Обобщенные группы Риордана и нулевые обобщенные матрицы Паскаля

Е. В. Бурлаченко

1 Введение

Матрицы, которые мы будем рассматривать, соответствуют операторам в пространстве формальных степенных рядов над полем действительных чисел. Исходя из этого, строкам и столбцам матриц поставим в соответствие производящие функции их элементов, т.е. формальные степенные ряды. Таким образом, выражение $Aa(x) = b(x)$ означает, что вектор-столбец, умножаемый на матрицу A, имеет производящую функцию $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, результирующий вектор-столбец имеет производящую функцию $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. n-й коэффициент ряда $a(x)$ обозначим $[x^n]\, a(x)$. (n,m)-й элемент, n-ю строку и n-й столбец матрицы A будем обозначать соответственно $A_{n,m} = (A)_{n,m}$, $[n, \to]\, A$, Ax^n.

Матрица $(f(x), xg(x))$, n-й столбец которой имеет производящею функцию $f(x)\, x^n g^n(x)$ называется матрицей Риордана [2,11]. Она является произведением двух матриц, которые соответствуют операторам умножения и композиции рядов:

$$(f(x), xg(x)) = (f(x), x)\,(1, xg(x)),$$

$$(f(x), x)\, a(x) = f(x)\, a(x), \qquad (1, xg(x))\, a(x) = a(xg(x)),$$

$$(f(x), xg(x))\,(b(x), xa(x)) = (f(x)\, b(xg(x)), xg(x)\, a(xg(x))).$$

Матрицы $(f(x), xg(x))$, $f_0 \neq 0$, $g_0 \neq 0$, образуют группу, которая называется группой Риордана. Матрицы вида $(f(x), x)$, образуют нормальную подгруппу, называемую подгруппой Аппеля, матрицы вида $(1, xg(x))$ образуют подгруппу, называемую подгруппой Лагранжа. Подгруппа матриц $(g(x), xg(x))$, изоморфная подгруппе Лагранжа, называется подгруппой Белла.

Матрицы

$$|e^x|^{-1}\,(f(x), xg(x))\,|e^x| = (f(x), xg(x))_E,$$

где $|e^x|$ – диагональная матрица: $|e^x|\, x^n = x^n/n!$, называются экспоненциальными матрицами Риордана [23,25]. В связи с этим, матрицы $(f(x), xg(x))$ называются обыкновенными матрицами Риордана. Обозначим $[n, \to]\,(f(x), xg(x))_E = s_n(x)$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n(\varphi)}{n!} x^n = f(x) \exp(\varphi x g(x)).$$

В общем случае (но при $f_0, g_0 \neq 0$) последовательность полиномов $s_n(x)$ называется последовательностью Шеффера; в случае $g(x) = 1$ – последовательностью Аппеля, в случае $f(x) = 1$ – биномиальной последовательностью. Свойства последовательностей Шеффера являются предметом изучения теневого исчисления [19].

Матрица P, степень которой определяется тождеством

$$P^{\varphi} = \left(\frac{1}{1-\varphi x}, \frac{x}{1-\varphi x}\right) = (e^{\varphi x}, x)_E,$$

называется матрицей Паскаля.

Матрицы

$$|c(x)|^{-1}(f(x), xg(x))|c(x)| = (f(x), xg(x))_{c(x)}$$

где $|c(x)|$ – диагональная матрица: $|c(x)|x^n = c_n x^n$, $c_n \neq 0$, называются обобщенными матрицами Риордана [23] (другие варианты: (c)-матрицы Риордана [8], W-матрицы Риордана [24]). Обозначим $[n, \to](f(x), xg(x))_{c(x)} = \hat{s}_n(x)$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{s}_n(\varphi) x^n = f(x) c(\varphi x g(x)).$$

Последовательность $\{\hat{s}_n(x)\}_{n\geq 0}$ называется обобщенной последовательностью Шеффера, последовательность $\{c_n \hat{s}_n(x)\}_{n\geq 0}$ называется последовательностью Боаса-Бака. Свойства этих последовательностей являются предметом изучения неклассического теневого исчисления [19].

Матрица Паскаля дает пример неоднозначности, которая возникает при классификации обобщенных матриц Риордана. Она является элементом как обыкновенной, так и экспоненциальной группы Риордана. Проблема, вызванная этой неоднозначностью, решается в статье [3] . Эта статья содержит перечень всех троек рядов $f_1(x)$, $g_1(x)$, $c(x)$, $f_1(0) = 1$, $g_1(0) \neq 0$, таких что

$$(f_1(x), xg_1(x))_{c(x)} = (f_2(x), xg_2(x)) \tag{1}$$

и соответственно

$$(f_1(x), xg_1(x)) = (f_2(x), xg_2(x))_{\tilde{c}(x)}, \qquad \tilde{c}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{c_n}.$$

В [3] уравнение (1) представлено в более простом виде. Пусть D – матрица оператора дифференцирования, $Dx^n = nx^{n-1}$. Обозначим $(x, x)D = \tilde{D}$, $\tilde{D}x^n = nx^n$. Так как

$$D(f(x), x) = (f(x), x)D + (f'(x), x), \qquad D(1, xg(x)) = \left((xg(x))', xg(x)\right)D,$$

то $(f(x), xg(x))\tilde{D} = L(f(x), xg(x))$, где

$$L = \left(\frac{g(x)}{(xg(x))'}, x\right)\tilde{D} - \left(\frac{xg(x)f'(x)}{(xg(x))'f(x)}, x\right).$$

Таким образом, уравнение (1) сводится к уравнению $|c(x)|^{-1}L_1|c(x)| = L_2$.

Для фиксированного $m \geq 1$ обозначим

$$c^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^* x^n, \qquad c_0^* = 1, \qquad c_{km+i}^* = (c_m^*)^k c_i^*, \qquad k \geq 0, \qquad 0 \leq i < m.$$

Все решения уравнения (1) содержатся в следующих шести пунктах, некоторые из которых пересекаются (мы ограничимся условием $g(0) = 1$):

1.

$$c(x) = c^*(x),$$

$$(f(x^m), xg(x^m))_{c(x)} = (f(x^m/c_m), xg(x^m/c_m)).$$

2.

$$c_{n_0} = 1, \qquad c_n = \varphi c_n^*, \qquad n_0 = 0; \qquad c_{n_0} = \varphi c_{n_0}^*, \qquad c_n = c_n^*, \qquad n_0 > 0,$$

$$\left(g^{-n_0}(x^m), xg(x^m)\right)_{c(x)} = \left(g^{-n_0}(x^m/c_m), xg(x^m/c_m)\right),$$

где $g\left(x\right)=1+\sum_{n=q}^{\infty}g_nx^n$, $q>0$, $g_q\neq 0$, $n_0<qm$.

3.

$$ {}_{km+i}=\begin{cases} \left(c_m\right)^k c_i, & \text{если} \quad i\neq i_0 \quad \text{или} \quad i=i_0,\ k\leq k_0,\\ \left(c_m\right)^{k-k_0-1}c_{n_0+m}, & \text{если} \quad i=i_0,\ k>k_0, \end{cases} $$

где $n_0=k_0m+i_0$, $k_0\geq 0$, $0\leq i_0<m$, $n_0>0$,

$$ \left(\left(1+\varphi x^m\right)^{\frac{n_0}{m}},x\left(1+\varphi x^m\right)^{-\frac{1}{m}}\right)_{c(x)}=\left(\left(1+\frac{\varphi}{c_m}x^m\right)^{\frac{n_0}{m}},x\left(1+\frac{\varphi}{c_m}x^m\right)^{-\frac{1}{m}}\right). $$

4.

$$ c_{km+i}=\frac{1}{\left(\alpha+i/m\ \right)_k}\left(\alpha c_m\right)^k c_i, $$

где $\left(\alpha\right)_k=\alpha\left(\alpha+1\right)...\left(\alpha+k-1\right)$, $\alpha\neq -n/m$, $n\geq 0$,

$$ \left(\exp\left(\frac{\varphi}{m}x^m\right),x\right)_{c(x)}=\left(\left(1-\frac{\varphi}{m\alpha c_m}x^m\right)^{-\alpha},x\left(1-\frac{\varphi}{m\alpha c_m}x^m\right)^{-\frac{1}{m}}\right). $$

5.

$$ c_{km+i}=\frac{\left(\beta+i/m\ \right)_k}{\left(\alpha+i/m\ \right)_k}\left(\frac{\alpha c_m}{\beta}\right)^k c_i, $$

$\alpha\neq\beta$, $\alpha,\beta\neq -n/m$, $n\geq 0$,

$$ \left(\left(1+\varphi x^m\right)^{-\frac{b}{m}},x\left(1+\varphi x^m\right)^{-\frac{1}{m}}\right)_{c(x)}=\left(f_2\left(x\right),xg_2\left(x\right)\right), $$

$$ f_2\left(x\right)=\left(1+\frac{\varphi}{c_m}\left(1+\frac{\left(b+1\right)\left(\beta-\alpha\right)}{\alpha\left(1+m\beta\right)}\right)x^m\right)^{-\frac{b}{m\left(1+\frac{(b+1)(\beta-\alpha)}{\alpha(1+m\beta)}\right)}}, $$

$$ g_2\left(x\right)=\left(1+\frac{\varphi}{c_m}\left(1+\frac{\left(b+1\right)\left(\beta-\alpha\right)}{\alpha\left(1+m\beta\right)}\right)x^m\right)^{-\frac{1}{m}}, $$

$b\neq -n$, $n\geq 0$. Если $b=m\beta$, то

$$ \left(\left(1+\varphi x^m\right)^{-\beta},x\left(1+\varphi x^m\right)^{-\frac{1}{m}}\right)_{c(x)}=\left(\left(1+\frac{\varphi\beta}{\alpha c_m}x^m\right)^{-\alpha},x\left(1+\frac{\varphi\beta}{\alpha c_m}x^m\right)^{-\frac{1}{m}}\right). $$

6.

$$ c_{km+i}=\frac{\beta+i/m}{\beta+k+i/m}\left(\frac{\beta+1}{\beta}c_m\right)^k c_i, $$

$\beta\neq -n/m$, $n\geq 0$,

$$ \left(g^{m\beta}\left(x^m\right),xg\left(x^m\right)\right)_{c(x)}=\left(\left(xg\left(x^m/\beta^*c_m\ \right)\right)'g^{m\beta-1}\left(x^m/\beta^*c_m\ \right),xg\left(x^m/\beta^*c_m\ \right)\right), $$

где $\beta^*=\left(\beta+1\right)/\beta$. Если положить $c_i=\beta/\left(\beta+i/m\ \right)$, $c_m=\beta/\left(\beta+1\right)$, то $c_n=m\beta/\left(m\beta+n\right)$. Отметим пересечение с пунктом 5: $g\left(x^m\right)=\left(1+\varphi x^m\right)^{-1/m}$, $\alpha=\beta+1$.

