Матрицы Риордана, полиномы Чебышева, базисы Фибоначчи

Е. Бурлаченко

Полиномы Чебышева и их модификации являются атрибутами различных областей математики. В том числе, они являются производящими функциями элементов строк определенных матриц Риордана. В статье мы дадим подборку некоторые характерных ситуаций, в которых такие матрицы принимают участие. Используя столбцы и строки этих матриц, мы построим базисы пространства формальных степенных рядов и пространства полиномов, свойства которых позволяют назвать их «базисами Фибоначчи».

1. Введение

Предметом нашего изучения являются преобразования в пространстве формальных степенных рядов и соответствующие матрицы. Строкам и столбцам матриц поставим в соответствие производящие функции их элементов, т.е. формальные степенные ряды. n-й коэффициент ряда $a(x)$, n-ю строку и n-й столбец матрицы A будем обозначать соответственно

$$[x^n]a(x), \quad [n,\to]A, \quad Ax^n.$$

Матрица A, преобразование, соответствующее матрице A, и базис векторного пространства, образованный последовательностью столбцов матрицы A, будут обозначаться одним и тем же символом. Т.е. мы будем говорить: матрица A, преобразование A, базис A.

Бесконечная нижняя треугольная матрица $(f(x), g(x))$, n-й столбец которой имеет производящею функцию $f(x)g^n(x)$, $g_0 = 0$, называется матрицей Риордана [1] – [3]. Она является произведением двух матриц, которые соответствуют операторам умножения и композиции рядов:

$$(f(x), g(x)) = (f(x), x)(1, g(x)),$$

$$(f(x), x)a(x) = f(x)a(x), \ (1, g(x))a(x) = a(g(x)),$$

$$(f(x), g(x))(b(x), a(x)) = (f(x)b(g(x)), a(g(x))).$$

Транспонированные матрицы Риордана могут рассматриваться как матрицы операторов, действующих в пространстве полиномов. Подобные операторы, соответствующие транспонированным экспоненциальным матрицам Риордана (т.е. матрицам $|e^x|(f(x), g(x))^T |e^x|^{-1}$, где $|e^x|$ – диагональная матрица: $\left|e^x\right| x^n = x/n!$) рассматриваются в теневом исчислении [4].

Матрица Риордана, обратная к самой себе, называется инволюцией Риордана [5], [6]. Она может быть представлена в виде RM, где R – некоторая матраца Риордана,

$$M = (1,-x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Матрица R называется псевдо-инволюцией Риордана. Мы будем использовать эту терминологию и для транспонированных матриц Риордана. Матрица

$$P = \left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

называется матрицей Паскаля. Степень матрицы Паскаля определяется равенством $P^{\varphi} = \left((1-\varphi x)^{-1}, x(1-\varphi x)^{-1}\right)$. Преобразование P^{φ} действует в пространстве формальных степенных рядов и называется обобщенным преобразованием Эйлера:

$$P^{\varphi} a(x) = \frac{1}{1-\varphi x} a\left(\frac{x}{1-\varphi x}\right);$$

преобразование $\left(P^{\varphi}\right)^T$, действует в пространстве полиномов и называется сдвигом на φ:

$$\left(P^{\varphi}\right)^T c(x) = c(x+\varphi).$$

Преобразование $\left(P^{\varphi} M\right)^T = M\left(P^{\varphi}\right)^T$ является инволюцией. Каждый полином $c(x)$ раскладывается в сумму полиномов $c_1(x)$, $c_2(x)$, таких, что $M\left(P^{\varphi}\right)^T c_1(x) = c_1(x)$, $M\left(P^{\varphi}\right)^T c_2(x) = -c_2(x)$. Следовательно, $\left(P^{\varphi}\right)^T c_1(x) = c_1(-x)$, $\left(P^{\varphi}\right)^T c_2(x) = -c_2(-x)$. Соответственно, так как преобразование $MP^{\varphi} = P^{-\varphi} M$ является инволюцией, каждый ряд $a(x)$ раскладывается в сумму рядов $a_1(x)$, $a_2(x)$, таких, что $P^{\varphi} a_1(x) = a_1(-x)$,

$P^{\varphi}a_2(x) = -a_2(-x)$. Последовательность столбцов обратимой бесконечной верхнетреугольной матрицы B, такой что $\left(P^{\varphi}\right)^T B = MBM$, будем называть псевдособственным базисом преобразования $\left(P^{\varphi}\right)^T$; последовательность столбцов обратимой бесконечной нижнетреугольной матрицы A, такой что $P^{\varphi}A = MAM$, будем называть псевдособственным базисом преобразования P^{φ}. Полиномы $c_1(x)$, $c_2(x)$ раскладываются в комбинацию соответственно четных и нечетных столбцов матрицы B; ряды $a_1(x)$, $a_2(x)$ раскладываются в комбинацию соответственно четных и нечетных столбцов матрицы A.

