постоянными параметрами, а $h(t_k)$ и $H(f_m)$ – в качестве импульсной характеристики и передаточной функции такой системы. Смысл соотношений (7) заключается в том, что два процесса, отличающиеся лишь задержкой и усилением, полностью когерентны.

Приведенные факты хорошо известны (см., напр., [1-3]). Целью же настоящей работы является исследование «тонкой структуры» функции (1), неосвещенной в литературе.

3. Зададимся вопросом о том, в какой степени отклонение от идеальной (линейной) модели (7) влияет на функцию когерентности. Усложним модель (7) следующим образом:

$$S_{y,j} = HS_{x,j} + G(S_{x,j}) + S_{z,j} + D\,, \tag{8}$$

т.е. добавим нелинейность в виде аналитической функции $G(S_{x,j})$ с членами ряда 2-го и выше порядка по $S_{x,j}$, шумовую составляющую в виде спектральной функции $S_{z,j}$ процесса $z(t)$, о связи которого с процессом $x(t)$ ничего не известно, и фоновую константу D.

Функция когерентности, соответствующая модели (8), принимает следующий вид:

$$\Gamma^2_{xy} = \frac{\left|\overline{S^*_x S_y}\right|^2}{\overline{S_{xx}}\,\overline{S_{yy}}} = \frac{\left|\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left(HS_{xx,j} + S^*_{x,j}G(S_{x,j}) + S_{xz,j}\right)\right|^2}{\left(\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}S_{xx,j}\right)\left(\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left|HS_{x,j} + G(S_{x,j}) + S_{z,j}\right|^2\right)} = \frac{\left|H\overline{S_{xx}} + \overline{S^*_x G(S_x)} + \overline{S_{xz}}\right|^2}{\overline{S_{xx}}\;\overline{\left|HS_x + G(S_x) + S_z\right|^2}}\,. \tag{9}$$

Здесь для простоты анализа положено $D = 0$. Влияние постоянного по реализациям ненулевого фона $D(f_m)$ будет учтено позже, после исследования остальных факторов.

Для раскрытия квадратов модуля сумм трех чисел в (9) используем аддитивность усреднения и справедливое для произвольных комплексных чисел A, B, C тождество

$$|A + B + C|^2 = (A + B + C)^*(A + B + C) = |A|^2 + |B|^2 + |C|^2 + 2\,\mathrm{Re}(A^*B + B^*C + C^*A)\,. \tag{10}$$

В результате приходим к следующей формуле для функции когерентности модели (8):

$$\Gamma^2_{xy} = \frac{|H|^2\,\overline{S_{xx}}^2 + \left|\overline{S^*_x G(S_x)}\right|^2 + \left|\overline{S_{xz}}\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(H\overline{S_{xx}}\,\overline{S_x G^*(S_x)} + \overline{S_{xz}}\,\overline{S_x G^*(S_x)} + H\overline{S_{xx}}\,\overline{S_{zx}}\right)}{|H|^2\,\overline{S_{xx}}^2 + \overline{S_{xx}}\,\overline{|G(S_x)|^2} + \overline{S_{xx}}\,\overline{S_{zz}} + 2\,\mathrm{Re}\left(H\overline{S_{xx}}\,\overline{S_x G^*(S_x)} + \overline{S_{xx}}\,\overline{S_z G^*(S_x)} + H\overline{S_{xx}}\,\overline{S_{zx}}\right)}\,. \tag{11}$$

Мы видим, что у числителя и знаменателя Γ^2_{xy} в выражении (11) имеются по три совпадающих и по три несовпадающих слагаемых, а именно: члены

$$|H|^2\,\overline{S_{xx}}^2\,; \quad 2\,\mathrm{Re}\left(H\overline{S_x G^*(S_x)}\right)\overline{S_{xx}}\,; \quad 2\,\mathrm{Re}\left(H\overline{S_{zx}}\right)\overline{S_{xx}}\,, \tag{12}$$