С обобщенными матрицами Риордана связано следующее обобщение биномиальных коэффициентов [7]. Для коэффициентов формального степенного ряда $b\left(x\right)$, $b_0=0$; $b_n\neq 0$, $n>0$, обозначим

$$ b_0!=1, \qquad b_n!=\prod_{m=1}^{n}b_m, \qquad \binom{n}{m}_b=\frac{b_n!}{b_m!b_{n-m}!}; \qquad \binom{n}{m}_b=0, \qquad m>n. $$

Тогда

$$ \binom{n}{m}_b=\binom{n-1}{m-1}_b+\frac{b_n-b_m}{b_{n-m}}\binom{n-1}{m}_b. $$

Обозначим
$$P_{c(x)}=\left(c\left(x\right),x\right)_{c(x)},\qquad P_{c(x)}x=b\left(x\right).$$
Тогда
$$b_n=\frac{c_1c_{n-1}}{c_n},\qquad c_n=\frac{c_1^n}{b_n!},\qquad \left(P_{c(x)}\right)_{n,m}=\frac{c_mc_{n-m}}{c_n}=\binom{n}{m}_b.$$

В общем случае для обобщенных биномиальных коэффициентов будем использовать обозначение $\left(P_{c(x)}\right)_{n,m}=\binom{n}{m}_{c(x)}$. В различных конкретных случаях будем использовать альтернативные обозначения. Так как $P_{c(x)}=P_{c(\varphi x)}$, примем для однозначности, что $c_1=1$. Матрицу $P_{c(x)}$ назовем обобщенной матрицей Паскаля. Каждой матрице $P_{c(x)}$ поставим в соответствие обобщенную группу Риордана, элементом которой она является. Ряд $c\left(x\right)$ назовем параметром группы, матрицу $P_{c(x)}$ назовем центральным элементом группы. Согласно пункту 5 множества решений уравнения (1), матрица Паскаля является элементом каждой обобщенной группы Риордана с параметром $c\left(x\right)=\left(1+\varphi x\right)^{1/\varphi}$, $\varphi\neq 1/n$, $n\geq 0$:
$$P=\left(\left(1+\varphi x\right)^{\frac{1}{\varphi}},\frac{x}{1+\varphi x}\right)_{c(x)}=P_{c(x)}\left(1,\frac{x}{1+\varphi x}\right)_{c(x)}.$$
Экспоненциальную группу Риордана можно рассматривать как предел множества этих групп при стремлении φ к нулю. При достижении этого предела, матрица Паскаля становится центральным элементом группы.

Целью настоящей статьи является расширение множества обобщенных матриц Паскаля за счет матриц особого вида и соответствующее расширение множества обобщенных групп Риордана за счет групп связанных с этими матрицами. В разделе 2 множество обобщенных матриц Паскаля рассматривается как группа относительно умножения Адамара. Вводится специальная система матриц, которая ведет к представлению о «нулевых» обобщенных матрицах Паскаля, каждая из которых является предельным случаем определенного множества обобщенных матриц Паскаля. Произведение Адамара таких матриц друг с другом и с обычными обобщенными матрицами Паскаля обозначим P_0. Примерами матрицы P_0 являются матрица q-биномиальных коэффициентов при $q=-1$ и треугольник Паскаля по модулю 2. В разделе 3 дается представление об алгебре матриц, элементом которой является матрица P_0. Обозначим эту алгебру $[\![P_0]\!]$. В разделах 3, 4 рассматриваются некоторые особенные группы в алгебрах $[\![P_0]\!]$ при определенных P_0. В разделе 5 дается представление о группе $R\left(P_0\right)$, аналогичной обобщенной группе Риордана $R\left(P_{c(x)}\right)$. Дается аналог теоремы обращения Лагранжа для этой группы и рассматриваются соответствующие примеры.

2 Специальная система обобщенных матриц Паскаля

Рассмотрим множество матриц $\left(a\left(x\right)|P_{c(x)}\right)$, где $P_{c(x)}$ – фиксированная обобщенная матрица Паскаля, $a\left(x\right)\in\mathbb{R}\left[\left[x\right]\right]$,
$$\left(a\left(x\right)|P_{c(x)}\right)_{n,m}=a_{n-m}\left(P_{c(x)}\right)_{n,m}=a_{n-m}\binom{n}{m}_{c(x)}.$$

Теорема 2.1. *Матрицы $\left(a\left(x\right)|P_{c(x)}\right)$ образуют алгебру, изоморфную алгебре формальных степенных рядов с операцией умножения*
$$a\left(x\right)\circ b\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}_{c(x)}a_{n-i}b_i\right)x^n.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\varphi\left(a(x)\,|P_{c(x)}\right)+\beta\left(b(x)\,|P_{c(x)}\right)=\left(\varphi a(x)+\beta b(x)\,|P_{c(x)}\right).$$

Обобщенные биномиальные коэффициенты удовлетворяют тождеству

$$\binom{n}{m+i}_{c(x)}\binom{m+i}{m}_{c(x)}=\binom{n}{m}_{c(x)}\binom{n-m}{i}_{c(x)}.$$

Следовательно, справедливо тождество

$$\sum_{i=0}^{n-m}\binom{n}{m+i}_{c(x)}a_{n-m-i}\binom{m+i}{m}_{c(x)}b_i=\binom{n}{m}_{c(x)}\sum_{i=0}^{n-m}\binom{n-m}{i}_{c(x)}a_{n-m-i}b_i,$$

или

$$\left(a(x)\,|P_{c(x)}\right)\left(b(x)\,|P_{c(x)}\right)=\left(a(x)\circ b(x)\,|P_{c(x)}\right). \qquad \square$$

Замечание 2.1. Отметим что

$$\left(a(x)\,|P_{c(x)}\right)=\left(a(c,x),x\right)_{c(x)},\qquad a(c,x)=|c(x)|\,a(x).$$

С точки зрения теории обобщенных матриц Риордана, алгебра матриц $\left(a(x)\,|P_{c(x)}\right)$ изоморфна алгебре производящих функций $a(c,x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nc_nx^n$ с обычной операцией умножения

$$a(c,x)\,b(c,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}_{c(x)}a_{n-i}b_i\right)c_nx^n.$$

Мы взяли за основу другой изоморфизм, так как в дальнейшем намерены обобщить операцию $a(x)\circ b(x)$ на случаи, которые выходят за рамки этой теории.

Множество обобщенных матриц Паскаля является группой относительно умножения Адамара (обозначим эту операцию знаком $\times$):

$$P_{c(x)}\times P_{g(x)}=P_{c(x)\times g(x)},\qquad c(x)\times g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_ng_nx^n.$$

Введем систему матриц

$$P_{\varphi,q}=P_q(\varphi)=P_{c(\varphi,q,x)},\qquad c(\varphi,q,x)=\left(\sum_{n=0}^{q-1}x^n\right)\left(1-\frac{x^q}{\varphi}\right)^{-1},\qquad q>1.$$

Тогда

$$\frac{c_{qm+j}c_{q(n-m)+i-j}}{c_{qn+i}}=\begin{cases}\varphi^n/\varphi^m\varphi^{n-m}=1, i\ge j,\\ \varphi^n/\varphi^m\varphi^{n-m-1}=\varphi, i<j,\end{cases}$$

или

$$\left(P_{\varphi,q}\right)_{n,m}=\begin{cases}1, n\,(\mathrm{mod}q)\ge m\,(\mathrm{mod}q),\\ \varphi, n\,(\mathrm{mod}q)<m\,(\mathrm{mod}q).\end{cases}$$

Например, $P_{\varphi,2}$, $P_{\varphi,3}$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&1&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&\varphi&1&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&1&1&1&0&0&0&0&0&\dots\\1&\varphi&1&\varphi&1&0&0&0&0&\dots\\1&1&1&1&1&1&0&0&0&\dots\\1&\varphi&1&\varphi&1&\varphi&1&0&0&\dots\\1&1&1&1&1&1&1&1&0&\dots\\1&\varphi&1&\varphi&1&\varphi&1&\varphi&1&\dots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&1&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&1&1&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&\varphi&\varphi&1&0&0&0&0&0&\dots\\1&1&\varphi&1&1&0&0&0&0&\dots\\1&1&1&1&1&1&0&0&0&\dots\\1&\varphi&\varphi&1&\varphi&\varphi&1&0&0&\dots\\1&1&\varphi&1&1&\varphi&1&1&0&\dots\\1&1&1&1&1&1&1&1&1&\dots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $P_{\varphi,q}\times P_{c(x)}$ удовлетворяют тождеству

$$\left(P_{\varphi,q}\times P_{c(x)}\right)_{n,m+i}\left(P_{\varphi,q}\times P_{c(x)}\right)_{m+i,m}=\left(P_{\varphi,q}\times P_{c(x)}\right)_{n,m}\left(P_{\varphi,q}\times P_{c(x)}\right)_{n-m,i}$$

при любых значениях φ, поэтому имеет смысл рассматривать и случай $\varphi=0$, так как ему соответствует алгебра матриц $\left(a\left(x\right)|P_{q,0}\times P_{c(x)}\right)$,

$$\left(a\left(x\right)|P_{0,q}\times P_{c(x)}\right)_{n,m}=a_{n-m}\left(P_{0,q}\times P_{c(x)}\right)_{n,m},$$

аналогичная алгебре матриц $\left(a\left(x\right)|P_{\varphi,q}\times P_{c(x)}\right)$, $\varphi\neq0$, но содержащая делители нуля. Например,

$$\left(xa\left(x^2\right)|P_{0,2}\times P_{c(x)}\right)\left(xb\left(x^2\right)|P_{0,2}\times P_{c(x)}\right)=0.$$

Ясно, что в этом случае ряд $c\left(\varphi,q,x\right)$ не определен. Матрицу $P_{0,q}\times P_{c(x)}$, а также произведение Адамара таких матриц, назовем нулевой обобщенной матрицей Паскаля.
Пример 2.1. Нулевая обобщенная матрица Паскаля появляется при рассмотрении множества матриц $P_{g(q,x)}$:

$$\left(P_{g(q,x)}\right)_{n,1}=[x^n]\frac{x}{\left(1-x\right)\left(1-qx\right)}=\sum_{m=0}^{n-1}q^m,\qquad q\in\mathbb{R}.$$

Здесь $g\left(0,x\right)=\left(1-x\right)^{-1}$, $g\left(1,x\right)=e^x$. В остальных случаях (q-теневое исчисление [19]), кроме $q=-1$,

$$g\left(q,x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(q-1\right)^n}{\left(q^n-1\right)!}x^n,\qquad\left(q^n-1\right)!=\prod_{m=1}^{n}\left(q^m-1\right),\qquad\left(q^0-1\right)!=1.$$

Матрицы $P_{g(q,x)}$, $P_{g(q,x)}^{-1}$ можно также определить следующим образом:

$$P_{g(q,x)}x^n=x^n\prod_{m=0}^{n}\left(1-q^mx\right)^{-1},\qquad[n,\to]P_{g(q,x)}^{-1}=\prod_{m=0}^{n-1}\left(x-q^m\right).$$

При $q=-1$ получаем матрицы $P_{g(-1,x)}$, $P_{g(-1,x)}^{-1}$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&1&0&0&0&0&0&\dots\\1&0&1&0&0&0&0&\dots\\1&1&1&1&0&0&0&\dots\\1&0&2&0&1&0&0&\dots\\1&1&2&2&1&1&0&\dots\\1&0&3&0&3&0&1&\dots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},\qquad\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\dots\\-1&1&0&0&0&0&0&\dots\\-1&0&1&0&0&0&0&\dots\\1&-1&-1&1&0&0&0&\dots\\1&0&-2&0&1&0&0&\dots\\-1&1&2&-2&-1&1&0&\dots\\-1&0&3&0&-3&0&1&\dots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},$$

где ряд $g\left(-1,x\right)$ не определен. Так как

$$\left(P_{g(-1,x)}\right)_{2n+i,2m+j}=\left[x^{2n+i}\right]\frac{\left(1+x\right)^{1-j}x^{2m+j}}{\left(1-x^2\right)^{m+1}}=\begin{cases}\binom{n}{m},i\geq j,\\0,i<j,\end{cases}\qquad i,j=0,1,$$