Собственные подпространства преобразования PM являются темой статей [7] – [9]. В [10], [11] собственные подпространства преобразований PM и P^TM рассматриваются на общих условиях; эта точка зрения персекается с нашими наблюдениями, изложенными в разделе 4.

Модифицированные полиномы Чебышева первого и второго рода $C_n(x) = 2T_n(x/2)$, $S_n(x) = U_n(x/2)$, или

$$C_n(x) = \prod_{m=1}^{n}\left(x - 2\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right), \quad S_n(x) = \prod_{m=1}^{n}\left(x - 2\cos\frac{m}{n+1}\pi\right),$$

$C_0(x) = 2$, $S_0(x) = 1$, связаны с матрицами Риордана следующим образом:

$$C_n(x) = [n,\to]\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{x}{1+x^2}\right),\ n > 0; \quad S_n(x) = [n,\to]\left(\frac{1}{1+x^2}, \frac{x}{1+x^2}\right),$$

$$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}, \frac{x}{1+x^2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ -2 & 0 & 9 & 0 & -6 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\left(\frac{1}{1+x^2}, \frac{x}{1+x^2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 6 & 0 & -5 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Обобщением этих полиномов являются полиномы Диксона

$$D_n(x,\beta)=[n,\to]\left(\frac{1-\beta x^2}{1+\beta x^2},\frac{x}{1+\beta x^2}\right)=\prod_{m=1}^{n}\left(x-2\sqrt{\beta}\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right), n>0$$

$$E_n(x,\beta)=[n,\to]\left(\frac{1}{1+\beta x^2},\frac{x}{1+\beta x^2}\right)=\prod_{m=1}^{n}\left(x-2\sqrt{\beta}\cos\frac{m}{n+1}\pi\right),$$

$D_0(x,\beta)=2$, $E_0(x)=1$. Следовательно, n-й строкой матрицы

$$\left(\frac{1-\beta x^2}{1-\varphi x+\beta x^2},\frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}\right)=\left(\frac{1-\beta x^2}{1+\beta x^2},\frac{x}{1+\beta x^2}\right)\left(\frac{1}{1-\varphi x},\frac{x}{1-\varphi x}\right),$$

$n>0$, является полином $D_n(x+\varphi,\beta)$, n-й строкой матрицы

$$\left(\frac{1}{1-\varphi x+\beta x^2},\frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}\right)=\left(\frac{1}{1+\beta x^2},\frac{x}{1+\beta x^2}\right)\left(\frac{1}{1-\varphi x},\frac{x}{1-\varphi x}\right)$$

является полином $E_n(x+\varphi,\beta)$.

Полиномы Чебышева и их модификации как производящие функции строк матриц Риордана рассматриваются в [12] – [15].

Обобщенные последовательности Фибоначчи и Люка связаны с полиномами Диксона и с обобщенным преобразованием Эйлера следующим образом. Обозначим

$$F_n^{(\varphi,\beta)}=\varphi F_{n-1}^{(\varphi,\beta)}-\beta F_{n-2}^{(\varphi,\beta)},\ F_0^{(\varphi,\beta)}=0,\ F_1^{(\varphi,\beta)}=1,$$

$$L_n^{(\varphi,\beta)}=\varphi L_{n-1}^{(\varphi,\beta)}-\beta L_{n-2}^{(\varphi,\beta)},\ L_0^{(\varphi,\beta)}=2,\ L_1^{(\varphi,\beta)}=\varphi.$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty}L_n^{(\varphi,\beta)}x^n=\frac{2-\varphi x}{1-\varphi x+\beta x^2},\quad \sum_{n=0}^{\infty}F_n^{(\varphi,\beta)}x^n=\frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}.$$

