ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПАМЯТИ

В.В. Учайкин

Владимир Васильевич Учайкин, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой Ульяновского государственного университета. Руководитель проекта 06-01-99010.

В статье с выразительным названием «Неживая материя обладает памятью» [1] С. Вестерлунд описал эксперименты с электролитическими конденсаторами, заряжаемыми разными способами до одного и того же напряжения. Измерения показали, что кривые разрядки конденсаторов заметно отличаются друг от друга, что можно интерпретировать как наличие памяти в сложной диэлектрической системе. Классическим примером проявления памяти служит магнитный гистерезис. Современная экспериментальная физика богата такого рода наблюдениями, и наличие памяти как общего свойства природы не является столь уж неожиданным: в ее отсутствие мы не смогли бы говорить ни о возрасте тех или иных минералов, ни о *естественной истории* вообще. Конкретный механизм памяти в разных процессах может быть разным, однако *общее качество* стимулирует попытки поиска общего *феноменологического* описания, пригодного для многих процессов с памятью.

Прекрасным примером феноменологического подхода к другой проблеме — проблеме переноса — служит диффузионная модель. Составленное из двух уравнений (уравнения непрерывности и закона Фика), уравнение диффузии, в одномерном случае имеющее вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad (1)$$

описывает движение электронов и дырок в полу проводниках, света в атмосферах планет, нейтронов в ядерных реакторах, заводского дыма в атмосфере, цветочной пыльцы в воздухе, капельки чернил в воде, распространение тепла в газах, жидкостях и твердых телах. Уравнение это не принадлежит к числу фундаментальных, закон Фика — эмпирический закон. Но если бы нам захотелось вывести его из первых принципов, то для нейтронов, фотонов, электронов и частиц сажи мы были бы вынуждены исходить из разных первичных уравнений, идти разными путями, вводить трудно проверяемые предположения, и это могло бы занять не один десяток страниц. «В развитии физики такие феноменологические теории всегда играли значительную роль», — писал В. Гейзенберг в статье [2], и далее: «с чисто прагматической точки зрения феноменологические теории могут сделать познание законов природы даже излишним».

«Мой дядя самых честных правил…»

Диффузионный процесс принадлежит к классу *марковских* случайных процессов, названному по имени выдающегося русского математика А.А. Маркова. Состояние стохастического процесса описывается распределением его координат $p(x,t)$ в момент наблюдения t, и процесс называется марковским, если условное распределение $p(x,t|x_0,t_0)$ процесса в будущем (при $t > t_0$) при фиксированном в настоящее время ($t = t_0$) состоянии $x0$ не зависит от его поведения в прошлом (при $t < t_0$):

$$p(x,t|x_0,t_0;\, x_1,t_1;\, x_2,t_2,\ldots) = p(x,t|x_0,t_0),\ \ldots\ t_2 < t1 < t_0 < t \qquad (2)$$

(моменты времени здесь пронумерованы в обратном порядке: номер возрастает по мере удаления от настоящего в прошлое (рис.1). Можно сказать, что марковский процесс не помнит своего прошлого, *не обладает памятью*.

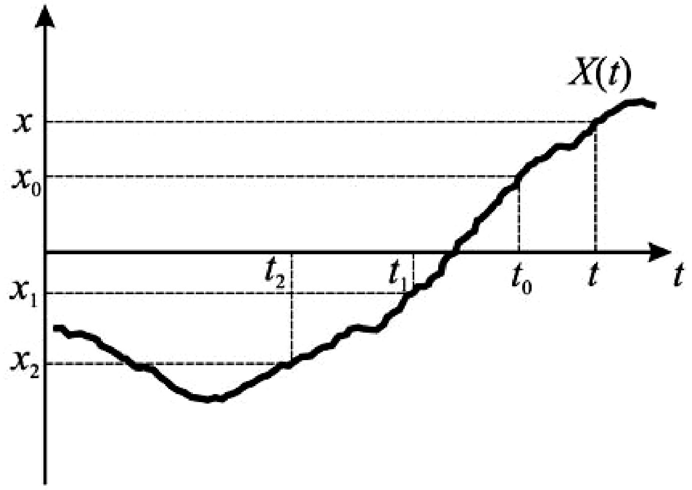

Рис.1

Любопытно отметить, что рождению теории марковских процессов предшествовало обнаруженное Марковым свойство текста поэмы А.С. Пушкина «Евгений Онегин»: вероятности появления гласной или согласной определяются в основном типом ее первого предшественника и слабо зависят от предыдущих букв. Соотношение (2) как раз и отражает это свойство, если под x понимать дихотомическую переменную, означающую тип буквы, а под t_n — номер буквы-предшественницы.

Отсутствием памяти «страдает» большинство моделей теоретической физики, начиная с обычной гамильтоновой системы, уравнения, движения которой имеют именно такой вид:

$$\dot{q}(t) = \frac{\partial H(q(t), p(t), t)}{\partial p}, \quad \dot{p}(t) = \frac{\partial H(q(t), p(t), t)}{\partial q}$$

Как и в случае стохастического марковского процесса, поведение динамической гамильтоновой системы при $t > t_0$ полностью определяется ее со стоянием $\{q(t_0), p(t_0)\}$ в момент t_0 и не зависит от предыстории, от того, как двигалась система до этого момента времени. Различие между случайным и динамическом процессами лишь в содержании понятия «состояние»: в первом случае это распределение вероятностей координат, задаваемое плотностью $f(x,t)$, во втором — сами координаты q и p как функции времени. В обоих случаях имеет место уравнение

$$\frac{df(t)}{dt} = \mathrm{K}f(t), \qquad (3)$$

где K — оператор, действующий на $f(t) \equiv f(x,t)$ по координатным переменным x.