то

$$P_{g(-1,x)}=P_{0,2}\times P_{c(x)},\qquad c\left(x\right)=\left(1+x\right)e^{x^2}:$$

$$c_{2n+i}=\frac{1}{n!},\qquad0\leq i<2;\qquad c_{2n-i}=\frac{1}{\left(n-1\right)!},\qquad0<i\leq2,$$

$$\left(P_{c(x)}\right)_{2n+i,2m+j}=\begin{cases}\dbinom{n}{m},i\geq j,\\ n\dbinom{n-1}{m},i<j.\end{cases}$$

Замечание 2.2. Матрица $P_{g(-1,x)}$ это A051159, [20]. В [10] эта матрица названа треугольником Паули-Паскаля по следующей причине. Пусть σ_x, σ_y – спиновые матрицы Паули: $\sigma_x^2=\sigma_y^2=1$, $\sigma_x\sigma_y=-\sigma_y\sigma_x$. Тогда

$$(\sigma_x+\sigma_y)^n=\sum_{m=0}^{n}\left(P_{g(-1,x)}\right)_{n,m}\sigma_x^{n-m}\sigma_y^m.$$

Каждая «ненулевая» обобщенная матрица Паскаля раскладывается в произведение Адамара матриц $P_{\varphi,q}$. Разложение сводится к разложению первого столбца матрицы $P_{c(x)}$, – обозначим его $b\left(x\right)$, – в произведение Адамара первых столбцов матриц $P_{\varphi,q}$, – обозначим их $b_{\varphi,q}\left(x\right)$:

$$\left[x^n\right]b_{\varphi,q}\left(x\right)=\begin{cases}1,n\left(\mathrm{mod}q\right)\neq 0,\\ \varphi,n\left(\mathrm{mod}q\right)=0,\end{cases}$$

так что

$$P_{c(x)}=P_2\left(b_2\right)\times P_3\left(b_3\right)\times P_4\left(b_4/b_2\right)\times P_5\left(b_5\right)\times P_6\left(b_6/b_2b_3\right)\times P_7\left(b_7\right)\times$$

$$\times P_8\left(b_8/b_4\right)\times P_9\left(b_9/b_3\right)\times P_{10}\left(b_{10}/b_2b_5\right)\times P_{11}\left(b_{11}\right)\times P_{12}\left(b_{12}b_2/b_4b_6\right)\times ...$$

и т.д. Пусть e_q – базисный вектор бесконечномерного векторного пространства над полем действительных чисел, нумерация базисных векторов которого начинается с двойки. Отображение множества обобщенных матриц Паскаля в бесконечномерное векторное пространство, такое, что $P_{\varphi,q}\to e_q\log|\varphi|$, является групповым гомоморфизмом, ядро которого состоит из всех инволюций группы обобщенных матриц Паскаля, т.е. из матриц, ненулевые элементы которых равны ± 1. Таким образом, множество обобщенных матриц Паскаля, элементами которых являются неотрицательные числа, является бесконечномерным векторным пространством. Нулевые обобщенные матрицы Паскаля можно рассматривать как бесконечно удаленные точки пространства.

Вторая специальная система обобщенных матриц Паскаля $P_{[\varphi,q]}$ связана с системой матриц $P_{\varphi,q}$ следующим образом:

$$P_{[\varphi,q]}=P_{\varphi,q}\times P_{\varphi,q^2}\times P_{\varphi,q^3}\times ...=\prod_{k=1}^{\infty}\times P_{\varphi,q^k}.$$

В [4] матрицы $P_{[\varphi,q]}$ названы фрактальными обобщенными матрицами Паскаля из-за их фрактальных свойств. Обозначим $P_{[q,q]}=P_{[q]}$. Например,

$$P_{[2]}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&2&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&4&2&4&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&1&2&2&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&2&1&4&1&2&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&8&4&8&2&8&4&8&1&0&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&1&4&4&2&2&4&4&1&1&0&0&0&0&0&0&\dots\\1&2&1&8&2&4&2&8&1&2&1&0&0&0&0&0&\dots\\1&1&1&1&2&2&2&2&1&1&1&1&0&0&0&0&\dots\\1&4&2&4&1&8&4&8&1&4&2&4&1&0&0&0&\dots\\1&1&2&2&1&1&4&4&1&1&2&2&1&1&0&0&\dots\\1&2&1&4&1&2&1&8&1&2&1&4&1&2&1&0&\dots\\1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&\dots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}.$$

Ряд $P_{[q]}x$ является производящей функцией распределения делителей q^k в ряду натуральных чисел. Например,

$$P_{[2]}x = x + 2x^2 + x^3 + 4x^4 + x^5 + 2x^6 + x^7 + 8x^8 + x^9 + 2x^{10} + x^{11} + 4x^{12} + ...,$$

$$P_{[3]}x = x + x^2 + 3x^3 + x^4 + x^5 + 3x^6 + x^7 + x^8 + 9x^9 + x^{10} + x^{11} + 3x^{12} + ...$$

Так как ряд Px является производящей функцией последовательности натуральных чисел, то

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} \times P_{[p_k]},$$

где $\{p_k\}_{k\geq 1}$ последовательность простых чисел. Отметим что $P_{[q]} = P_{c(x)}$,

$$c\left(x\right)=\left(\sum_{n=0}^{q-1}x^n\right)c\left(\frac{x^q}{q}\right)=\prod_{n=0}^{\infty}w_q\left(x^{q^n}/q^{\frac{q^n-1}{q-1}}\right),\qquad w_q\left(x\right)=\left(\sum_{n=0}^{q-1}x^n\right).$$

Матрицы $P_{[b]}$, под общим названием b-биномиальный треугольник, были введены в [1] в связи с обобщением теорем о делимости биномиальных коэффициентов.

Нулевые фрактальные обобщенные матрицы Паскаля $P_{[0,q]}$ будут рассмотрены в разделе 5.

3 Алгебра $[\![P_0]\!]$

Пусть P_0– нулевая обобщенная матрица Паскаля общего вида. Обозначим

$$\left(P_0\right)_{n,m}=\binom{n}{m}_0,\qquad \left(a\left(x\right)|P_0\right)_{n,m}=a_{n-m}\binom{n}{m}_0,$$

$$\left(a\left(x\right)|P_0\right)\left(b\left(x\right)|P_0\right)=\left(a\left(x\right)\circ b\left(x\right)|P_0\right),\qquad \left(a\left(x\right)|P_0\right)^n=\left(a^{(n)}\left(x\right)|P_0\right).$$

Для случая $a_0 = 1$ определим степень и логарифм матрицы $\left(a\left(x\right)|P_0\right)$ стандартным образом:

$$\left(a\left(x\right)|P_0\right)^{\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\varphi}{n}\left(a\left(x\right)-1|P_0\right)^n=\left(a^{(\varphi)}\left(x\right)|P_0\right),$$

$$\log\left(a\left(x\right)|P_0\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}\left(a\left(x\right)-1|P_0\right)^n=\left(\log\circ a\left(x\right)|P_0\right).$$

Для случая $b_0=0$ определим экспоненту:

$$\exp\left(b\left(x\right)|P_0\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(b\left(x\right)|P_0\right)^n}{n!}=\left(\exp\circ b\left(x\right)|P_0\right).$$

Тогда

$$\left(a^{(\varphi)}\left(x\right)|P_0\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^n}{n!}\left(\log\circ a\left(x\right)|P_0\right)^n.$$

Алгебру матриц $\left(a\left(x\right)|P_0\right)$ обозначим $[\![P_0]\!]$. Алгебру формальных степенных рядов, изоморфную алгебре $[\![P_0]\!]$, обозначим $[\![P_0,a\left(x\right)]\!]$. Для этой алгебры мы имеем:

$$a^{(\varphi)}\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\varphi}{n}\left(a\left(x\right)-1\right)^{(n)},\qquad \log\circ a\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{n}\left(a\left(x\right)-1\right)^{(n)},$$

$$\exp\circ b\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^{(n)}\left(x\right)}{n!},\qquad a^{(\varphi)}\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^n}{n!}\left(\log\circ a\left(x\right)\right)^{(n)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\left(\varphi\right)x^n,$$

где $c_n\left(\varphi\right)$ полиномы от φ степени $\le n$, аналогичные полиномам свертки [13],

$$a^{(\varphi)}\left(x\right)\circ a^{(\beta)}\left(x\right)=a^{(\varphi+\beta)}\left(x\right),\qquad a^{(\varphi)}\left(x\right)\circ b^{(\varphi)}\left(x\right)=\left(a\left(x\right)\circ b\left(x\right)\right)^{(\varphi)},$$

$$\log\circ a^{(\varphi)}\left(x\right)=\varphi\log\circ a\left(x\right),\qquad \log\circ\left(a\left(x\right)\circ b\left(x\right)\right)=\log\circ a\left(x\right)+\log\circ b\left(x\right).$$

Пусть D – матрица оператора дифференцирования. Так как $\left(x,x\right)D$ – диагональная матрица, из тождества

$$\left(x,x\right)D\left(a\left(x\right),x\right)=\left(a\left(x\right),x\right)\left(x,x\right)D+\left(xa'\left(x\right),x\right)$$

следует тождество

$$\left(x,x\right)D\left(a\left(x\right)|P_0\right)=\left(a\left(x\right)|P_0\right)\left(x,x\right)D+\left(xa'\left(x\right)|P_0\right).$$

Для алгебры $[\![P_0,a\left(x\right)]\!]$ мы имеем:

$$x(a\left(x\right)\circ b\left(x\right))'=a\left(x\right)\circ xb'\left(x\right)+xa'\left(x\right)\circ b\left(x\right),$$

$$x\left(a^{(n)}\left(x\right)\right)'=na^{(n-1)}\left(x\right)\circ xa'\left(x\right),$$

$$x\left(a^{(\varphi)}\left(x\right)\right)'=xa'\left(x\right)\circ\varphi\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\varphi-1}{n-1}\left(a\left(x\right)-1\right)^{(n-1)}=\varphi a^{(\varphi-1)}\left(x\right)\circ xa'\left(x\right),$$

$$x(\log\circ a\left(x\right))'=xa'\left(x\right)\circ\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}\left(a\left(x\right)-1\right)^{(n-1)}=xa'\left(x\right)\circ a^{(-1)}\left(x\right).$$

Пусть $P_0=P_{0,q}$, $\binom{n}{m}_0=\binom{n}{m}_{0,q}$.