в которых присутствует передаточная функция H линейной части системы, присутствуют и в числителе, и в знаменателе. Остальные члены, выписанные ниже попарно

$$\left|\overline{S_x^* G(S_x)}\right|^2 \le \overline{S_{xx}}\,\overline{\left|G(S_x)\right|^2};\quad \left|\overline{S_{xz}}\right|^2 \le \overline{S_{xx}}\,\overline{S_{zz}};\quad 2\operatorname{Re}\left(\overline{S_{xz}}\,\overline{S_x G^*(S_x)}\right) \ne 2\operatorname{Re}\left(\overline{S_{xx}}\,\overline{S_z G^*(S_x)}\right), \quad (13)$$

фигурируют либо в числителе, либо в знаменателе. Они характеризуются полным отсутствием линейного фактора H и присутствием остальных факторов в чистом виде или в комбинации друг с другом. Нельзя не заметить, что во втором соотношении (13) само отношение несовпадающих компонент числителя и знаменателя является квадратом функции когерентности между процессами x и z. Далее, знак "≤" между членами первой пары поставлен в силу того, что наборы данных $S_{x,j}$ и $G(S_{x,j})$; $j=1,\ldots,J$ удовлетворяют неравенству Коши-Буняковского, составляя «парциальную» функцию когерентности

$$\Gamma_{x,G}^2 = \frac{\left|\overline{S_x^* G(S_x)}\right|^2}{\overline{S_{xx}}\,\overline{\left|G(S_x)\right|^2}} \quad (14)$$

между процессом $x(t)$ и «чисто нелинейным» процессом $y(t)$ – у которого $H=0$, $D=0$, $z(t)=0$ в модели (8). Что касается третьей пары членов, то ввиду достаточной сложности их структуры, между ними с определенностью можно поставить только знак "не равно", и, тем не менее, числитель выражения (11) в силу неравенства (6) не будет превосходить знаменатель – вне зависимости от истинного соотношения между этими величинами.

4. Приведем теперь, для наглядности, три важных частных случая модели (8), получаемые комбинацией линейного фактора с каждым из остальных факторов влияния.

В первом случае исключим в формуле (11) влияние шумовой составляющей $z(t)$, сохранив фактор нелинейности – для определенности, в квадратичном виде ($G(S_{x,j})=CS^2_{x,j}$):

$$\Gamma_{xy}^2 = \frac{\left|\overline{S_{xx}S_x}\right|^2 + |H/C|^2\,\overline{S_{xx}}^2 + 2\operatorname{Re}\left((H/C)^*\overline{S_{xx}}\,\overline{S_{xx}S_x}\right)}{\overline{S_{xx}}\,\overline{\left|S_x^2\right|^2} + |H/C|^2\,\overline{S_{xx}}^2 + 2\operatorname{Re}\left((H/C)^*\overline{S_{xx}}\,\overline{S_{xx}S_x}\right)} = \frac{F_{H,C}(S_x) + \left|\overline{S_x S_{xx}}\right|^2}{F_{H,C}(S_x) + \overline{S_{xx}}\,\overline{S_{xx}^2}}. \quad (15)$$

В полученной формуле (15) обращает на себя внимание столь необычный факт, что при учете квадратичной нелинейности, наряду со спектральной плотностью S_{xx} в усреднении по реализациям участвуют ее квадрат S^2_{xx} и произведение $S_x S_{xx}$, что позволяет, положив функцию влияния $F_{H,C}$ равной 0, и, тем самым, сохранив лишь нелинейную часть модели (8), определить парциальную когерентность 2-го порядка в качестве частного случая (14). Обобщая эту идею, легко показать, что когерентностью p-го порядка будет

$$\Gamma_{x,p}^2 = \frac{\left|\overline{S_{xx}S_x^{p-1}}\right|^2}{\overline{S_{xx}}\,\overline{S_{xx}^p}}. \quad (16)$$