Так как

$$\left(\frac{1-\beta x^2}{1+\beta x^2},\frac{x}{1+\beta x^2}\right)\frac{1}{1-\varphi x}=\frac{1-\beta x^2}{1-\varphi x+\beta x^2}=\frac{2-\varphi x}{1-\varphi x+\beta x^2}-1,$$

$$\left(\frac{1}{1+\beta x^2},\frac{x}{1+\beta x^2}\right)\frac{1}{1-\varphi x}=\frac{1}{1-\varphi x+\beta x^2},$$

то

$$\frac{2-\varphi x}{1-\varphi x+\beta x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}D_n(\varphi,\beta)x^n,\ \ \frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}E_{n-1}(\varphi,\beta)x^n.$$

Так как

$$P^{-\varphi}\frac{2-\varphi x}{1-\varphi x+\beta x^2}=\frac{2+\varphi x}{1+\varphi x+\beta x^2},\ P^{-\varphi}\frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}=\frac{x}{1+\varphi x+\beta x^2},$$

преобразование $P^{-\varphi}$ переводит ряд (геометрическую прогрессию)

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2-\varphi x}{1-\varphi x+\beta x^2}+\frac{x\sqrt{\varphi^2-4\beta}}{1-\varphi x+\beta x^2}\right)=\left(1-\left(\frac{\varphi+\sqrt{\varphi^2-4\beta}}{2}\right)x\right)^{-1}=(1-\lambda x)^{-1}$$

в геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2+\varphi x}{1+\varphi x+\beta x^2}+\frac{x\sqrt{\varphi^2-4\beta}}{1+\varphi x+\beta x^2}\right)=\left(1+\left(\frac{\varphi-\sqrt{\varphi^2-4\beta}}{2}\right)x\right)^{-1}=\left(1+\frac{\beta}{\lambda}x\right)^{-1}$$

В следующих разделах статьи мы представим некоторые наблюдения, связанные с заявленной тематикой. В разделах 1 и 2 рассматриваются два типа преобразований и соответствующие им матрицы Риордана. Строки и столбцы этих матриц, во-первых, связаны с определенными модификациями полиномов Чебышева, во-вторых, образуют псевдособственные базисы преобразований P^{φ}, $\left(P^{\varphi}\right)^T$. В разделе 4 мы построим псевдособственные базисы преобразований P и $\left(P^{-1}\right)^T$, используя строки и столбцы матриц определенных «преобразований второго типа». Некоторые особенности этих базисов позволяют назвать их «базисами Фибоначчи». В разделе 5 мы дадим обобщение этих базисов. Во всех рассматриваемых случаях мы будем пользоваться двумя тождествами для строк матриц Риордана, которые составляют содержание следующей теоремы.

Теорема 1. Если ряды $a(x)$, $a_0=1$, $b(x)$, $b_0=1$, связаны условиями

$$b(xa(x))=a(x),\quad a\left(xb^{-1}(x)\right)=b(x),$$

то

$$[n,\to]\left(1+x(\log a(x))',xa(x)\right)=[n,\to]\left(b^n(x),x\right), \tag{1}$$

$$[n,\to](a(x),xa(x))=[n,\to]\left(1-x(\log b(x))'\,b^{n+1}(x),x\right). \tag{2}$$

Доказательство. По теореме обращения Лагранжа

$$[x^n]a^m(x)=\frac{m}{m+n}[x^n]b^{m+n}(x)=[x^n]\Big(1-x(\log b(x))'\Big)b^{m+n}(x),$$

$$[x^n]\Big(1+x(\log a(x))'\Big)a^m(x)=\frac{m+n}{m}[x^n]a^m(x)=[x^n]b^{m+n}(x).$$

Обозначим

$$[x^n]a^m(x)=a_n^{(m)},\ [x^n]\Big(1+x(\log a(x))'\Big)a^m(x)=c_n^{(m)},$$

$$[x^n]b^m(x)=b_n^{(m)},\ [x^n]\Big(1-x(\log b(x))'\Big)b^m(x)=d_n^{(m)}.$$

Тогда тождества (1), (2) становятся очевидными:

$$\Big(1+x(\log a(x))',xa(x)\Big)=$$

$$=\begin{pmatrix} c_0^{(0)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ c_1^{(0)} & c_0^{(1)} & 0 & 0 & \cdots \\ c_2^{(0)} & c_1^{(1)} & c_0^{(2)} & 0 & \cdots \\ c_3^{(0)} & c_2^{(1)} & c_1^{(2)} & c_0^{(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_0^{(0)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1^{(1)} & b_0^{(1)} & 0 & 0 & \cdots \\ b_2^{(2)} & b_1^{(2)} & b_0^{(2)} & 0 & \cdots \\ b_3^{(3)} & b_2^{(3)} & b_1^{(3)} & b_0^{(3)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