Теорема 3.1. *Матрицы $(x^{qp+i}|P_{0,q})$, $q-\lfloor q/2\rfloor\le i<q$, образуют замкнутую систему делителей нуля, т.е. произведения их друг с другом и с самими собой равны нулю.*

Доказательство. Так как

$$\left[x^n\right]a\left(x\right)\circ b\left(x\right)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}_{0,q}a_mb_{n-m},$$

то

$$x^{qp_1+i}\circ x^{qp_2+j}=\binom{q\left(p_1+p_2\right)+i+j}{qp_1+i}_{0,q}x^{q(p_1+p_2)+i+j}.$$

Пусть $i=q-\tilde{i}$, $j=q-\tilde{j}$, $0<\tilde{i},\tilde{j}\le\lfloor q/2\rfloor$. Тогда $(i+j)\,(\mathrm{mod}q)=q-\tilde{i}-\tilde{j}$. Таким образом, если $q-\lfloor q/2\rfloor\le i,j<q$, то $(i+j)\,(\mathrm{mod}q)<i$, или

$$\left(q\left(p_1+p_2\right)+i+j\right)(\mathrm{mod}q)<\left(qp_1+i\right)(\mathrm{mod}q),$$

$$\binom{q\left(p_1+p_2\right)+i+j}{qp_1+i}_{0,q}=0.\qquad\square$$

Таким образом, ряд вида

$$\eta_q\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=q-\lfloor q/2\rfloor}^{q-1}\eta_{qn+i}x^{qn+i}\tag{2}$$

является нильпотентом второго порядка. Ряд вида $\omega_q\left(x\right)=1+\eta_q\left(x\right)$ является унипотентом и может быть представлен в виде $\omega_q\left(x\right)=1+\log\circ\omega_q\left(x\right)$. Эти ряды образуют группу, элементы которой умножаются по правилу

$$\omega_{q,1}\left(x\right)\circ\omega_{q,2}\left(x\right)=1+\log\circ\left(\omega_{q,1}\left(x\right)\circ\omega_{q,2}\left(x\right)\right).$$

Для алгебры, связанной с произведением Адамара матриц $P_{0,q}$, справедливо следующее обобщение. Множество рядов вида (2) обозначим $\{\eta_q\left(x\right)\}$. Тогда матрица $\left(\eta_{q_i}\left(x\right)|\prod_{k=1}^{n}\times P_{0,q_k}\right)$, $1\le i\le n$, является нильпотентом второго порядка, матрица $\left(\eta_{q_i}\left(x\right)+\eta_{q_j}\left(x\right)|\prod_{k=1}^{n}\times P_{0,q_k}\right)$, $\eta_{q_i}\left(x\right)$, $\eta_{q_j}\left(x\right)\notin\{\eta_{q_i}\left(x\right)\}\bigcap\{\eta_{q_j}\left(x\right)\}$, является нильпотентом третьего порядка, …, матрица $\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_{q_i}\left(x\right)|\prod_{k=1}^{n}\times P_{0,q_k}\right)$, $\eta_{q_i}\left(x\right)\notin\{\eta_{q_i}\left(x\right)\}\bigcap\{\eta_{q_j}\left(x\right)\}$, $i\ne j$, является нильпотентом $n+1$ порядка. Алгебра, связанная с бесконечным произведением Адамара матриц $P_{0,q}$, содержит нильпотенты любых порядков, но только в случае если это произведение не содержит множитель $\prod_{i=1}^{\infty}\times P_{0,q+i}$. Например, алгебры, связанные с матрицами

$$\prod_{q=2}^{\infty}\times P_{0,q}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdots\\1&1&0&0&0&\cdots\\1&0&1&0&0&\cdots\\1&0&0&1&0&\cdots\\1&0&0&0&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},\qquad\prod_{q=3}^{\infty}\times P_{0,q}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdots\\1&1&0&0&0&\cdots\\1&1&1&0&0&\cdots\\1&0&0&1&0&\cdots\\1&0&0&0&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},$$

содержат нильпотенты соответственно только второго порядки и только второго и третьего порядка.

В двух следующих разделах мы рассмотрим конструкции, связанные с рядами вида $a\left(x^m\right)$. Отметим что так как $\left[x^{mn+i}\right]a\left(x^m\right)\circ b\left(x^m\right)=0$, $0<i<m$, то матрицы $\left(a\left(x^m\right)|P_0\right)$ образуют подалгебру алгебры $[\![P_0]\!]$. В общем случае она не изоморфна алгебре $[\![P_0]\!]$. В разделе 5 мы обнаружим такие изоморфизмы в алгебре $\left[\!\left[P_{[0,q]}\right]\!\right]$. Но этот случай является исключительным, обусловленным фрактальными свойствами матрицы $P_{[0,q]}$.

4 Блочные группы

Блочные матрицы являются атрибутом алгебр, связанных с матрицей $P_{0,q}$. Обозначим $\left[b\left(x\right)\right]_q=\sum_{n=0}^{q-1}b_nx^n$. Матрица $\left(\left[b\left(x\right)\right]_q a\left(x^q\right)|P_{0,q}\right)$ является блочной матрицей,

(n,m)-м блоком которой является матрица $a_{n-m}(b(x),x)_q$, где $(b(x),x)_q$ матрица состоящая из q первых строк матрицы $(b(x),x)$. Например,

$$\left([b(x)]_3 a\left(x^3\right)|P_{0,3}\right)=\begin{pmatrix} a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_0b_2 & a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_1b_0 & 0 & 0 & a_0b_0 & 0 & 0 & \ldots \\ a_1b_1 & a_1b_0 & 0 & a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & \ldots \\ a_1b_2 & a_1b_1 & a_1b_0 & a_0b_2 & a_0b_1 & a_0b_0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Следовательно, если $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, эти матрицы образуют группу, элементы которой умножаются по правилу

$$\left([b_1(x)]_q a_1(x^q)|P_{0,q}\right)\left([b_2(x)]_q a_2(x^q)|P_{0,q}\right)=\left([b_1(x)\,b_2(x)]_q a_1(x^q)\,a_2(x^q)|P_{0,q}\right).$$

Отметим пересечение этой группы с группой Риордана:

$$(a(x^q)|P_{0,q})=(a(x^q),x).$$

Теорема 4.1.

$$\log\left([b(x)]_q a(x^q)|P_{0,q}\right)=\left([\log b(x)]_q+\log a(x^q)|P_{0,q}\right).$$

Доказательство. Так как

$$\left([b(x)]_q a(x^q)|P_{0,q}\right)=\left([b(x)]_q|P_{0,q}\right)(a(x^q)|P_{0,q}),$$

то

$$[b(x)]_q a(x^q)=[b(x)]_q\circ a(x^q).$$

Тогда

$$\log\circ\left([b(x)]_q a(x^q)\right)=\log\circ[b(x)]_q+\log a(x^q).$$

Так как $\log(b(x),x)_q=(\log b(x),x)_q$, из вида матрицы $\left([b(x)]_q|P_{0,q}\right)$ вытекает, что $\log\circ[b(x)]_q=[\log b(x)]_q$. $\square$

Таким образом, так как

$$P_{0,q}=\left(\frac{1}{1-x}|P_{0,q}\right)=\left(\left[\frac{1}{1-x}\right]_q\frac{1}{1-x^q}|P_{0,q}\right),$$

то

$$\log P_{0,q}=\left(\sum_{m=1}^{q-1}\frac{x^m}{m}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{mq}}{m}|P_{0,q}\right).$$

Отметим что,

$$\left([b(x)]_q a(x^q)|P_{0,q}\right)^{\varphi}=\left([b^{\varphi}(x)]_q a^{\varphi}(x^q)|P_{0,q}\right).$$

Обобщением матрицы $P_{g(-1,x)}$ из примера 2.1. является матрица $P_{0,c_q(x)}$, связанная с матрицей $P_{c(x)}$ следующим образом:

$$P_{0,c_q(x)}=P_{c_q(x)}\times P_{0,q},\qquad c_q(x)=\left[(1-x)^{-1}\right]_q c(x^q),$$

$$\left[x^{qn+i}\right]c_q(x)=c_n,\qquad 0\le i<q;\qquad \left[x^{qn-i}\right]c_q(x)=c_{n-1},\qquad 0<i\le q,$$

$$\left(P_{c_q(x)}\right)_{qn+i,qm+j}=\begin{cases}\dbinom{n}{m}_{c(x)}, i\geq j,\\ \dbinom{n-1}{m}_{c(x)}\dbinom{n}{1}_{c(x)}, i<j.\end{cases}$$

Обозначения, используемые в разделе 3, закреплены за алгеброй матриц $(a\left(x\right)|P_0)$; для алгебры матриц $\left(a\left(x\right)|P_{c(x)}\right)=\left(a\left(c,x\right),x\right)_{c(x)}$ введем аналогичные обозначения:

$$\left(a\left(x\right)|P_{c(x)}\right)\left(b\left(x\right)|P_{c(x)}\right)=\left(a\left(x\right)*b\left(x\right)|P_{c(x)}\right),$$

$$\left(a\left(x\right)|P_{c(x)}\right)^{\varphi}=\left(a^{[\varphi]}\left(x\right)|P_{c(x)}\right),\qquad \log\left(a\left(x\right)|P_{c(x)}\right)=\left(\log *a\left(x\right)|P_{c(x)}\right).$$

Тогда

$$a\left(x\right)*b\left(x\right)=\left|c\left(x\right)\right|^{-1}a\left(c,x\right)b\left(c,x\right),$$

$$a^{[\varphi]}\left(x\right)=\left|c\left(x\right)\right|^{-1}a^{\varphi}\left(c,x\right),\qquad \log *a\left(x\right)=\left|c\left(x\right)\right|^{-1}\log a\left(c,x\right).$$

Матрица $\left(\left[b\left(x\right)\right]_q a\left(x^q\right)|P_{0,c_q(x)}\right)$ является блочной матрицей, (n,m)-м блоком которой является матрица

$$a_{n-m}\binom{n}{m}_{c(x)}\left(b\left(x\right),x\right)_q.$$

Следовательно, если $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, эти матрицы образуют группу, элементы которой умножаются по правилу

$$\left(\left[b_1\left(x\right)\right]_q a_1\left(x^q\right)|P_{0,c_q(x)}\right)\left(\left[b_2\left(x\right)\right]_q a_2\left(x^q\right)|P_{0,c_q(x)}\right)=$$

$$=\left(\left[b_1\left(x\right)b_2\left(x\right)\right]_q\left(a_1\left(x^q\right)*a_2\left(x^q\right)\right)|P_{0,c_q(x)}\right).$$

Теорема 4.2.

$$\log\left(\left[b\left(x\right)\right]_q a\left(x^q\right)|P_{0,c_q(x)}\right)=\left(\left[\log b\left(x\right)\right]_q+\left|c_q\left(x\right)\right|^{-1}\log a\left(c,x^q\right)|P_{0,c_q(x)}\right),$$

где $a\left(c,x^q\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n c_n x^{qn}$

Доказательство. Так как

$$\left(\left[b\left(x\right)\right]_q a\left(x^q\right)|P_{0,c_q(x)}\right)=\left(\left[b\left(x\right)\right]_q|P_{0,c_q(x)}\right)\left(a\left(x^q\right)|P_{0,c_q(x)}\right),$$

$$\left(\left[b\left(x\right)\right]_q|P_{0,c_q(x)}\right)=\left(\left[b\left(x\right)\right]_q|P_{0,q}\right),\quad \left(a\left(x^q\right)|P_{0,c_q(x)}\right)=\left(a\left(c,x^q\right),x\right)_{c_q(x)},$$

то

$$\log\circ\left(\left[b\left(x\right)\right]_q a\left(x^q\right)\right)=\left[\log b\left(x\right)\right]_q+\left|c_q\left(x\right)\right|^{-1}\log a\left(c,x^q\right).\qquad\square$$

Таким образом, так как

$$P_{0,c_q(x)}=\left(\left[\frac{1}{1-x}\right]_q\frac{1}{1-x^q}|P_{0,c_q(x)}\right),$$

то

$$\log P_{0,c_q(x)}=\left(\sum_{m=1}^{q-1}\frac{x^m}{m}+\left|c_q\left(x\right)\right|^{-1}\log c\left(x^q\right)|P_{0,c_q(x)}\right).$$

В частности, если $c\left(x\right)=e^x$, как в случае матрицы $P_{g(-1,x)}=P_{0,c_2(x)}$, то

$$\log P_{0,c_q(x)}=\left(\sum_{m=1}^{q-1}\frac{x^m}{m}+x^q|P_{0,c_q(x)}\right).$$

Отметим что,

$$\left(\left[b\left(x\right)\right]_q a\left(x^q\right)|P_{0,c_q(x)}\right)^{\varphi}=\left(\left[b^{\varphi}\left(x\right)\right]_q a^{[\varphi]}\left(x^q\right)|P_{0,c_q(x)}\right).$$