Во втором случае исключим из (11) нелинейность ($G(S_{x,j})=0$), сохранив влияние шума:

$$\Gamma_{xy}^2 = \frac{|H|^2\,\overline{S_{xx}}^2 + \left|\overline{S_{xz}}\right|^2 + 2\overline{S_{xx}}\operatorname{Re}\left(H\overline{S_{zx}}\right)}{|H|^2\,\overline{S_{xx}}^2 + \overline{S_{xx}}\,\overline{S_{zz}} + 2\overline{S_{xx}}\operatorname{Re}\left(H\overline{S_{zx}}\right)} = \frac{F_H(S_x,S_z) + \left|\overline{S_{xz}}\right|^2}{F_H(S_x,S_z) + \overline{S_{xx}}\,\overline{S_{zz}}}. \quad (17)$$

Из выражения (17) становится ясно, что при отсутствии дополнительной информации о взаимосвязи процессов x и z парциальная когерентность имеет наиболее общий вид (1).

В третьем случае оценим влияние фона, что легко сделать, положив в (17) формально $S_z=D$ и вынося константу D из-под операции усреднения. В результате для модели

$$S_y = HS_x + D \quad (18)$$

функция когерентности будет выглядеть следующим образом:

$$\Gamma_{xy}^2=\frac{|H|^2\,\overline{S_{xx}}^2+|D|^2\left|\overline{S_x}\right|^2+2\overline{S_{xx}}\,\mathrm{Re}\left(H\overline{S_x}\right)}{|H|^2\,\overline{S_{xx}}^2+|D|^2\,\overline{S_{xx}}+2\overline{S_{xx}}\,\mathrm{Re}\left(H\overline{S_x}\right)}=\frac{F_{H,D}(S_x)+\left|\overline{S_x}\right|^2}{F_{H,D}(S_x)+\overline{S_{xx}}}. \tag{19}$$

В (19) обращает на себя внимание усреднение по реализациям спектральной функции S_x, но теперь уже в «чистом виде». Парциальной когерентностью является теперь функция

$$\Gamma_x=\frac{\left|\overline{S_x}\right|}{\sqrt{\overline{S_{xx}}}}, \tag{20}$$

впервые предложенная в [4] и названная «автокогерентностью» процесса $x(t)$.

5. Автокогерентность, нетрудно заметить, является частным случаем (16) – парциальной когерентностью нулевого порядка. В то же время практическая значимость этой функции шире. Дело в том, что функция когерентности Γ_{xy} может иметь неопределенность типа 0/0 – когда числитель и знаменатель в определяющей формуле (1) одновременно равны 0. Это возможно тогда, когда усредненная СПМ одного или обоих процессов окажется равной 0. В литературе этот вопрос либо замалчивается, либо авторы неявно полагают функцию когерентности на критической частоте (или полосе частот) равной 0 или 1. Однако оба эти крайние способы устранения неопределенности имеют тот недостаток, что когда по одному из каналов не поступает никакой информации, поступающая по другому каналу информация искусственным образом игнорируется. Действительно, постоянный "ноль" или постоянная "единица" не несут содержательной информации. Для решения этой проблемы предлагается при вычислении Γ_{xy} неопределенность 0/0 устранять следующим образом: при равенстве нулю усредненной СПМ одного из процессов считать когерентностью автокогерентность другого процесса. Метод будет неполным, если не указать, как устранять неопределенность в случае равенства нулю знаменателя в формуле (20), определяющей саму автокогерентность. Предлагается, исходя из концепции полной когерентности двух нулевых процессов, считать автокогерентность таковых процессов также равной 1. В остальных случаях когерентность следует вычислять по традиционной формуле (1). В итоге математическое выражение перечисленных ситуаций выглядит так:

$$\Gamma_{xy}=\frac{\left|\overline{S_{xy}}\right|}{\sqrt{\overline{S_{xx}}\,\overline{S_{yy}}}},\ \overline{S_{xx}}\,\overline{S_{yy}}\neq 0;\ \Gamma_{xy}=\Gamma_x,\ \overline{S_{xx}}\neq 0,\ \overline{S_{yy}}=0;\ \Gamma_{xy}=\Gamma_y,\ \overline{S_{xx}}=0,\ \overline{S_{yy}}\neq 0;\ \Gamma_{xy}=1,\ \overline{S_{xx}}+\overline{S_{yy}}=0\,. \tag{21}$$