$$(a(x),xa(x))=$$

$$=\begin{pmatrix} a_0^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1^{(1)} & a_0^{(2)} & 0 & 0 & \cdots \\ a_2^{(1)} & a_1^{(2)} & a_0^{(3)} & 0 & \cdots \\ a_3^{(1)} & a_2^{(2)} & a_1^{(3)} & a_0^{(4)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_0^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ d_1^{(2)} & d_0^{(2)} & 0 & 0 & \cdots \\ d_2^{(3)} & d_1^{(3)} & d_0^{(3)} & 0 & \cdots \\ d_3^{(4)} & d_2^{(4)} & d_1^{(4)} & d_0^{(4)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

Отметим, что

$$(a(x),xa(x))^{-1}=\big(b^{-1}(x),xb^{-1}(x)\big),$$

$$\left(1+x(\log a(x))',xa(x)\right)^{-1}=\left(1-x(\log b(x))',xb^{-1}(x)\right).$$

2. Преобразования первого типа

Пусть

$$b(xa(x))=a(x),\quad a\left(xb^{-1}(x)\right)=b(x),$$

где

$$a(x)=\frac{1}{1-\varphi x+\beta x^2},\ 1+x(\log a(x))'=\frac{1-\beta x^2}{1-\varphi x+\beta x^2},$$

$$b(x)=\frac{1+\varphi x+\sqrt{1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2}}{2},$$

$$\beta x^2b^{-1}(x)=\frac{1+\varphi x-\sqrt{1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2}}{2},$$

$$1-x(\log b(x))'=\frac{1}{\sqrt{1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2}}.$$

Ряды

$$b^n(x)=\left(\frac{1+\varphi x+\sqrt{1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2}}{2}\right)^n,$$

$$\beta^n x^{2n}b^{-n}(x)=\left(\frac{1+\varphi x-\sqrt{1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2}}{2}\right)^n$$

можно представить в виде

$$b^n(x)=\frac{c_n(\varphi,\beta,x)+s_n(\varphi,\beta,x)\sqrt{1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2}}{2},$$

$$\beta^n x^{2n}b^{-n}(x)=\frac{c_n(\varphi,\beta,x)-s_n(\varphi,\beta,x)\sqrt{1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2}}{2},$$

где $c_n(\varphi,\beta,x)$ – полином степени $\le n$, $s_n(\varphi,\beta,x)$ – полином степени $< n$.

Причем

$$s_n(\varphi,\beta,x)\sqrt{1-2\varphi+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2}=\sqrt{c_n^2(\varphi,\beta,x)-4\beta^n x^{2n}}\,,$$

как это следует из

$$b^{2n}(x)-c_n(\varphi,\beta,x)b^n(x)+\beta^n x^{2n}=0.$$

Пусть J_n – оператор, переставляющий коэффициенты полинома n-й степени в обратном порядке: $J_n c(x)=x^n c(1/x)$, где $c(x)$ – полином степени $\le n$. Сопоставление тождеств

$$b^n(x)=c_n(\varphi,\beta,x)-\beta^n x^{2n}b^{-n}(x),$$

$$\left(1-x\left(\log b(x)\right)'\right)b^n(x)=s_n(\varphi,\beta,x)+\frac{\beta^n x^{2n}b^{-n}(x)}{\sqrt{1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2}},$$

соответственно с тождествами (1), (2) дает:

$$c_0(\varphi,\beta,x)=2,\quad c_n(\varphi,\beta,x)=J_n D_n(x+\varphi,\beta),$$

$$s_0(\varphi,\beta,x)=0,\quad s_n(\varphi,\beta,x)=J_{n-1}E_{n-1}(x+\varphi,\beta).$$