5 Фрактальные группы

В этом разделе мы рассмотрим некоторые детали алгебры $\left[\left[P_{[0,q]}\right]\right]$,

$$P_{[0,q]} = \prod_{k=1}^{\infty} \times P_{0,q^k}, \qquad \left(P_{[0,q]}\right)_{n,m} = \begin{cases} 1, n \left(\bmod q^k\right) \geq m \left(\bmod q^k\right), \\ 0, n \left(\bmod q^k\right) < m \left(\bmod q^k\right). \end{cases}$$

Примером матрицы $P_{[0,q]}$ является треугольник Паскаля по модулю 2:

$$P_{[0,2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\left(P_{[0,q]}\right)_{n,m} = \binom{n}{m}_{[0,q]}$. Тогда

$$\binom{q^k n + i}{q^k m + j}_{[0,q]} = \binom{n}{m}_{[0,q]} \binom{i}{j}_{[0,q]}, \qquad 0 \leq i, j < q^k, \tag{3}$$

$$\binom{n}{m}_{[0,q]} = \prod_{i=0}^{\infty} \binom{n_i}{m_i}_{[0,q]}, \quad n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i q^{ik}, \quad m = \sum_{i=0}^{\infty} m_i q^{ik}, \quad 0 \leq n_i, m_i < q^k.$$

Замечание 5.1. Матрицы $P_{[0,q]}$ были введены в [16], где они обозначены S_q и названы обобщенными матрицами Серпинского. В [16] они строятся следующим образом:

$$S_q = S_{q,1} \otimes S_{q,1} \otimes S_{q,1} \otimes ...,$$

где знак $\otimes$ означает произведение Кронекера, $S_{q,1}$ – матрица, состоящая из q первых строк матрицы S_q, т.е. $\left((1-x)^{-1}, x\right)_q$. Свойство, определяемое тождеством (3), может быть представлено в виде

$$S_q = S_{q,k} \otimes S_{q,k} \otimes S_{q,k} \otimes ...,$$

где $S_{q,k}$ – матрица, состоящая из q^k первых строк матрицы S_q. Свойства обобщенных матриц Серпинского и связанных с ними матриц изучаются в статьях [12,14,15,16,22]. В [12] вводятся матрицы $T^{(q)}$, которые строятся аналогично матрицам S_q, но на основании треугольника Паскаля:

$$T^{(q)} = T_k^{(q)} \otimes T_k^{(q)} \otimes T_k^{(q)} \otimes ...,$$

где $T_1^{(q)}$ – матрица, состоящая из q первых строк матрицы Паскаля, $T_k^{(q)}$ – матрица, состоящая из q^k первых строк матрицы $T^{(q)}$. Например, $T^{(2)} = P_{[0.2]}$,

$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 & 2 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\left(T^{(q)}\right)_{n,m} = \binom{n}{m}_q$. Тогда

$$\binom{n}{m}_q = \prod_{i=0}^{\infty} \binom{n_i}{m_i}, \qquad n = \sum_{i=0}^{\infty} n_i q^i, \qquad m = \sum_{i=0}^{\infty} m_i q^i, \qquad 0 \le n_i, m_i < q,$$

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}_q x^m = \prod_{i=0}^{\infty} \left(1 + x^{q^i}\right)^{n_i}.$$

В конце этого раздел мы рассмотрим нулевые обобщенные матрицы Паскаля, которые являются обобщением этих матриц.

Так как

$$\left[x^{q^k n+i}\right] [b(x)]_{q^k} a\left(x^{q^k}\right) = a_n b_i, \qquad 0 \le i < q^k,$$

то

$$\left([b(x)]_{q^k} a\left(x^{q^k}\right) | P_{[0,q]}\right)_{q^k n+i, q^k m+j} =$$

$$= a_{n-m} b_{i-j} \binom{q^k n + i}{q^k m + j}_{[0,q]} = a_{n-m} \binom{n}{m}_{[0,q]} b_{i-j} \binom{i}{j}_{[0,q]}, \qquad 0 \le i, j < q^k.$$

Таким образом, матрица $\left([b(x)]_{q^k} a\left(x^{q^k}\right) | P_{[0,q]}\right)$ является блочной матрицей, (n, m)-м блоком которой является матрица

$$a_{n-m} \binom{n}{m}_{[0,q]} \left([b(x)]_{q^k} | P_{[0,q]}\right)_{q^k},$$

где $\left([b(x)]_{q^k} | P_{[0,q]}\right)_{q^k}$ – матрица, состоящая из q^k первых строк матрицы $\left([b(x)]_{q^k} | P_{[0,q]}\right)$. Например,

$$\left([b(x)]_2 a\left(x^2\right) | P_{[0,2]}\right) = \begin{pmatrix} a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1b_0 & 0 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_1b_1 & a_1b_0 & a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2b_0 & 0 & 0 & 0 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_2b_1 & a_2b_0 & 0 & 0 & a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & \dots \\ a_3b_0 & 0 & a_2b_0 & 0 & a_1b_0 & 0 & a_0b_0 & 0 & \dots \\ a_3b_1 & a_3b_0 & a_2b_1 & a_2b_0 & a_1b_1 & a_1b_0 & a_0b_1 & a_0b_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\left([b(x)]_4 a\left(x^4\right)|P_{[0,2]}\right)=\begin{pmatrix}a_0b_0&0&0&0&0&0&0&0&\ldots\\a_0b_1&a_0b_0&0&0&0&0&0&0&\ldots\\a_0b_2&0&a_0b_0&0&0&0&0&0&\ldots\\a_0b_3&a_0b_2&a_0b_1&a_0b_0&0&0&0&0&\ldots\\a_1b_0&0&0&0&a_0b_0&0&0&0&\ldots\\a_1b_1&a_1b_0&0&0&a_0b_1&a_0b_0&0&0&\ldots\\a_1b_2&0&a_1b_0&0&a_0b_2&0&a_0b_0&0&\ldots\\a_1b_3&a_1b_2&a_1b_1&a_1b_0&a_0b_3&a_0b_2&a_0b_1&a_0b_0&\ldots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}.$$

Следовательно, если $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, эти матрицы образуют группу, элементы которой умножаются по правилу

$$\left([b_1(x)]_{q^k}a_1\left(x^{q^k}\right)|P_{0,q}\right)\left([b_2(x)]_{q^k}a_2\left(x^{q^k}\right)|P_{0,q}\right)=$$

$$=\left([b_1(x)\circ b_2(x)]_{q^k}\left(a_1\left(x^{q^k}\right)\circ a_2\left(x^{q^k}\right)\right)|P_{0,q}\right),$$

$[b_1(x)\circ b_2(x)]_q=[b_1(x)\,b_2(x)]_q$. Обозначим эту группу $B_{q,k}$. Обратимся к семейству «фрактальных» рядов ${}^q a(x)$, таких что

$${}^q a(x)=\left[{}^q a(x)\right]_q{}^q a\left(x^q\right)=\left[{}^q a(x)\right]_{q^k}{}^q a\left(x^{q^k}\right)=\prod_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{q^k-1}{}^q a_n x^{nq^{mk}}\right),$$

$${}^q a_0=1,\qquad {}^q a_{q^kn+i}={}^q a_n{}^q a_i,\qquad 0\le i<q^k,$$

$${}^q a_n=\prod_{i=0}^{\infty}{}^q a_{n_i},\qquad n=\sum_{i=0}^{\infty}n_iq^{ik}=n_0+q^k\left(n_1+q^k\left(n_2+...\right)\right),\qquad 0\le n_i<q^k.$$

Учитывая свойства коэффициентов $\binom{n}{m}_{[0,q]}$, мы имеем:

$$\left({}^q a(x)|P_{[0,q]}\right)_{q^kn+i,q^km+j}=\left({}^q a(x)|P_{[0,q]}\right)_{n,m}\left({}^q a(x)|P_{[0,q]}\right)_{i,j},\qquad 0\le i,j<q^k,$$

$$\left({}^q a(x)|P_{[0,q]}\right)_{n,m}=\prod_{i=0}^{\infty}\left({}^q a(x)|P_{[0,q]}\right)_{n_i,m_i},\ n=\sum_{i=0}^{\infty}n_iq^{ik},\ m=\sum_{i=0}^{\infty}m_iq^{ik},\ 0\le n_i,m_i<q^k.$$

Обозначим $[n,\to]\left({}^q a(x)|P_{[0,q]}\right)=u_n(x)$. Тогда

$$u_n(x)=\sum_{m=0}^{n}{}^q a_{n-m}x^m,\quad 0\le n<q;\qquad u_{q^kn+i}(x)=u_n\left(x^{q^k}\right)u_i(x),\quad 0\le i<q^k;$$

$$u_n(x)=\prod_{i=0}^{\infty}u_{n_i}\left(x^{q^{ik}}\right),\qquad n=\sum_{i=0}^{\infty}n_iq^{ik},\qquad 0\le n_i<q^k.$$

Теорема 5.1. *Подалгебра матриц* $\left(a\left(x^{q^k}\right)|P_{[0,q]}\right)$ *изоморфна алгебре* $\left[\left[P_{[0,q]}\right]\right]$.

Доказательство. Матрица $P_{[0,q]}$ является частным случаем матрицы $\left({}^q a(x)|P_{[0,q]}\right)$ и ее строки связаны соотношением $[n,\to]\,P_{[0,q]}=u_n(x)$, $\left[q^kn,\to\right]P_{[0,q]}=u_n\left(x^{q^k}\right)$. Тогда

$$[n,\to]\left(a(x)|P_{[0,q]}\right)=a_n(x),\qquad \left[q^kn,\to\right]\left(a\left(x^{q^k}\right)|P_{[0,q]}\right)=a_n\left(x^{q^k}\right),$$

$$[x^n]\,a(x)\circ b(x)=\left[x^{q^kn}\right]a\left(x^{q^k}\right)\circ b\left(x^{q^k}\right).\qquad\square$$

Теорема 5.2. *Матрицы* $\left({}^q a\,(x)\,|P_{[0,q]}\right)$ *образуют группу (обозначим ее* F_q*), изоморфную группе матриц* $\left({}^q a\,(x)\,,x\right)_q$.

Доказтельсто. Матрица $\left({}^q a\,(x)\,|P_{[0,q]}\right)$ является элементом каждой группы $B_{q,k}$. Следовательно,

$$ {}^q a\,(x)\circ {}^q b\,(x)=\left[{}^q a\,(x)\circ {}^q b\,(x)\right]_{q^k}\left({}^q a\left(x^{q^k}\right)\circ {}^q b\left(x^{q^k}\right)\right)={}^q c\,(x)\,. $$

Остается добавить, что $\left({}^q a\,(x)\,|P_{[0,q]}\right)_q=\left({}^q a\,(x)\,,x\right)_q$. $\square$

Теорема 5.3. *Матрицы* $\left({}^q a\left(x^{q^k}\right)|P_{\left[0,q^{k+1}\right]}\right)$ *образуют подгруппу в* $F_{q^{k+1}}$*, изоморфную группе* F_q.

Доказательство. Так как

$$ {}^q a\left(x^{q^k}\right)=\left(\sum_{n=0}^{q-1}{}^q a_n x^{nq^k}\right){}^q a\left(x^{q^{k+1}}\right)=\left[{}^q a\left(x^{q^k}\right)\right]_{q^{k+1}}{}^q a\left(x^{q^{k+1}}\right), $$

то $\left({}^q a\left(x^{q^k}\right)|P_{\left[0,q^{k+1}\right]}\right)\in F_{q^{k+1}}$. Остается заметить, что группа матриц $\left({}^q a\left(x^{q^k}\right),x\right)_{q^{k+1}}$ изоморфна группе матриц $\left({}^q a\,(x)\,,x\right)_q$. $\square$

Теорема 5.4.

$$ \log\circ{}^q a\,(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\log{}^q a\left(x^{q^k}\right)\right]_{q^{k+1}}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{q-1}l_n x^{nq^k}=\sum_{n=1}^{q-1}l_n\sum_{k=0}^{\infty}x^{nq^k}, $$

где $l_n=[x^n]\log{}^q a\,(x)$.