Разумеется, по отношению к реальным процессом марковское свойство является *приближением*, как, можно подозревать, приближенны и все моде ли без памяти, но они очень просты и в большинстве случаев вполне удовлетворительно работают. В большинстве, но не во всех.

Богатое наследство

Свойство процесса сохранять память о своем прошлом называют *эредитарностью*. В физическом аспекте термин эредитарность (от лат. hereditarity) примерно эквивалентен понятиям *память, последействие, запаздывание, наследственность, остаточность*. Выдающийся итальянский математик В. Вольтерра, посвятивший развитию идеи эредитарности в применении к физическим и экологическим задачам ряд научных работ и несколько глав в книге [3], отмечал, что впервые понятие последействия в физике ввел Пи кар в 1907 г., хотя явления усталости металлов, магнитного и электрического гистерезиса, запаздывания волн и других эредитарных процессов были известны, конечно, много раньше. Заслуга Вольтерры в том, что он сформулировал основные принципы эредитарности и использовал для описания эредитарных процессов интегральные уравнения, носящие его имя, — уравнения Вольтерры.

Заметим, что неэредитарное дифференциальное равнение (3) эквивалентно интегральному

$$f(t) = \int_a^t \mathrm{K} f(\tau)\,d\tau + f(a)$$

при произвольном a, которое может быть даже заменено символом $-\infty$, если несобственный интеграл в правой части уравнения сходится. Слегка изменив формулировку Вольтерры, запишем *эредитарное интегральное уравнение* в виде

$$f(t) = \int_a^t \Phi(t-\tau)\mathrm{K} f(\tau)\,d\tau + f(a), \qquad (4)$$

где ядро $\Phi(t-\tau)$ отражает свойство эредитарности, влияние предыстории системы на ее состояние в данный момент t. Постоянная a здесь тоже может быть заменена отрицательной бесконечностью (рассматриваемая система существует вечно), но часто ее считают конечной и полагают, например, равной нулю. Последнее означает, что система (например, блуждающая частица) до момента a не существовала или этот момент является особым *марковским* моментом, когда система теряет память о прошлом, и дальнейшее ее поведение определяется этим *начальным* состоянием.

Степень против экспоненты

Сформулированные Вольтеррой принципы эредитарности (линейности, затухания, инвариантности относительно сдвига во времени) и попытки их применения к динамике материальных точек, механике сплошной среды и электродинамике при благоприятном стечении обстоятельств могли бы стать основой для содержательной и плодотворной теории. Могли бы, но не стали: физики тех лет были увлечены потоком революционных *фундаментальных* идей — теорией относительности, квантовой механикой, ядерной физикой, элементарными частицами (золотой век физики! — никогда больше такого не повторится). Однако последние десятилетия характеризуются возрастающей концентрацией усилий в направлении исследования сложных систем и процессов, описание которых зачастую возможно лишь на *феноменологическом* уровне.

Мощной идеей, давшей новый импульс теории сложных систем, стала идея самоподобия (автомодельности, *скейлинга*). На этой идее выросла концепция *фракталов*, ей питается молодая теория *хаоса*, да и вполне «взрослые» направления физической науки — от космологии до физики микромира — насквозь пропитаны идей самоподобия. Математическим символом идеи скейлинга является степенная функция

$$\Phi_\mu(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\, t_+^{\mu-1}, \quad t_+ = \begin{cases} t, \ t > 0, \\ 0, \ t < 0, \end{cases}$$

удовлетворяющая условию *однородности*:

$$\Phi_\mu(mt) = m^{\mu-1}\Phi_\mu(t).$$

Изменение масштаба $t \to t' = mt$ не изменяет вида степенной функции (рис.2), а приводит лишь к умножению ее на постоянную $m^{\mu-1}$ подобно тому, как преобразование сдвига $t \to t' = m + t$ не изменяет вида экспоненциальной функции e^t, а лишь умножает ее на e^m.

Без сомнения, экспонента — самая популярная функция в теоретической физике, с ее помощью (или с помощью суперпозиций экспонент) описываются многочисленные неравновесные процессы. Однако еще 150 лет назад писали о том, что падение со временем напряжения на одном из первых электрических аккумуляторов — лейденской банке — происходит не по экспоненциальному закону, а по закону $t^{-\gamma}$, где $\gamma \approx 1$ [4]. Современные эксперименты, проведенные уже с электретным микрофоном, подтверждают степенную зависимость [5]. Большая коллекция степенных закономерностей в физике собрана в книгах английского физика, специалиста по проблемам релаксации Джоншера [6].