Пример 1. Если $\varphi=0$, $\beta=1$, то

$$b(x)=\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2},\quad b^{-1}(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}=C\left(x^2\right),$$

$$C^n\left(x^2\right)=\frac{x^n C_n(1/x)-x^{n-1}S_{n-1}(1/x)\sqrt{1-4x^2}}{2x^{2n}}=$$

$$=\frac{-x^{n-2}S_{n-2}(1/x)+x^{n-1}S_{n-1}(1/x)C\left(x^2\right)}{x^{2n-2}},$$

$$C^{-n}\left(x^2\right)=\frac{x^n C_n(1/x)+x^{n-1}S_{n-1}(1/x)\sqrt{1-4x^2}}{2}=$$

$$=x^n S_n(1/x)-x^{n+1}S_{n-1}(1/x)C\left(x^2\right),$$

где мы учли тождества

$$C_n(x) = xS_{n-1}(x) - 2S_{n-2}(x) = 2S_n(x) - xS_{n-1}(x),$$

или

$$x^n C_n(1/x) = x^{n-1}S_{n-1}(1/x) - 2x^n S_{n-2}(1/x) = 2x^n S_n(1/x) - x^{n-1}S_{n-1}(1/x).$$

Обозначим $S_{-n}(x) = -S_{n-2}(x)$. Тогда

$$C^k(x^2) = -\left(\frac{1}{x}\right)^k S_{k-2}\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} S_{k-1}\left(\frac{1}{x}\right) C(x^2),$$

$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$. Следовательно, как это было показано в [16],

$$C^k(x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k S_{k-2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{k-1} S_{k-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) C(x).$$

Отметим, что

$$\left(\frac{1-\beta x^2}{1-\varphi x+\beta x^2}, \frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}\right)P^{-2\varphi} = M\left(\frac{1-\beta x^2}{1-\varphi x+\beta x^2}, \frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}\right)M,$$

$$\left(\frac{1}{1-\varphi x+\beta x^2}, \frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}\right)P^{-2\varphi} = M\left(\frac{1}{1-\varphi x+\beta x^2}, \frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}\right)M.$$

Соответственно,

$$P^{2\varphi}\left(1 - x(\log b(x))', xb^{-1}(x)\right) = M\left(1 - x(\log b(x))', xb^{-1}(x)\right)M,$$

$$P^{2\varphi}\left(b^{-1}(x), xb^{-1}(x)\right) = M\left(b^{-1}(x), xb^{-1}(x)\right)M.$$

3. Преобразования второго типа

Обозначим

$$x^n - 1 = \prod_{m=0}^{n-1}\left(x - e^{(n,\, m)}\right),\quad x^n + 1 = \frac{x^{2n}-1}{x^n - 1} = \prod_{m=1}^{n}\left(x - e^{(2n,\, 2m-1)}\right),$$

$$e^{(n,\, m)} = \cos\frac{2\pi m}{n} + i\sin\frac{2\pi m}{n},\quad i = \sqrt{-1}.$$

Тогда

$$\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{2}=2^{n-1}(1,x/2)\left(P^{-1/2}\right)^T J_n P^T\left(x^n+1\right)=$$

$$=\prod_{m=1}^{n}\left(x+\frac{1+e^{(2n,\ 2m-1)}}{1-e^{(2n,\ 2m-1)}}\right)=\prod_{m=1}^{n}\left(x+i\operatorname{ctg}\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$\frac{(x+1)^n-(x-1)^n}{2}=2^{n-1}(1,x/2)\left(P^{-1/2}\right)^T J_n P^T\left(x^n-1\right)=$$

$$=n\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+\frac{1+e^{(n,\ m)}}{1-e^{(n,\ m)}}\right)=n\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+i\operatorname{ctg}\frac{m}{n}\pi\right).$$

Рассмотрим матрицы, составленные из четных и нечетных столбцов матрицы Паскаля:

$$\left(\frac{1-x}{(1-x)^2},\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots\\1&0&0&\cdots\\1&1&0&\cdots\\1&3&0&\cdots\\1&6&1&\cdots\\1&10&5&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},\ \left(\frac{x}{(1-x)^2},\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots\\1&0&0&\cdots\\2&0&0&\cdots\\3&1&0&\cdots\\4&4&0&\cdots\\5&10&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},$$

Обозначим

$$[n,\to]\left(\frac{1-x}{(1-x)^2},\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)=\tilde{t}_n(1,1,x),$$

$$[n,\to]\left(\frac{x}{(1-x)^2},\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)=\tilde{u}_n(1,1,x).$$

Так как

$$\tilde{t}_n\left(1,1,x^2\right)=\frac{(1+x)^n+(1-x)^n}{2}=J_n\,\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{2}=$$

$$=d_n\prod_{m=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\left(x^2+\operatorname{tg}^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right),\ d_n=1,\ n,$$