Доказательство. Обозначим

$$ \log\circ{}^q a\,(x)=\log\circ\left[{}^q a\,(x)\right]_{q^k}+\log\circ{}^q a\left(x^{q^k}\right)={}^q l\,(x)\,. $$

Так как $\log\circ\left[{}^q a\,(x)\right]_q=\left[\log{}^q a\,(x)\right]_q$ и по теореме 5.1. $\log\circ{}^q a\left(x^{q^k}\right)={}^q l\left(x^{q^k}\right)$, то

$$ {}^q l\,(x)=\left[\log{}^q a\,(x)\right]_q+{}^q l\,(x^q)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\log{}^q a\left(x^{q^k}\right)\right]_{q^{k+1}}. \qquad \square $$

Таким образом,

$$ \log P_{[0,q]}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{q-1}\frac{x^{nq^k}}{n}|P_{[0,q]}\right). $$

Обобщением матрицы $T^{(q)}$ из замечания 5.1. является матрица

$$ P_{0,{}^q c(x)}=P_{{}^q c(x)}\times P_{[0,q]}=\left|{}^q c\,(x)\right|^{-1}\left({}^q c\,(x)\,|P_{[0,q]}\right)\left|{}^q c\,(x)\right|, $$

$$ \left(P_{0,{}^q c(x)}\right)_{q^k n+i,q^k m+j}=\frac{{}^q c_{q^k n+i}\,{}^q c_{q^k(n-m)+i-j}}{{}^q c_{q^k m+j}}=\frac{{}^q c_n\,{}^q c_i\,{}^q c_{n-m}\,{}^q c_{i-j}}{{}^q c_m\,{}^q c_j}=\left(P_{0,{}^q c(x)}\right)_{n,m}\left(P_{0,{}^q c(x)}\right)_{i,j}, $$

$0\le i,j<q^k$, $i\ge j$. Здесь $T^{(q)}=P_{0,{}^q c(x)}$, ${}^q c\,(x)=[e^x]_q\,{}^q c\,(x^q)$. Алгебры $\left[\left[P_{[0,q]}\right]\right]$, $\left[\left[P_{0,{}^q c(x)}\right]\right]$ связаны следующим образом: если

$$ \left(a\,(x)\,|P_{[0,q]}\right)\left(b\,(x)\,|P_{[0,q]}\right)=\left(a\,(x)\circ b\,(x)\,|P_{[0,q]}\right), $$

$$ \left(a\,(x)\,|P_{0,{}^q c(x)}\right)\left(b\,(x)\,|P_{0,{}^q c(x)}\right)=\left(a\,(x)*b\,(x)\,|P_{0,{}^q c(x)}\right), $$

то

$$ a\,(x)*b\,(x)=\left|{}^q c\,(x)\right|^{-1}a\left({}^q c,x\right)\circ b\left({}^q c,x\right), \qquad a\left({}^q c,x\right)=\left|{}^q c\,(x)\right|a\,(x)\,. $$

6 Группа $R\left(P_0\right)$

Обозначим $\left(a\left(x\right)|P_0\right)=\left(a\left(x\right),1\right)_0$, где вид матрицы P_0 указывается отдельно. Построим матрицу $\left(1,a\left(x\right)\right)_0$ по правилу

$$\left(1,a\left(x\right)\right)_0x^n=\left(a^{(n)}\left(x\right),1\right)_0x^n=x^n\circ a^{(n)}\left(x\right).$$

Обозначим

$$\left(1,a\left(x\right)\right)_0b\left(x\right)=b(a\left(x\right))_0,\qquad \left(b\left(x\right),1\right)_0\left(1,a\left(x\right)\right)_0=\left(b\left(x\right),a\left(x\right)\right)_0.$$

Теорема 6.1. *Матрицы* $\left(b\left(x\right),a\left(x\right)\right)_0$, $b_0\neq 0$, $a_0\neq 0$ *образуют группу, элементы которой умножаются по правилу*

$$\left(b\left(x\right),a\left(x\right)\right)_0\left(f\left(x\right),g\left(x\right)\right)_0=\left(b\left(x\right)\circ f(a\left(x\right))_0,a\left(x\right)\circ g(a\left(x\right))_0\right)_0.$$

Доказательство. Так как

$$x^m\circ x^n=\binom{m+n}{n}_0x^{m+n},\qquad x^m\circ b\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\binom{m+n}{n}_0x^{m+n},$$

$$\left(1,a\left(x\right)\right)_0\left(x^m\circ b\left(x\right)\right)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\binom{m+n}{n}_0x^{m+n}\circ a^{(m+n)}\left(x\right)=$$

$$=x^m\circ a^{(m)}\left(x\right)\circ\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\circ a^{(n)}\left(x\right)=x^m\circ a^{(m)}\left(x\right)\circ b(a\left(x\right))_0,$$

то

$$\left(1,a\left(x\right)\right)_0\left(b\left(x\right),1\right)_0=\left(b(a\left(x\right))_0,a\left(x\right)\right)_0.$$

Тогда

$$\left(1,a\left(x\right)\right)_0\left(b\left(x\right)\circ c\left(x\right)\right)=b(a\left(x\right))_0\circ c(a\left(x\right))_0,$$
$$\left(1,a\left(x\right)\right)_0\left(x^m\circ b^{(m)}\left(x\right)\right)=x^m\circ a^{(m)}\left(x\right)\circ\left(b(a\left(x\right))_0\right)^{(m)},$$

или

$$\left(1,a\left(x\right)\right)_0\left(1,b\left(x\right)\right)_0=\left(1,a\left(x\right)\circ b(a\left(x\right))_0\right)_0.\qquad\square$$

Обобщенную группу Риордана с центральным элементом $P_{c(x)}$ обозначим $R\left(P_{c(x)}\right)$; группу матриц $\left(b\left(x\right),a\left(x\right)\right)_0$ обозначим $R\left(P_0\right)$. Терминология, используемая для группы Риордана, будет использоваться и для группы $R\left(P_0\right)$. Подгруппы матриц $\left(b\left(x\right),1\right)_0$, $\left(1,a\left(x\right)\right)_0$ будут называться соответственно подгруппой Аппеля и подгруппой Лагранжа. Подгруппа матриц $\left(a\left(x\right),a\left(x\right)\right)_0$, изоморфная подгруппе Лагранжа, будет называться подгруппой Белла. Так как $x\circ a\left(x\right)=x\circ b\left(x\right)$ для бесконечного множества рядов $b\left(x\right)$, то в практическом плане матрицы $\left(a\left(x\right),a\left(x\right)\right)_0$ имеют преимущество перед матрицами $\left(1,a\left(x\right)\right)_0$. Следующий пример это иллюстрирует.

Пример 6.1. Здесь $P_0=P_{0,2}$;

$$\left(1,\frac{1}{1-x^2}\right)_0\left(1,\frac{1}{1-x}\right)_0=\left(1,\frac{1}{1-x-x^2}\right)_0,$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdots\\0&1&0&0&0&0&0&\cdots\\0&0&1&0&0&0&0&\cdots\\0&1&0&1&0&0&0&\cdots\\0&0&2&0&1&0&0&\cdots\\0&1&0&3&0&1&0&\cdots\\0&0&3&0&4&0&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdots\\0&1&0&0&0&0&0&\cdots\\0&0&1&0&0&0&0&\cdots\\0&1&2&1&0&0&0&\cdots\\0&0&2&0&1&0&0&\cdots\\0&1&4&3&4&1&0&\cdots\\0&0&3&0&4&0&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdots\\0&1&0&0&0&0&0&\cdots\\0&0&1&0&0&0&0&\cdots\\0&2&2&1&0&0&0&\cdots\\0&0&4&0&1&0&0&\cdots\\0&5&10&6&4&1&0&\cdots\\0&0&14&0&8&0&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix};$$

$$\left(\frac{1}{1-x^2},\frac{1}{1-x^2}\right)_0\left(\frac{1}{1-x},\frac{1}{1-x}\right)_0=\left(\frac{1}{1-x-x^2},\frac{1}{1-x-x^2}\right)_0,$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&\cdots\\0&1&0&0&0&0&\cdots\\1&0&1&0&0&0&\cdots\\0&2&0&1&0&0&\cdots\\1&0&3&0&1&0&\cdots\\0&3&0&4&0&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&\cdots\\1&1&0&0&0&0&\cdots\\1&0&1&0&0&0&\cdots\\1&2&3&1&0&0&\cdots\\1&0&3&0&1&0&\cdots\\1&3&9&4&5&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&\cdots\\1&1&0&0&0&0&\cdots\\2&0&1&0&0&0&\cdots\\3&4&3&1&0&0&\cdots\\5&0&6&0&1&0&\cdots\\8&14&21&8&5&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}.$$

Этот пример также является иллюстрацией пересечения группы $R\left(P_{0,q}\right)$ с обыкновенной группой Риордана: $\left(b\left(x^q\right),a\left(x^q\right)\right)_0=\left(b\left(x^q\right),xa\left(x^q\right)\right)$. В общем случае, пересечение групп $R\left(P_{c(x)}\times P_{0,q}\right)$ и $R\left(P_{c(x)}\right)$ имеет вид

$$\left(b\left(x^q\right),a\left(x^q\right)\right)_0=\left(\left|c\left(x\right)\right|b\left(x^q\right),x\left|c\left(x\right)\right|a\left(x^q\right)\right)_{c(x)}.$$

Отметим, что $R\left(P_{c(x)}\right)\bigcap R\left(P_0\right)=(1,\varphi)_0=(1,\varphi x)$ для любых $P_{c(x)}$ и P_0. Таким образом, $a(\varphi)_0=a\left(\varphi x\right)$,

$$(1,\varphi)_0(b\left(x\right),a\left(x\right))_0=\left(b\left(\varphi x\right),\varphi a\left(\varphi x\right)\right)_0,\qquad(b\left(x\right),a\left(x\right))_0(1,\varphi)_0=\left(b\left(x\right),\varphi a\left(x\right)\right)_0.$$

Следующая теорема является аналогом теоремы обращения Лагранжа в ее обобщенном виде.