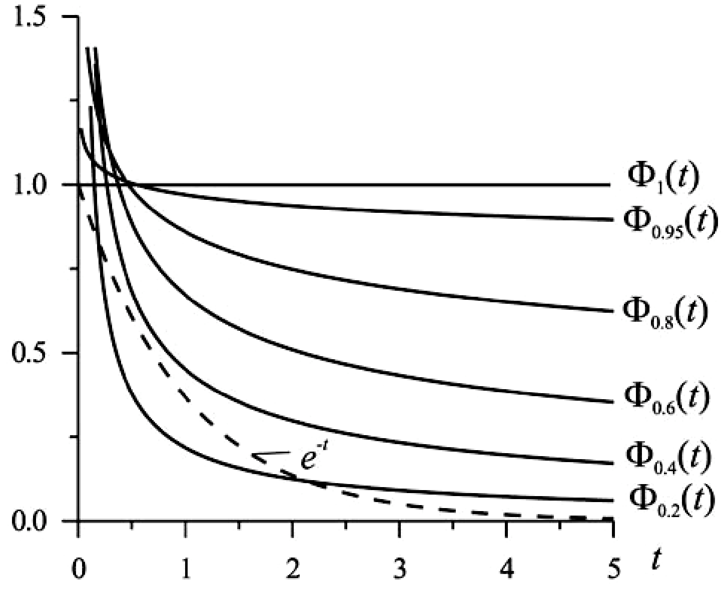

Рис.2

Много замечательных примеров появления степенных законов в других сферах человеческой деятельности — в музыке, архитектуре, живописи, лингвистике, экологии, психологии, акустике, не говоря уже о таких областях, как геометрия, теория вероятностей, геофизика — приведено в специально посвященной им книге М. Шредера [7]. На с.177, после замечания о степенном затухании звука в концертных залах с недостаточно сильным рассеянием, он пишет: «По-видимому, куда бы мы ни смотрели или что бы мы ни слушали, мы увидим или услышим, что экспоненциальное поведение встречается гораздо реже, чем принято думать».

Дробно-дифференциальное уравнение

Вот эти-то степенные функции мы и используем в качестве эредитарных ядер, представив эредитарный интеграл уравнения (4) в виде

$$ {}_a\mathrm{I}^{\mu}g(t) \equiv \int_a^t \Phi_\mu(t-\tau)g(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_a^t (t-\tau)^{\mu-1}g(\tau)d\tau, \quad g(\tau) \equiv \mathrm{K}f(\tau). \qquad (5) $$

Чтобы снять флер таинственности с выражения (5), напомним, что многократный интеграл последовательным применением правила Дирихле сводится к однократному (формула Коши):

$$ {}_a\mathrm{I}^{m}g(t) = \int_a^t dt_m \int_a^{t_m} dt_{m-1} \ldots \int_a^{t_2} dt_1 g(t_1) = \frac{1}{(m-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{m-1}g(\tau)d\tau. $$

Замена факториала гамма-функцией позволяет продолжить это выражение в область нецелых (и даже комплексных) показателей μи получить тем самым формулу (5). Таким образом, выбор в качестве ядра интегрального уравнения функции Φ_μ, описывающей реальные физические процессы, приводит нас к понятию интеграла *дробной кратности* (короче, *дробного интеграла*) ${}_a\mathrm{I}^{\mu}g(t)$.

Заметим теперь, что применение дифференциального оператора D_t к интегралу целой кратности m понижает кратность интеграла на единицу, применение его m раз дает подынтегральную функцию, а $n > m$ раз — ее $(n - m)$-ю производную $g^{(n-m)}(t)$. Распространив это правило на дробный интеграл (т.е. просто заменив m на $\mu > 0$), получаем выражение

$$ {}_a g^{(\nu)}(t) \equiv {}_a\mathrm{D}_t^{\nu}g(t) = \mathrm{D}_t^{n}\,{}_a\mathrm{I}^{\mu}g(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\,\mathrm{D}_t^{n}\int_a^t (t-\tau)^{\mu-1}g(\tau)d\tau, \ \nu = n-\mu, \ n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (6) $$

представляющее собой дробную производную Римана—Лиувилля порядка ν. Чтобы интеграл сходился на верхнем пределе, ограничим значения μ интервалом (0, 1].

При целых значениях порядка дробные производные совпадают с обычными, при нецелых сохраняют ряд свойств обычных производных: они являются левыми обратными операциями по отношению к дробному интегрированию

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{\nu}\,{}_a\mathrm{I}_t^{\nu}f(t) = f(t), \qquad (7) $$

обладают свойствами линейности

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{\nu}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1\,{}_a\mathrm{D}_t^{\nu}f_1(t) + c_2\,{}_a\mathrm{D}_t^{\nu}f_1(t), $$

ν-однородности

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{\nu}f(bt+c) = b^{-\nu}\,{}_{ab+c}\mathrm{D}_t^{\nu}f(t) = b^{-\nu}\,{}_{ab+c}f^{\nu}(t), \ b > 0 $$

и др. В то же время у них появляются специфические свойства, например, зависимость от предела a (*нелокальность*). «Таблица производных» также меняет вид, хотя формула дифференцирования степенной функции остается той же самой, только целое n заменяется дробным ν:

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{\nu}\Phi_\mu\,(t-a) = {}_a\mathrm{D}_t^{\nu}(t-a)^{\mu-1}/\Gamma(\mu) = (t-a)^{\mu-\nu-1}/\Gamma(\mu-\nu) = \Phi_{\mu-\nu}(t-a). $$