(первое значение d_n берется при четном n, второе при нечетном n; договоримся использовать это правило и для других аналогичных величин),

$$\tilde{u}_n\left(1,1,x^2\right)=\frac{(1+x)^n-(1-x)^n}{2x}=J_n\,\frac{(x+1)^n-(x-1)^n}{2}=$$

$$=l_n\prod_{m=1}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\left(x^2+\operatorname{tg}^2\frac{m}{n}\pi\right),\ l_n=n\,,\,1,$$

то

$$\tilde{t}_n(1\,,1\,,x)=d_n\prod_{m=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\left(x+\operatorname{tg}^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right),\ \tilde{u}_n(1\,,1\,,x)=l_n\prod_{m=1}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\left(x+\operatorname{tg}^2\frac{m}{n}\pi\right).$$

Тогда

$$\left(\frac{1-x}{(1-x)^2},\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)\left(\frac{1}{1-x},\frac{x}{1-x}\right)=\left(\frac{1-x}{1-2x},\frac{x^2}{1-2x}\right),$$

$$\left(\frac{x}{(1-x)^2},\frac{x^2}{(1-x)^2}\right)\left(\frac{1}{1-x},\frac{x}{1-x}\right)=\left(\frac{x}{1-2x},\frac{x^2}{1-2x}\right),$$

$$\left(\frac{1-x}{1-2x},\frac{x^2}{1-2x}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots\\1&0&0&\cdots\\2&1&0&\cdots\\4&3&0&\cdots\\8&8&1&\cdots\\16&20&5&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},\ \left(\frac{x}{1-2x},\frac{x^2}{1-2x}\right)=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdots\\1&0&0&\cdots\\2&0&0&\cdots\\4&1&0&\cdots\\8&4&0&\cdots\\16&12&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$[n,\to]\left(\frac{1-x}{1-2x},\frac{x^2}{1-2x}\right)=\tilde{t}_n(1,0,x),\quad [n,\to]\left(\frac{x}{1-2x},\frac{x^2}{1-2x}\right)=\tilde{u}_n(1,0,x).$$

Тогда

$$\tilde{t}_n(1,0,x)=d_n\prod_{m=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\left(x+\sec^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$\tilde{u}_n(1,0,x)=l_n\prod_{m=1}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\left(x+\sec^2\frac{m}{n}\pi\right)$$

Следовательно, n-й строкой матрицы

$$\left(\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2},\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right)=\left(\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x},\frac{x^2}{1-2\varphi x}\right)\left(\frac{1}{1+\beta x},\frac{x}{1+\beta x}\right)$$

является полином

$$\tilde{t}_n(\varphi,\beta,x)=p_n\prod_{m=1}^{\lfloor n/2\rfloor}\left(x+\frac{\varphi^2-\beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}{\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}\right),\ p_n=1,\ n\varphi;$$

n-й строкой матрицы

$$\left(\frac{x}{1-2\varphi x+\beta x^2},\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right)=\left(\frac{x}{1-2\varphi x},\frac{x^2}{1-2\varphi x}\right)\left(\frac{1}{1+\beta x},\frac{x}{1+\beta x}\right)$$

является полином

$$\tilde{u}_n(\varphi,\beta,x)=r_n\prod_{m=1}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\left(x+\frac{\varphi^2-\beta\cos^2\frac{m}{n}\pi}{\cos^2\frac{m}{n}\pi}\right),\ r_n=n\varphi,\ 1.$$

Последовательности столбцов матриц

$$\left(\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2},\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right),\left(\frac{x}{1-2\varphi x+\beta x^2},\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right),$$

совпадают соответственно с последовательностями четных и нечетных столбцов матриц

$$\left(\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2},\frac{x}{\sqrt{\left(1-2\varphi x+\beta x^2\right)}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{1-2\varphi x+\beta x^2}},\frac{x}{\sqrt{1-2\varphi x+\beta x^2}}\right)$$

Пусть

$$b(xa(x))=a(x),\quad a\left(xb^{-1}(x)\right)=b(x),$$

где

$$a(x)=\frac{1}{\sqrt{1-2\varphi x+\beta x^2}},\ 1+x(\log a(x))'=\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2},$$

$$b(x)=\varphi x+\sqrt{1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2},\ \ b^{-1}(x)=\frac{\varphi x-\sqrt{1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2}}{\beta x^2-1},$$

$$1-x\left(\log b\left(x\right)\right)'=\frac{1}{b\left(x\right)\sqrt{1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2}}.$$