Теорема 6.2. *Каждый формальный степенной ряд $a\left(x\right)\in[\![P_0,a\left(x\right)]\!]$, $a_0=1$, связан с семейством рядов ${}_{(\beta)}a\left(x\right)\in[\![P_0,a\left(x\right)]\!]$, ${}_{(0)}a\left(x\right)=a\left(x\right)$, таких что*

$${}_{(\beta)}a\big(a^{(-\beta)}\left(x\right)\big)_0=a\left(x\right),\qquad a\big({}_{(\beta)}a^{(\beta)}\left(x\right)\big)_0={}_{(\beta)}a\left(x\right),$$

$$[x^n]\,{}_{(\beta)}a^{(\varphi)}\left(x\right)=[x^n]\left(1-x\beta(\log\circ a\left(x\right))'\right)\circ a^{(\varphi+\beta n)}\left(x\right)=\frac{\varphi}{\varphi+\beta n}\,[x^n]\,a^{(\varphi+\beta n)}\left(x\right),$$

$$[x^n]\left(1+x\beta\big(\log\circ{}_{(\beta)}a\left(x\right)\big)'\right)\circ{}_{(\beta)}a^{(\varphi)}\left(x\right)=\frac{\varphi+\beta n}{\varphi}\,[x^n]\,{}_{(\beta)}a^{(\varphi)}\left(x\right)=[x^n]\,a^{(\varphi+\beta n)}\left(x\right).$$

Доказательство. Если матрицы $\left(1,a^{(-1)}\left(x\right)\right)_0$, $a_0=1$, $(1,b\left(x\right))_0$, $b_0=1$, являются взаимно обратными, то

$$\left(1,a^{(-1)}\left(x\right)\right)_0b\left(x\right)=a\left(x\right),\qquad(1,b\left(x\right))_0a\left(x\right)=b\left(x\right).$$

Так как

$$x\big(x^n\circ b^{(n)}\left(x\right)\big)'=x^n\circ x\big(b^{(n)}\left(x\right)\big)'+x(x^n)'\circ b^{(n)}\left(x\right)=$$
$$=x^n\circ nb^{(n-1)}\left(x\right)\circ xb'\left(x\right)+nx^n\circ b^{(n)}\left(x\right)=nx^n\circ b^{(n)}\left(x\right)\circ\left(1+x(\log\circ b\left(x\right))'\right),$$

то

$$(x,x)\,D(1,b\left(x\right))_0=\left(\left(1+x(\log\circ b\left(x\right))'\right),b\left(x\right)\right)_0(x,x)\,D,$$
$$(1,b\left(x\right))_0xa'\left(x\right)=\left(1+x(\log\circ b\left(x\right))'\right)^{(-1)}\circ xb'\left(x\right).$$

Отсюда находим:

$$\left(1+x(\log\circ b\left(x\right))',b\left(x\right)\right)_0^{-1}=\left(1-x(\log\circ a\left(x\right))',a^{(-1)}\left(x\right)\right)_0.$$

Обозначим

$$[x^n]\,a^{(m)}\left(x\right)=a_n^{(m)},\qquad[x^n]\left(1-x(\log\circ a\left(x\right))'\right)\circ a^{(m)}\left(x\right)=c_n^{(m)},$$

$$a_m(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(m+n)}x^n,\qquad c_m(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n^{(m+n)}x^n.$$

Построим матрицу A, m-й столбец которой имеет производящую функцию $x^m\circ a_m(x)$, и матрицу C, m-й столбец которой имеет производящую функцию $x^m\circ c_m(x)$:

$$A=\begin{pmatrix}a_0^{(0)}&0&0&0&\cdots\\a_1^{(1)}&a_0^{(1)}&0&0&\cdots\\a_2^{(2)}&a_1^{(2)}&a_0^{(2)}&0&\cdots\\a_3^{(3)}&a_2^{(3)}&a_1^{(3)}&a_0^{(3)}&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}\times P_0,\qquad C=\begin{pmatrix}c_0^{(0)}&0&0&0&\cdots\\c_1^{(1)}&c_0^{(1)}&0&0&\cdots\\c_2^{(2)}&c_1^{(2)}&c_0^{(2)}&0&\cdots\\c_3^{(3)}&c_2^{(3)}&c_1^{(3)}&c_0^{(3)}&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}\times P_0.$$

Очевидно, что

$$[n,\to]\,A=[n,\to]\left(a^{(n)}(x),1\right)_0,\quad [n,\to]\,C=[n,\to]\left(\left(1-x(\log a(x))'\right)\circ a^{(n)}(x),1\right)_0.$$

Так как

$$\left(1-xa'(x)\circ a^{(-1)}(x)\right)\circ a^{(m)}(x)=a^{(m)}(x)-\frac{x}{m}\left(a^{(m)}(x)\right)',$$

или

$$[x^n]\left(1-x(\log\circ a(x))'\right)\circ a^{(m)}(x)=\frac{m-n}{m}[x^n]\,a^{(m)}(x),$$

то

$$\left[x^{m+n}\right]A\left(x^m\circ\left(1-x(\log\circ a(x))'\right)\circ a^{(-m)}(x)\right)=\left[x^{m+n}\right]C\left(x^m\circ a^{(-m)}(x)\right)=$$

$$=[x^n]\left(1-x(\log\circ a(x))'\right)\circ a^{(n)}(x)=\begin{cases}1,n=0,\\0,n>0.\end{cases}$$

Таким образом,

$$A=\left(1+x(\log\circ b(x))',b(x)\right)_0,\qquad C=(1,b(x))_0,$$

$$[x^n]\left(1+x(\log\circ b(x))'\right)\circ b^{(m)}(x)=\frac{m+n}{m}[x^n]\,b^{(m)}(x)=[x^n]\,a^{(m+n)}(x),$$

$$[x^n]\,b^{(m)}(x)=[x^n]\left(1-x(\log\circ a(x))'\right)\circ a^{(m+n)}(x)=\frac{m}{m+n}[x^n]\,a^{(m+n)}(x).$$

Обозначим

$$\left(1,a^{(-\beta)}(x)\right)_0^{-1}=\left(1,{}_{(\beta)}a^{(\beta)}(x)\right)_0.$$

Тогда

$$[x^n]\,{}_{(\beta)}a^{(\beta m)}(x)=\frac{\beta m}{\beta m+\beta n}[x^n]\,a^{(\beta m+\beta n)}(x).$$

Пусть $c_n(\varphi)$ – полиномы свертки ряда $a(x)$. Тогда

$${}_{(\beta)}a^{(\varphi)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi}{\varphi+\beta n}c_n(\varphi+\beta n)\,x^n.\qquad\square$$

Пример 6.2. Рассмотрим аналог экспоненциального ряда из семейства рядов ${}^q a(x)$:

$${}^q\varepsilon(x)=[e^x]_q\,{}^q\varepsilon(x^q),\qquad {}^q\varepsilon(x)\in\left[\left[P_{[0,q]},a(x)\right]\right],\qquad \log\circ{}^q\varepsilon(x)=\sum_{k=0}^{\infty}x^{q^k},$$

$$[x^n]\,{}^q\varepsilon^{(\varphi)}(x)=\frac{\varphi^{\{n\}}}{(n)!},\quad \{n\}=\sum_{i=0}^{\infty}n_i,\quad (n)!=\prod_{i=0}^{\infty}n_i!,\quad n=\sum_{i=0}^{\infty}n_iq^i,\quad 0\le n_i<q,$$

$$(n)!\left[x^n\right]{}^q\varepsilon^{(\varphi)}\left(x\right)\circ{}^q\varepsilon^{(\beta)}\left(x\right)=(\varphi+\beta)^{\{n\}}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}_q\varphi^{\{m\}}\beta^{\{n-m\}},$$

$$\binom{n}{m}_q=\begin{cases}\frac{(n)!}{(m)!(n-m)!},n\left(\mathrm{mod}q^k\right)\geq m\left(\mathrm{mod}q^k\right),\\ 0,n\left(\mathrm{mod}q^k\right)<m\left(\mathrm{mod}q^k\right).\end{cases}$$

Отметим, что ${}^2\varepsilon\left(x\right)=(1-x)^{-1}$, $\binom{n}{m}_2=\binom{n}{m}_{[0,2]}$. Пусть ${}^q_{(1)}\varepsilon\left(x\right)$ означает ряд, связанный с ${}^q\varepsilon\left(x\right)$ согласно теореме 6.2. Тогда

$$(n)!\left[x^n\right]{}^q_{(1)}\varepsilon^{(\varphi)}\left(x\right)=\varphi(\varphi+n)^{\{n\}-1}.$$

Из тождества ${}^q_{(1)}\varepsilon^{(\varphi+\beta)}\left(x\right)={}^q_{(1)}\varepsilon^{(\varphi)}\left(x\right)\circ{}^q_{(1)}\varepsilon^{(\beta)}\left(x\right)$ получаем аналог обобщенной биномиальной формулы Абеля:

$$\left(\varphi+\beta\right)\left(\varphi+\beta+n\right)^{\{n\}-1}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}_q\varphi(\varphi+m)^{\{m\}-1}\beta(\beta+n-m)^{\{n-m\}-1}.$$

Так как

$$\left[x^n\right]\left(1-\left(\log\circ_{(1)}\varepsilon\left(x\right)\right)'\right)\circ{}_{(1)}\varepsilon^{(\varphi)}\left(s\right)=\left[x^n\right]\varepsilon^{(\varphi+n)}\left(x\right),$$

из

$$\left(1-\left(\log\circ_{(1)}\varepsilon\left(x\right)\right)'\right)\circ{}_{(1)}\varepsilon^{(\varphi+\beta)}\left(x\right)=\left(1-\left(\log\circ_{(1)}\varepsilon\left(x\right)\right)'\right)\circ{}_{(1)}\varepsilon^{(\varphi)}\left(s\right)\circ{}_{(1)}\varepsilon^{(\beta)}\left(s\right)$$

получаем

$$(\varphi+\beta+n)^{\{n\}}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}_q(\varphi+m)^{\{m\}}\beta(\beta+n-m)^{\{n-m\}-1}.$$

Тождества

$${}_{(1)}\varepsilon^{(\varphi)}\left(x\right)=\left(1,{}_{(1)}\varepsilon\left(x\right)\right)_0\varepsilon^{(\varphi)}\left(x\right),\qquad\varepsilon^{(\varphi)}\left(x\right)=\left(1,\varepsilon^{(-1)}\left(x\right)\right)_{0(1)}\varepsilon^{(\varphi)}\left(x\right)$$

дают аналоги других тождеств Абеля [18, pp. 92-99], [21]:

$$\varphi(\varphi+n)^{\{n\}-1}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}_q\varphi^{\{m\}}mn^{\{n-m\}-1},$$

$$\varphi^{\{n\}}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}_q\varphi(\varphi+m)^{\{m\}-1}(-m)^{\{n-m\}}.$$

Если $q=2$, $n=2^k-1$, то

$$\left(\varphi+2^k-1\right)^{k-1}=\sum_{m=0}^{2^k-1}\varphi^{\{m\}-1}m\left(2^k-1\right)^{\left\{2^k-1-m\right\}-1},$$

$$\varphi^{k-1}=\sum_{m=0}^{2^k-1}(\varphi+m)^{\{m\}-1}(-m)^{\left\{2^k-1-m\right\}}.$$

Коэффициенты $\binom{n}{m}_q$ являются элементами матрицы $T^{(q)}$ из замечания 5.1. Отметим для них тождества, аналогичные тождествам

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}=2^n,\qquad\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}m(-1)^{n-m}=\begin{cases}1,n=1,\\0,n\neq1.\end{cases}$$

Так как ${}^{q}\varepsilon\left(x\right)\circ{}^{q}\varepsilon\left(x\right)={}^{q}\varepsilon^{(2)}\left(x\right)$, $x^{q}\varepsilon'\left(x\right)\circ{}^{q}\varepsilon^{(-1)}\left(x\right)=x(\log\circ^{q}\varepsilon\left(x\right))'$, то

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}_q=2^{\{n\}},\qquad \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}_q m(-1)^{\{n-m\}}=\begin{cases}q^k, n=q^k,\\ 0, n\neq q^k.\end{cases}$$

В теории матриц Риордана важное место занимает понятие псевдо-инволюции [5,6,9,17]. Введем аналогичное понятие для группы $R\left(P_0\right)$. Матрицу $\left(b\left(x\right),a\left(x\right)\right)_0$, обладающую свойством

$$\left(b\left(x\right),a\left(x\right)\right)_0^{-1}=(1,-1)_0(b\left(x\right),a\left(x\right))_0(1,-1)_0=\left(b\left(-x\right),a\left(-x\right)\right)_0,$$

назовем псевдо-инволюцией группы $R\left(P_0\right)$. Очевидно, что если матрица $\left(b\left(x\right),a\left(x\right)\right)_0$ является псевдо-инволюцией, то матрицы $\left(b\left(-x\right),-a\left(-x\right)\right)_0$, $\left(b\left(x\right),-a\left(x\right)\right)_0$ являются инволюциями.