Два любопытных факта следуют отсюда: 1) дробная производная порядка $\nu(\nu > 0)$ от постоянной C *не равна нулю* (при $a \neq -\infty$),

$$ {}_aC^{(\nu)}(t) \equiv {}_a\mathrm{D}_t^{\nu}C = C(t-a)^{-\nu}/\Gamma(1-\nu), \quad (8)$$

и 2) ν-я производная функции $C\Phi_\nu$ равна нулю:

$$ {}_a[C\Phi_\nu(t-a)]^{(\nu)}(t) \equiv {}_a\mathrm{D}_t^{\nu}[C\Phi_\nu(t-a)] = 0.$$

Следовательно, $C\Phi_\nu$ играет роль постоянной для ν-й производной: если, скажем, $\phi(x)$ является решением уравнения

$$ {}_a\mathrm{D}_t^{\nu}\phi(t) = f(t),\ \nu > 0,$$

то и функция $\phi(t) + C\Phi_\nu(t-a)$ будет его решением (а функция $\phi(t) + C$ — нет!). Необычное, скажем, свойство, однако заметим, что производные всех *натуральных* порядков от постоянной равны нулю, а производная *нулевого* порядка равна самой постоянной. Изобразив эти значения точками на графике $\{\nu, C^{(\nu)}(t)\}$, легче смириться с поведением производной при нецелых ν (рис.3).

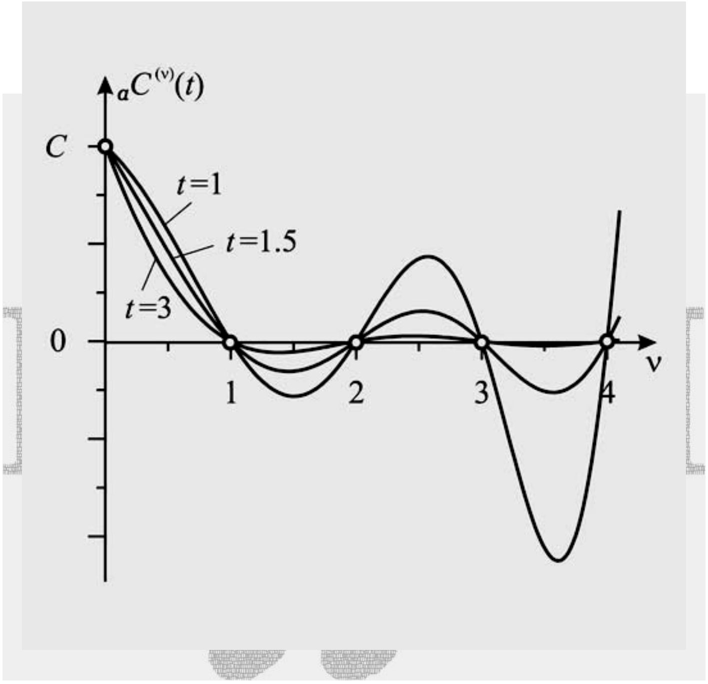

Рис.3

Важную роль в теоретическом и практическом отношениях играют интегральные преобразования Фурье и Лапласа дробных производных:

$$ {}_{-\infty}\tilde{f}^{(\nu)}(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\,{}_{-\infty}\mathrm{D}_t^{\nu}f(t)dt = (-i\omega)^{\nu}\tilde{f}(\omega), \quad (9)$$

$$ {}_a\hat{f}^{(\nu)}(\lambda) \equiv \int_a^{\infty} e^{-\lambda(t-a)}\,{}_a\mathrm{D}_t^{\nu}f(t)dt = \lambda^{\nu}\hat{f}(\omega),\ 0 < \nu < 1.$$

Иногда в качестве дробной производной используется обратная конструкция: вначале осуществляется n-кратное дифференцирование, затем — дробное интегрирование. Такие операции называются *дробными производными Капуто*, по имени итальянского математика, использовавшего их для решения некоторых задач теории упругости. Подробное описание различных форм и свойств дробных производных читатель может найти в монографии [8].

Вернемся теперь к уравнению (4) с интегральным оператором (5) и применим к обеим частям дифференциальный оператор D_t^{ν} с показателем $\nu\in(0,1]$. Пользуясь (7) и (8), приходим к дробно-дифференциальному уравнению эредитарного процесса — главному уравнению настоящей статьи:

$$ {}_aD_t^{\nu} f(t) = \mathrm{K}f(t) + \frac{(t-a)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}\, f(a), \quad 0 < \nu \le 1. \qquad (10)$$

Его применение к проблеме аномальной диффузии и связь с негауссовой статистикой подробно рассмотрены в работе [9], но здесь мы сосредоточимся на более простых механических моделях.

Как нагреть стержень?

Дробные производные иногда возникают в процессе решения задач, описываемых уравнениями с производными целых порядков. Рассмотрим в качестве примера полубесконечный стержень с изолированной боковой поверхностью, расположенный на полуоси $x \ge 0$ и всюду имеющий нулевую температуру (рис.4). Требуется найти тепловой ток (точнее, его x-проекцию) $q(t) \equiv j(0, t)$, который должен подводиться к стержню через его конец, чтобы, начиная с момента a, температура конца стержня $f(0,t)$ менялась со временем по заданному закону $T(t)$.