Автокогерентность является не только индивидуальной характеристикой отдельно рассматриваемого процесса, но и естественным выражением взаимной когерентности двух сигналов, один из которых не изменяется от реализации к реализации. В самом деле, «разорвав» линейную связь между процессами x и y, т.е. положив H=0 в модели (18), получаем из (19) как раз автокогерентность изменяющегося по реализациям сигнала x. Постоянный по реализациям, а значит, периодический во времени сигнал y никак не влияет (независимо от вида повторяющейся с периодом T осциллограммы $y(t_{n,j})=y(t_{n,j+l})$) на величину взаимной когерентности – последняя равна автокогерентности сигнала x. Сигнал y, не изменяющийся по реализациям, является как бы опорным (или фоновым) по отношению к сигналу x, эволюционирующему с течением дискретного параметра времени – номера реализации j. И нет оснований не рассматривать в качестве опорного и нулевой сигнал y=0, выдвинув принцип неразличимости постоянного по реализациям сигнала от нулевого сигнала – не поступающего на вход устройства, измеряющего когерентность. Если же на вход устройства не поступает и второй сигнал, то измеряемая когерентность равна единице – как раз своему «стартовому» значению (когда J=1 и нет еще усреднения). С этой точки зрения стартовое значение приобретает смысл выжидательного порога: пока сигналов нет, т.е. когда на вход анализатора поступают одни нули, когерентность равна единице. Как только начинает поступать какой-либо из двух сигналов, измерительное устройство реагирует на автокогерентность этого сигнала. С началом поступления второго сигнала измеряется взаимная когерентность (1) обоих сигналов.

6. Сформулируем теперь практические выводы относительно определенной формулой (14) парциальной функции когерентности. Они вытекают из сходства структур формул (15), (17), (19) – наличия в числителе и знаменателе Γ^2_{xy} одинаковой функции влияния F линейной части H на соответствующую нелинейную часть. Ясно, что если влияние это незначительно, то парциальная когерентность будет близка к общей когерентности (1), вычисляемой при обычном дискретном когерентном анализе. В то же время вычисление парциальной когерентности p-го порядка (16) – вполне реализуемая на компьютере процедура, и его можно произвести в реальном времени для некоторого (ограниченного глубиной анализа) числа первых значений p. При близости $\Gamma_{x,p}$ (или $\Gamma_{y,p}$) к Γ_{xy} можно судить о значимости «доли» нелинейности p-го порядка во взаимосвязи процессов x и y. Так, если максимально близкой к (1) окажется автокогерентность (20), то с уверенностью можно судить о «фоновой» природе процесса y. Сказанное находится в полном согласии с тем, что если Γ_{xy} окажется ближе всего к парциальной когерентности 1-го порядка (кстати, всегда равной единице), то можно говорить о преимущественно линейной связи (7) между x и y.

Открытым в настоящей работе остается вопрос подбора критерия сравнения взаимной когерентности Γ_{xy} с парциальной когерентностью $\Gamma_{x,p}$. Функциональный вид критерия (отношение когерентностей, разность их квадратов и т.п.) и его оптимальность можно установить лишь путем исследования реально протекающих переменных процессов x и y.

Литература

1. *Бендат Дж., Пирсол А.* Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1989, 544 с.
2. *Отнес Р., Эноксон Л.* Прикладной анализ временных рядов. – М.: Мир, 1982, 432 с.
3. *Марпл-мл. С.Л.*Цифровой спектральный анализ и его приложения. – М.: Мир, 1990, 584 с.
4. *Ханян Г.С.* Разработка системы цифровой обработки сигналов на базе IBM PC в обеспечение современных методов испытаний авиадвигателей // "Авиационные технологии - 2000". Международная конференция. Сб. трудов, г. Жуковский, Россия, 19-24 августа 1997 г., с. 688-696.

Поступила: 14.04.10.