Теорема 6.3. *Если матрица $\left(b\left(x\right),-a\left(x\right)\right)_0$, является инволюцией, то она может быть представлена в виде*

$$\left(b\left(x\right),-a\left(x\right)\right)_0=\left(b^{(1/2)}\left(x\right),a^{(1/2)}\left(x\right)\right)_0(1,-1)_0\left(b^{(1/2)}\left(x\right),a^{(1/2)}\left(x\right)\right)_0^{-1}.$$

Доказательство. Если

$$\left(1,a^{(1/2)}\left(x\right)\right)_0^{-1}=\left(1,h^{(-1)}\left(x\right)\right)_0,\qquad \left(1,h\left(x\right)\right)_0^{-1}=\left(1,c^{(1/2)}\left(x\right)\right)_0,$$

то

$$\left(1,a^{(1/2)}\left(x\right)\right)_0(1,h\left(x\right))_0=\left(1,a\left(x\right)\right)_0,$$

$$\left(1,c^{(1/2)}\left(x\right)\right)_0\left(1,h^{(-1)}\left(x\right)\right)_0=\left(1,c\left(x\right)\right)_0,\qquad \left(1,a\left(x\right)\right)_0^{-1}=\left(1,c\left(x\right)\right)_0.$$

Из условия $c\left(x\right)=a\left(-x\right)$ вытекает, что $h^{(-1)}\left(x\right)=h\left(-x\right)$. Тогда

$$\left(1,-a\left(x\right)\right)_0=\left(1,a^{(1/2)}\left(x\right)\right)_0(1,-1)_0\left(1,h^{(-1)}\left(x\right)\right)_0,$$

$$\left(b\left(x\right),-a\left(x\right)\right)_0=\left(b^{(1/2)}\left(x\right),1\right)_0(1,-a\left(x\right))_0\left(b^{(-1/2)}\left(x\right),1\right)_0.\qquad\square$$

Следующая теорема касается унипотентов $w_q\left(x\right)\in[\![P_{0,q},a\left(x\right)]\!]$, $w_q\left(x\right)=1+\eta_q\left(x\right)$, где ряд $\eta_q\left(x\right)$ определяется формулой (2).

Теорема 6.4. *Матрицы $\left(w_{q,i}\left(x\right),w_{q,j}\left(x\right)\right)$ образуют коммутативную подгруппу в $R\left(P_{0,q}\right)$, элементы которой умножаются по правилу*

$$\left(w_{q,1}\left(x\right),w_{q,2}\left(x\right)\right)_0\left(w_{q,3}\left(x\right),w_{q,4}\left(x\right)\right)_0=\left(w_{q,1}\left(x\right)\circ w_{q,3}\left(x\right),w_{q,2}\left(x\right)\circ w_{q,4}\left(x\right)\right)_0.$$

Доказательство. Если $[x^n]\,w_{q,i}\left(x\right)\neq 0$, $n>0$, то

$$x^n\circ w_{q,i}\left(x\right)=x^n\circ w_{q,i}^{(n)}\left(x\right)=x^n,\qquad w_{q,i}(w_{q,j}\left(x\right))_0=w_{q,i}\left(x\right),$$

$$\left(w_{q,1}\left(x\right),w_{q,2}\left(x\right)\right)_0\left(w_{q,3}\left(x\right),w_{q,4}\left(x\right)\right)_0=$$
$$=\left(1+\eta_{q,1}\left(x\right)+\eta_{q,3}\left(x\right),1+\eta_{q,2}\left(x\right)+\eta_{q,4}\left(x\right)\right)_0.\qquad\square$$

Обозначим эту подгруппу $U\left(P_{0,q}\right)$.

Теорема 6.5. *Псевдо-инволюции группы $R\left(P_0\times P_{0,2}\right)$ образуют подгруппу, изоморфную подгруппе $U\left(P_{0,2}\right)$.*

Доказательство. Если матрица $\left(b\left(x\right),a\left(x\right)\right)_0$ является псевдо-инволюцией (исключая матрицы $(1,-1)_0$, $(-1,-1)_0$, которые являются одновременно инволюциями и псевдо-инволюциями), то

$$\left(1,a\left(x\right)\right)_0 b\left(-x\right)=b^{(-1)}\left(x\right),\qquad \left(1,a\left(x\right)\right)_0=\left(1,a^{(1/2)}\left(x\right)\right)_0(1,h\left(x\right))_0,$$

$$\left(1, a^{(1/2)}(x)\right)_0^{-1} = \left(1, h^{(-1)}(x)\right)_0, \qquad h^{(-1)}(x) = h(-x).$$

Пусть $P_0 = P_{0,2}$. Так как в алгебре $[\![P_{0,2}, a(x)]\!]$ ряд $\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{2n+1} x^{2n+1}$ являются нильпотентом второго порядка, то ряд, обладающий свойством $h^{(-1)}(x) = h(-x)$, является унипотентом. Следовательно, если матрица $(1, a(x))_0$ является псевдо-инволюцией, то ряд $a(x)$ является унипотентом и $(1, a(x))_0 x^{2n+1} = x^{2n+1}$. Обозначим $b(x) = b_1(x^2) + x b_2(x^2)$. Тогда $(1, a(x))_0 b(-x) = \tilde{b}_1(x^2) - x b_2(x^2)$. Уравнение

$$b_1\left(x^2\right) \circ \tilde{b}_1\left(x^2\right) + b_1\left(x^2\right) \circ x b_2\left(x^2\right) - \tilde{b}_1\left(x^2\right) \circ x b_2\left(x^2\right) = 1$$

имеет единственное решение $b_1(x^2) = \tilde{b}_1(x^2) = 1$. Таким образом, ряд $b(x)$ также является унипотетом и, следовательно, подгруппа $U(P_{0,2})$ состоит из псевдо-инволюций группы $R(P_{0,2})$. В группе $R(P_0 \times P_{0,q})$ при любом P_0 произведение матриц $(w_q(x), 1)_0$ определяется только их нулевыми столбцами, поэтому группа $R(P_0 \times P_{0,q})$ содержит подгруппу, изоморфную $U(P_{0,q})$. Так как в алгебре $[\![P_0 \times P_{0,2}, a(x)]\!]$ ряд $\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta_{2n+1} x^{2n+1}$ также являются нильпотетом, то подгруппа, изоморфная $U(P_{0,2})$, состоит из псевдо-инволюций группы $R(P_0 \times P_{0,2})$. $\square$

Примерами группы $R(P_0 \times P_{0,2})$ являются группы $R\left(P_{[0,2]}\right)$, $R\left(P_{g(-1,x)}\right)$.

Пример 6.3. Пусть ${}_{(1)}h(x)$ означает ряд, связанный с $h(x)$ согласно теореме 6.2. Тогда если $h^{(-1)}(x) = h(-x)$, то матрицы $\left(1, {}_{(1)}h^{(2)}(x)\right)$, $\left({}_{(1)}h^{(2)}(x), {}_{(1)}h^{(2)}(x)\right)$, являются псевдо-инволюциями. Исходя из этого, построим псевдо-инволюцию группы $R(P_{0,3})$. Пусть $h(x) = [e^x]_3 e^{x^3} = (1 + x + x^2/2)\, e^{x^3}$. Тогда

$$h^{(\varphi)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^n}{n!} x^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{n+1}}{n!} x^{3n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{n+2}}{n!2} x^{3n+2},$$

$${}_{(1)}h^{(\varphi)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(\varphi+3n)^{n-1}}{n!} x^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(\varphi+3n+1)^{n}}{n!} x^{3n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(\varphi+3n+2)^{n+1}}{n!2} x^{3n+2},$$

$$\left({}_{(1)}h^{(2)}(x), {}_{(1)}h^{(2)}(x)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 12 & 4 & 0 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 49 & 32 & 6 & 40 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 8 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 81 & 20 & 0 & 96 & 10 & 0 & 14 & 1 & 0 & \cdots \\ 500 & 242 & 36 & 676 & 140 & 12 & 112 & 16 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Список литературы

[1] T. Ball, T. Edgar, D. Juda, Dominance orders, generalized binomial coefficients, and Kummer's theorem, Math. Mag., 87:2 (2014), 135-143.

[2] P. Barry, Riordan Arrays: A Primer, Logic Press, 2016.

[3] V. M. Buchstaber, A. N. Kholodov, Boas–Buck structures on sequences of polynomials, Funct. Anal. Appl., 23:4 (1989), 266–276.

[4] E. V. Burlachenko, Fractal generalized Pascal matrices, Math. Notes, 107 (2020), 559-573.

[5] N. T. Cameron, A. Nkwanta, On some (pseudo) involutions in the Riordan group, J. Integer seq., 8 (2005), Article 06.2.3.

[6] G.-S. Cheon, H. Kim, L. W. Shapiro, Riordan group involutions, Linear Algebra Appl., 428 (2008), 941-952.

[7] G. Fontene, Generalization d'une formule connue, Nouv. ann. math. (4), 15 (1915), 112.

[8] H. W. Gould, T.-X. He, Characterization of (c)-Riordan arrays, Gegenbauer-Humbert-type polynomial sequences, and (c)-Bell polynomials, J. Math. Res. Appl., 33:5 (2013), 505-52.

[9] T.-X. He, L. Shapiro, Palindromes and pseudo-involution multiplication, Linear Algebra Appl., 593 (2020), 1-17.

[10] M. E. Horn, The Didactical Relevance of the Pauli Pascal Triangle arXiv:physics/0611277, 2006.

[11] C. Jean-Louis, A. Nkwanta, Some algebraic structure of the Riordan group, Linear Algebra Appl. 438(2013) 2018–2035.

[12] L. Jiu, C. Vignat, On binomial identities in arbitrary bases, J. Integer Seq., 19:5 (2016), Article 16.5.5.

[13] D. E. Knuth, Convolution polynomials, Mathematica J., 2:4 (1992), 67-78. J. Combinatorics, 1 (1980), 113-138.

[14] T. Mansour, H. D. Nguyen, A -Digital Binomial Theorem, arXiv: 1506.07945, 2015.

[15] T. Mansour, H. D. Nguyen, A Digital Binomial Theorem for Sheffer Sequences, arXiv:1510.08529, 2015.

[16] H. D. Nguyen, A Generalization of the digital binomial theorem, J. Integer Seq., 18:5 (2015), Article 15.5.7.

[17] D. Phulara, L. Shapiro, Constructing pseudo-involutions in the Riordan group, J. Integer seq., 20 (2017), Article 17.4.7.

[18] J. Riordan, Combinatorial Identities, New York: Wiley, 1968. pp 92-99

[19] S. M. Roman, The Umbral Calculus, Academic Press, 1984.

[20] N. J. A. Sloane, The On-line Encyclopedia of Integer Sequences, http://oeis.org.

[21] R. Sprugnoli, Riordan arrays and Abel-Gould identity, Discrete Math., 142 (1995) 213-233.

[22] T. Wakhare, C. Vignat, Base- Analogues of Classic Combinatorial Objects, arXiv:1607.02564, 2016.

[23] W, Wang, T. Wang, Generalized Riordan arrays, Discrete Math. 308 (2008) 6466-6500.

[24] S. Zemel, Generalized Riordan groups and operators on polynomials, Linear Algebra Appl., 494 (2016) 286-308.

[25] X. Zhao, T. Wang, Some identities related to reciprocal functions, Discrete Appl. Math., 265 (2003) 323-335.

E-mail: evgeniy_burlachenko@list.ru