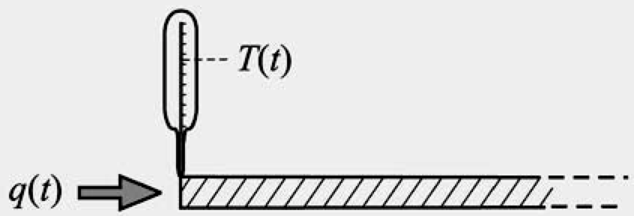

Рис.4

Ответ на этот вопрос обычно находят решением уравнения (1) для распределения температуры $f(x,t)$ дифференцированием по координате x и подстановкой затем $x = 0$:

$$ q(t) = -D\,\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \sqrt{\frac{D}{\pi}}\;\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{T(t')\,dt'}{\sqrt{t-t'}}\;. \qquad (11)$$

Вернемся к уравнению (1) и применим к нему метод факторизации:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - D\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) f(x,t) = \left(\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}} - \sqrt{D}\,\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}} + \sqrt{D}\,\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x,t) = 0.$$

Учитывая, что решение уравнения

$$\left(\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}} + \sqrt{D}\,\frac{\partial}{\partial x}\right) f(x,t) = 0$$

во всяком случае удовлетворяет и уравнению (1), приходим к соотношению

$$q(t) = \sqrt{D}\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}}\, T(t),$$

сопоставление которого с формулой (11) позволяет интерпретировать правую часть ее как производную порядка 1/2:

$$\sqrt{\frac{\partial}{\partial t}}\, T(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{d}{dt}\int\limits_a^t \frac{T(t')dt'}{\sqrt{t-t'}} = {}_a\mathrm{D}^{1/2}T(t) \equiv {}_aT^{(1/2)}(t).$$

Систематическое изложение этого подхода читатель найдет в книге [10]. Диффузионное соотношение, эквивалентное термодинамической формуле (9), легло в основу специального метода электрохимического анализа приэлектродных процессов [11].

Вязкая память

Рассмотрим теперь другую задачу — из гидродинамики. По горизонтальной поверхности $z = 0$ несжимаемой вязкой жидкости по заданному закону $V(t)$ вдоль оси OX движется больших размеров пластина, увлекая за собой слои жидкости (рис.5). Движение жидкости описывается уравнением Навье— Стокса

$$\rho\,\frac{\partial v(z,t)}{\partial t} = \eta\,\frac{\partial^2 v(z,t)}{\partial z^2}, \quad -\infty < t < \infty, \quad -\infty < z < 0,$$

где ρ— плотность жидкости, η— ее вязкость, $v(z,t)$ — скорость жидкости вдоль оси OX на глубине $z < 0$ в момент t.

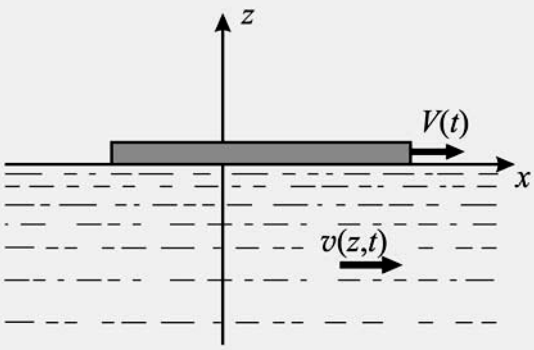

Рис.5

Предположив, что в далеком прошлом жидкость покоилась, так что интегралы Фурье

$$\tilde{v}(z,\omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} v(z,t)dt$$

сходятся при всех z, и что на бесконечной глубине она все время покоится, для преобразования Фурье получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-i\omega\rho\tilde{v}(z,\omega) = \eta\,\frac{d^2 v(z,\omega)}{dz^2}$$

с граничными условиями

$$\tilde{v}(0,\omega) = \tilde{V}(\omega), \quad \tilde{v}(-\infty,\omega) = 0.$$

Удовлетворяющее этим условиям решение имеет вид

$$\tilde{v}(z,\omega) = \tilde{V}(\omega)\exp(\sqrt{-i\omega\rho/\eta}z).$$

Дифференцируя его по z и вводя сдвиговое напряжение (силу трения, действующую на единицу площади плоскости)

$\sigma(z,t) = \eta\partial v(z,t)/\partial z$, получим:

$$\tilde{\sigma}(z,\omega) = \eta d\tilde{v}(z,\omega)/dz = (-i\omega)^{1/2}\sqrt{\eta\rho}\ \tilde{v}(z,\omega).$$

Согласно (8) это означает, что

$$\sigma(z,t) = \sqrt{\eta\rho}\,{}_{-\infty}\mathrm{D}_t^{1/2}v(z,t).$$

Заметим, что это довольно распространенный способ введения дробных производных: вначале выводится соотношение для преобразования Фурье или Лапласа, и если оно содержит дробную степень новой переменной, то обратное преобразование и приводит к дробной производной (см., например, [9]).

Физическая интерпретация полученного результата заключается в том, что наблюдаемое в момент времени t в точке (x,z) напряжение определяется распределением скоростей жидких частиц, приходящих из окрестности другой точки этого слоя (x',z), где они находились, скажем, в момент $t' < t$. В силу трансляционной инвариантности решения относительно x такое же распределение скоростей в этот момент (t') имело место и в точке наблюдения (x,z). Это и есть простейший механизм эредитарности — «механическая» память.