Ряды

$$b^n\left(x\right)=\left(\varphi x+\sqrt{1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2}\right)^n,$$

$$\left(\beta x^2-1\right)^n b^{-n}\left(x\right)=\left(\varphi x-\sqrt{1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2}\right)^n,$$

можно представить в виде

$$b^n\left(x\right)=t_n\left(\varphi,\beta,x\right)+u_n\left(\varphi,\beta,x\right)\sqrt{1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2},$$

$$\left(\beta x^2-1\right)^n b^{-n}\left(x\right)=t_n\left(\varphi,\beta,x\right)-u_n\left(\varphi,\beta,x\right)\sqrt{1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2},$$

где $t_n\left(\varphi,\beta,x\right)$ – полином степени $\le n$,

$$\left[x^{2n}\right]t_{2m+1}\left(\varphi,\beta,x\right)=0,\ \ \left[x^{2n+1}\right]t_{2m}\left(\varphi,\beta,x\right)=0;$$

$u_n\left(\varphi,\beta,x\right)$ – полином степени $< n$,

$$\left[x^{2n}\right]u_{2m}\left(\varphi,\beta,x\right)=0,\ \left[x^{2n+1}\right]u_{2m+1}\left(\varphi,\beta,x\right)=0,$$

причем

$$u_n\left(\varphi,\beta,x\right)\sqrt{1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2}=\sqrt{t_n^2\left(\varphi,\beta,x\right)-\left(\beta x^2-1\right)^n},$$

как это следует из

$$b^{2n}(x)-2t_n(\varphi,\beta,x)b^n(x)+\left(\beta x^2-1\right)^n=0.$$

Сопоставление тождеств

$$b^n\left(x\right)=t_n\left(\varphi,\beta,x\right)+u_n\left(\varphi,\beta,x\right)\sqrt{1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2},$$

$$\left(1-x\left(\log b\left(x\right)\right)'\right)b^{n+1}\left(x\right)=u_n\left(\varphi,\beta,x\right)+\frac{t_n\left(\varphi,\beta,x\right)}{\sqrt{1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2}}$$

соответственно с тождествами (1), (2) дает

$$t_n(\varphi,\beta,x) = J_n \tilde{t}_n(\varphi,\beta,x^2) =$$

$$= p_n \prod_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left(\frac{\varphi^2 - \beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}{\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi} \right) \prod_{m=1}^{n} \left(x + \frac{i\cos\frac{2m-1}{2n}\pi}{\sqrt{\varphi^2 - \beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}} \right),$$

где если $\varphi^2 - \beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi = 0$, мы принимаем

$$\frac{\varphi^2 - \beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}{\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi} = 1, \quad x + \frac{i\cos\frac{2m-1}{2n}\pi}{\sqrt{\varphi^2 - \beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}} = 1;$$

$$u_n(\varphi,\beta,x) = J_{n-1} \tilde{u}_n(\varphi,\beta,x^2) =$$

$$= r_n \prod_{m=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \left(\frac{\varphi^2 - \beta\cos^2\frac{m}{n}\pi}{\cos^2\frac{m}{n}\pi} \right) \prod_{m=1}^{n-1} \left(x + \frac{i\cos\frac{m}{n}\pi}{\sqrt{\varphi^2 - \beta\cos^2\frac{m}{n}\pi}} \right),$$

где если $\varphi^2 - \beta\cos^2\frac{m}{n}\pi = 0$, мы принимаем

$$\frac{\varphi^2 - \beta\cos^2\frac{m}{n}\pi}{\cos^2\frac{m}{n}\pi} = 1, \quad x + \frac{i\cos\frac{m}{n}\pi}{\sqrt{\varphi^2 - \beta\cos^2\frac{m}{n}\pi}} = 1.$$

Учтем тождества

$$\prod_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi = \frac{1}{2^{n-1}}, \ \frac{n}{2^{n-1}}; \quad \prod_{m=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \cos^2\frac{m}{n}\pi = \frac{n}{2^{n-1}}, \ \frac{1}{2^{n-1}};$$

$$\prod_{m=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sin^2\frac{2m-1}{2n}\pi = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \prod_{m=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \sin^2\frac{m}{n}\pi = \frac{n}{2^{n-1}},$$