Можно привести и другие примеры, когда дробные производные возникают сами собой в процессе или результате решения: задача о таутохроне, об определении потенциала по зависимости периода колебаний от энергии, обратная задача теории рассеяния, движение шара в вязкой жидкости и т.д. Нас, однако, больше интересует, каким образом вводят дробные производные в исходные уравнения, с которых начинаются исследования.

Письмо Лопиталя

Историю идеи о производных дробного порядка принято отсчитывать от знаменитого письма Лопиталя Лейбницу с вопросом о том, *что может собой представлять производная порядка* 1/2: $d^{1/2}y/dx^{1/2}$ — и ответного письма Лейбница, содержащего пророческие слова: «…Из этого парадокса со временем будут выведены полезные следствия» (1695). Много воды утекло с тех пор, но сказать, что этот аппарат прочно вошел в обиход физиков и инженеров, еще нельзя. Причина не только в повышенном (кстати, совсем ненамного) математическом барьере, сколько в отсутствии простой интерпретации. Обычная производная легко возникает из рассуждений типа «приращение Δf дифференцируемой функции $f(x)$ пропорционально $h \equiv \Delta x$», но как быть с дробной производной?

В одной из книг по материаловедению записывается следующее выражение для тока тепла:

$$j(x,t) = -\lim_{b\to 0} k\ \frac{T(x,t) - T(x-b,\,t)}{b^{\nu}} = -k\ \frac{\partial^{\nu}T(x,t)}{\partial x^{\nu}}.$$

Почему ν не единица, разъясняется следующей фразой: «…необходимо воспользоваться аппаратом обобщенных дробных производных в целях анализа процессов переноса на структурах фрактальной геометрии».

Но не будем придираться к стилю, а просто подставим сюда любую гладкую функцию $f(x)$ (каковой, в частности, и является приводимая на следующей странице книги асимптотика $T(x,t)$):

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x-h)}{h^\nu}=\begin{cases}0, & \nu<1,\\ f'(x), & \nu=1,\\ \infty, & \nu>0.\end{cases}$$

Так что ничего содержательного отсюда при $\nu\neq 1$ не получить.

Чтобы исправить положение, вспомним, что производную целого порядка n, первоначально введенную как результат n-кратного дифференцирования, можно представить также как предел отношения приращения (разности) функции n-го порядка Δy к n-й степени приращения аргумента h^n,

$$f^{(n)}(x)=\lim_{h\to 0}h^{-n}\Delta^n f(x)=\lim_{h\to 0}h^{-n}[1-\exp(-h\mathrm{D}_x)]^n f(x)=$$

$$=\lim_{h\to 0}h^{-n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}e^{-hk\mathrm{D}_x}f(x),\ n=1,2,3,\ \ldots,$$

и последующей замены целого n на нецелое ν:

$$f^{(\nu)}(x)=\lim\ h^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\nu}{k}e^{-hk\mathrm{D}_x}f(x),$$

где

$$\binom{\nu}{k}=\frac{\Gamma(\nu+1)}{k!\,\Gamma(\nu-k+1)}$$

— обобщенный биномиальный коэффициент. Введенные таким образом операции называют *дробными производными Грюнвальда—Летникова*, и можно показать, что они согласуются с производными Римана—Лиувилля.

Но как быть с физикой? Можно ли найти какие-то простые слова, логическим продолжением которых стало бы довольно громоздкое соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\nu}{k}e^{-hk\mathrm{D}_x}f(x)\propto\Delta x^\nu,\quad \Delta x\to 0?$$

А если нет (что весьма правдоподобно), то как *вывести* уравнение процесса, содержащее дробные производные?

Шифровка Гука

В 1676 г. Гук разослал известным ученым того времени, включая самого Ньютона, шифрованное послание *ceiiinosssttuv* и дал на расшифровку два года, рискуя лишиться самого большого открытия в своей жизни, но уж очень он хотел, чтобы победа была безупречной. Спустя два года он опубликовал решение этой задачи: *ut tensio sic vis*, что в переводе с латинского означает: *каково растяжение, такова и сила*, или, в современном виде,

$\sigma(t)=\mathrm{const}\cdot\varepsilon(t)$.

Мы обозначили обычным образом напряжение и деформацию упругого тела в хорошо известном со школьной скамьи *законе Гука*, снабдив их временным аргументом с намерением показать, что мы собираемся рассматривать переменные нагрузки. Напишем теперь в этих же обозначениях закон Ньютона для вязкой жидкости:

$\sigma(t)=\mathrm{const}\cdot\mathrm{D}_t\varepsilon(t)$.

Существуют, однако, материалы, занимающие промежуточное положение между этими двумя (например, полимеры) и называемые поэтому вязкоупругими. Как может выглядеть для них подобное соотношение? По-видимому, самое остроумное решение этой проблемы было предложено в [12]. Заметив, что первом из уравнений $\varepsilon(t)$ можно представить как $D_t^0 \varepsilon(t)$, авторы предложили для вязкоупругой среды уравнение

$$\sigma(t) = \mathrm{const}\cdot D_t^{\nu} \varepsilon(t),$$

где ν— порядок дробной производной, который можно непрерывно менять от 0 до 1, проходя все промежуточные режимы вязкоупругости.

Разумеется, такой шаг нельзя назвать *выводом*, скорее это своего рода интерполяция между двумя моделями процессов, описываемыми производны ми разных целых порядков. Но ведь и два других закона, окаймляющие этот, тоже не выведены, а *предложены*, они — феноменологические, их справедливость устанавливается не проверкой чистоты вычислений, а сопоставлением с экспериментом. В этом отношении дробно-дифференциальный за кон вязкоупругости имеет все права на существование, он подтвержден многочисленными экспериментами, самые ранние из которых относятся к 1921 г. Более того, в рамках этой модели выполнен широкий круг теоретических исследований по реологии, описывающей свойства неньютоновых жидкостей. В отечественной реологии это направление основано Ю.Н. Работновым, который не использовал дробно-дифференциальную терминологию, но широко пользовался интегральными уравнениями Вольтерры со степенными ядрами и ввел термин «наследственная механика» [13]. За дальнейшим развитием этого направления можно проследить по книге [14].

Полимерные цепочки

Теоретическое обоснование степенной эредитарности в реологии вязкоупругих жидкостей дает модель полимера, предложенная Раусом. Молекула полимера в этой модели представляется в виде цепочки N атомов или атомных групп (мономеров), последовательно соединенных между собой упругими связями (невесомыми пружинками с жесткостью K). Соединяющие соседние мономеры отрезки средней длины a могут свободно вращаться вокруг своих концов. Молекула погружена в вязкую ньютоновскую жидкость при температуре T, со стороны которой на каждый мономер действует случайная сила — гауссов тепловой шум. К крайнему мономеру прилагается сила $F(t)$, равная нулю при $t \le 0$ и направленная вдоль оси OX. Статистические расчеты показывают, что под действием этой силы среднее значение x-координаты край него мономера полубесконечной цепочки растет по закону

$$\langle X(t)\rangle \approx C\int_0^t (t-\tau)^{1/2} D_\tau F(\tau)\,d\tau, \qquad (13)$$

где C — постоянная, пропорциональная a и обратно пропорциональная абсолютной температуре. Закономерность (13) объясняется тем, что вследствие вязкоупругих сил мономеры цепочки вовлекаются в коллективное движение вдоль OX не сразу все, а постепенно: число мономеров, вовлеченных импульсом силы, приложенным в момент τ, растет пропорционально $(t-\tau)^{1/2}$ (рис.6). Заменив в этом выражении $\langle X(t)\rangle$ деформацией ε, а F — напряженностью σ, представим его в виде

$$\varepsilon(t) = \mathrm{const}\cdot {}_0I_t^{3/2} D_t \sigma(t).$$

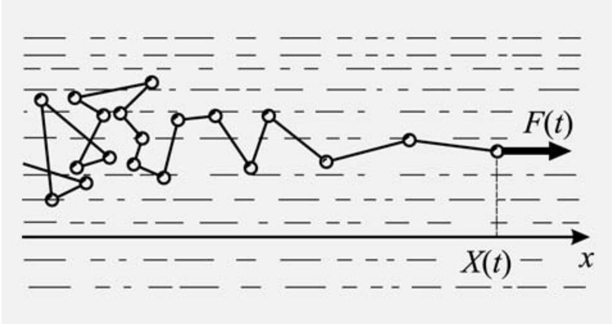

Рис.6

Применяя к обеим частям этого равенства дробно-дифференциальный оператор $D_t^{1/2}$ и учитывая, что

$$D_t^{1/2}{}_0I_t^{3/2}D_t\sigma(t) = {}_0I_tD_t\sigma(t) = \int_0^t \frac{d\sigma}{d\tau}\,d\tau = \sigma(t) - \sigma(0) = \sigma(t),$$

приходим к уравнению

$$D_t^{1/2}\varepsilon(t) = \text{const}\cdot\sigma(t),$$

согласующемуся с формулой (10) при $\nu = 1/2$. В [15] показано, что более общее соотношение с $\nu \neq 1/2$ соответствует более сложной, чем линейная цепочка, макромолекулярной структуре — *фрактальной сети*.

Блуждание в бане

Рассмотрим броуновское движение с позиций статистической физики, воспользовавшись моделью, описанной в книге [16].

Тяжелая частица (примем ее массу равной 1, так что ее импульс будет равен скорости v), окруженная термостатом («баней»), состоящим из N легких гармонических осцилляторов с массами m_n, совершает одномерное движение под действием внешнего потенциала $U(x)$. Гамильтониан такой системы H представляется в виде суммы гамильтонианов частицы H_0, термостата H_T и взаимодействия W, взятого в билинейной форме:

$$W = -\sum_{n=1}^{N} b_n q_n x, \quad b_n = \text{const}.$$

Интегрируя систему уравнений термостата, находя закон движения частицы и усредняя его по ансамблю начальных состояний термостата, приходим к эредитарной системе уравнений для средней координаты $\langle x(t)\rangle$и сред ней скорости броуновской частицы $\langle v(t)\rangle$, заменивших собой гамильтонову систему (1):

$$\frac{d\langle x(t)\rangle}{dt} = \langle v(t)\rangle, \; \frac{d\langle v(t)\rangle}{dt} = F(x,t) - \int_0^t K(t-\tau)\langle v(\tau)\rangle d\tau.$$

В правой части последнего уравнения наряду с эффективной силой $F(x,t)$ имеется эредитарный интегральный член с ядром памяти, содержащим не известные, не определяемые моделью коэффициенты связи b_n и собственные частоты осцилляторов ω_n, в силу чего эредитарное ядро не может быть вычислено. Но мы видим здесь *механизм* возникновения эредитарности (*памяти*) как *качества* процесса. Что же касается *количественного* аспекта — конкретной формы ядра, то для его детализации нужны дополнительные предположения. Первое, что приходит в голову, — аппроксимировать ядро экспоненциальной функцией — не приводит к желаемому результату: такое ядро оказывается несовместимым с гамильтоновой динамикой. Совместимая с ней аппроксимация имеет вид [17]

$$K(t) = \frac{A\tau_0^{\beta}}{(\tau_0^2 + t^2)^{\beta/2}}, \quad \beta > 0,$$

где A, τ_0 и β постоянные. При этом существуют два качественно различных режима: $\beta > 1$ и $\beta < 1$. В первом из них интеграл от ядра сходится и образует временной масштаб τ, отделяющий микроскопические времена $t < \tau_c$ от макроскопических $t > \tau_c$. В асимптотике больших времен мы приходим к дебаевской (экспоненциальной) релаксации. При $\beta < 1$ интеграл от ядра расходится: физического масштаба, разделяющего временную ось на две области, *не существует*. В *обобщенном пределе ВантГоффа* (т.е. при $A \to \infty$, $\tau_0 \to 0$ и $A\tau_0^{\beta} = Q = \text{const}$) мы приходим к уравнению

$$\frac{df(t)}{dt} + Q\int_0^t \frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\beta}} = F(t),$$

откуда до дробно-дифференциального уравнения (10) рукой подать.

Назад — к «первым принципам»?

Как же все-таки примирить свойство эредитарности с тем, что уравнения стандартных статистических систем — например, уравнение Больцмана для газов — начинаются с первой производной по времени, что указывает на отсутствие памяти таких систем? В чем физические причины памяти? Два предположения лежат в основе всей больцмановской кинетики и основанной на ее принципах неравновесной динамики: *мгновенность столкновений* и *экспоненциальный характер интервалов* между ними. Именно они дают первую производную в уравнении и определяют неэредитарность системы. Отказ от этих предположений (вполне резонный для не очень разреженных сред) действительно влечет за собой появление эредитарного интеграла по времени в кинетических уравнениях, описывающих приближение классической системы к равновесию [18].

Квантовая интерпретация механической памяти была дана ван Ховом [19]. Он обратил внимание на то, что марковский характер уравнения Паули обусловлен предположением о независимости случайных фаз возмущений волновых функций системы в течение *всего периода релаксации*. Отмечая допустимость этого приближения в случае малых возмущений, ван Хов повторил вывод, ограничив предположение о независимости фаз только *начальным моментом времени* и не используя условия малости возмущения. В результате вместо уравнения Паули (квантового аналога уравнения Больцмана) он получил интегро-дифференциальное *по времени* уравнение. На с.477 статьи ван Хов пишет: «Эта немарковская природа общего кинетического (в оригинале — master) уравнения может быть понята как следствие интерференционных эффектов между различными волнами, порождаемыми возмущением. Такие интерференционные эффекты появляются при определенных фазовых соотношениях. Они становятся пренебрежимо малыми при малых возмущениях, и это обстоятельство объясняет марковский характер уравнения низшего порядка (уравнения Паули. — *В.У.*)»

С этих работ начиналось физическое осмысление эредитарности с позиции «первых принципов», и в настоящее время интерес к этой проблеме воз обновился — сотни статей ежегодно публикуются на эту тему. И да простят меня их авторы за невозможность упомянуть их в короткой научно-популярной статье, но пусть попадется эта статья на глаза молодым исследователям и заинтересует их — и они без труда найдут и оценят работы последних лет.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Westerlund S. // Physica Scripta. 1991. V.43. P.P.174—179.*

2 *Гейзенберг В. // УФН. 1967. Т.91. Вып.4. С.731—733.*
3 *Вольтерра В. Теория функционалов и интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М., 1982.*
4 *Kohlrausch R. // Annalen der Physik und Chemie (Poggendorf). 1854. V.IV91. S.56— 82, 179—214.*
5 *Sessler G.M. Electrets. Berlin, 1980.*
6 *Jonscher A.K. Universal Relaxation Law. L., 1996.*
7 *Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. М.; Ижевск, 2001.*
8 *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.*
9 *Учайкин В.В. // УФН. 2003. Т.173. №8. С.847—876.*
10 *Бабенко Ю.И. Тепло и массоперенос. Л., 1986.*
11 *Oldham K.B., Spanier J. The Fractional Calculus. N.Y.; L., 1974.*
12 *Scott Blair G.W. // J. of Colloid Sciences. 1947. №2. P.21—32.*
13 *Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М., 1977.*
14 *Колокольчиков В.В. Отображения функционалов памяти. М., 2001.*
15 *Schiessel H., Friedrich Ch., Blumen A. Applications to problems in polymer physics and rheology // Applications of Fractional Calculus in Physics. Singapore, 2000. P.331— 376.*
16 *West B.J., Bologna M., Grigolini P. Physics of Fractal Operators. N.Y., 2003.*
17 *Zwanzig R.W. Lectures in Theoretical Physics. N.Y., 1961.*
18 *Prigogine I., Resibois P. // Physica. 1961. V.27. P.629—646*
19 *Hove L.van // Physica. 1957. V.23. P.441—480.*