и отметим случаи:

$$t_n(1,1,x)=\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{2},\quad u_n(1,1,x)=\frac{(x+1)^n-(x-1)^n}{2};$$

$$t_n(1,0,x)=\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n+\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^n}{2},$$

$$u_n(1,0,x)=\frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n-\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)^n}{2\sqrt{1+x^2}};$$

$$t_{2n}(0.-1,x)=\left(1+x^2\right)^n,\quad u_{2n}(0,-1,x)=0,$$

$$t_{2n+1}(0,-1,x)=0,\quad u_{2n+1}(0,-1,x)=\left(1+x^2\right)^n,$$

$$t_{2n}(0,0,x)=1,\qquad u_{2n}(0,0,x)=0,$$

$$t_{2n+1}(0,0,x)=0,\qquad u_{2n+1}(0,0,x)=1.$$

Отметим, что

$$P^{-2\varphi}\left(\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2},\frac{x}{\sqrt{1-2\varphi x+\beta x^2}}\right)=$$

$$=M\left(\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2},\frac{x}{\sqrt{1-2\varphi x+\beta x^2}}\right)M;$$

$$P^{-2\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{1-2\varphi x+\beta x^2}},\frac{x}{\sqrt{1-2\varphi x+\beta x^2}}\right)=$$

$$=M\left(\frac{1}{\sqrt{1-2\varphi x+\beta x^2}},\frac{x}{\sqrt{1-2\varphi x+\beta x^2}}\right)M.$$

Соответственно,

$$\left(1-x(\log b(x))',xb^{-1}(x)\right)P^{2\varphi}=M\left(1-x(\log b(x))',xb^{-1}(x)\right)M,$$

$$\left(b^{-1}(x), xb^{-1}(x)\right)P^{2\varphi} = M\left(b^{-1}(x), xb^{-1}(x)\right)M .$$

4. Базисы Фибоначчи

Пусть

$$b(xa(x)) = a(x), \quad a\left(xb^{-1}(x)\right) = b(x),$$

где

$$a(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}} ,$$

$$b(x) = \sqrt{1+x}, \quad 1 - x(\log b(x))' = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\frac{1}{1+x}.$$

Сопоставление тождеств

$$b^{2n}(x) = (1+x)^n \ , \ \left(1 - x(\log b(x))'\right)b^{2n+2}(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)(1+x)^n$$

соответственно с тождествами (1), (2) дает

$$[2n, \to]\left(1 + x(\log a(x))', xa(x)\right) = x^n(1+x)^n = (1, x(1+x))x^n ,$$

$$[2n+1, \to](a(x), xa(x)) = \left(\frac{1}{2} + x\right)x^n(1+x)^n = \frac{1}{2}(1+2x, x(1+x))x^n,$$

$$(1, x(1+x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad (1+2x, x(1+x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 6 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Пусть запись $a(x) \to (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ означает, что ряд $a(x)$ является производящей функцией последовательности $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Отметим что

$$(1, x(1+x))\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x-x^2} \to (1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ \ldots),$$

$$(1+2x, x(1+x))\frac{1}{1-x} = \frac{1+2x}{1-x-x^2} \to (1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ \ldots).$$

В связи с этим матрицы $(1, x(1+x))$, $(1+2x, x(1+x))$ называются матрицами Фиббоначи и Люка. Отметим что

$$\left(P^{-1}\right)^T (1, x(1+x)) = (1, x(x-1)) = M(1, x(1+x)),$$

$$\left(P^{-1}\right)^T (1+2x, x(1+x)) = (2x-1, x(x-1)) = -M(1+2x, x(1+x)).$$

Построим псевдособственный базис преобразования $\left(P^{-1}\right)^T$, четными столбцами которого являются столбцы матрицы $(1, x(1+x))$, а нечетными столбцами являются столбцы матрицы $(1+2x, x(1+x))$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу, состоящую из четных столбцов матрицы

$$2\left(1 + x(\log a(x))', xa(x)\right)^{-1} = 2\left(\left(1+\frac{x}{2}\right)\frac{1}{1+x}, \frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)$$

и матрицу, состоящую из нечетных столбцов матрицы

$$(a(x), xa(x))^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}, \frac{x}{\sqrt{1+x}}\right):$$

$$\left(\frac{2+x}{1+x}, \frac{x^2}{1+x}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & -3 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 4 & 2 & 0 & \cdots \\ -1 & -5 & -5 & 0 & \cdots \\ 1 & 6 & 9 & 2 & \cdots \\ -1 & -7 & -14 & -7 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \left(\frac{x}{1+x}, \frac{x^2}{1+x}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & -2 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \cdots \\ -1 & -4 & -3 & 0 & \cdots \\ 1 & 5 & 6 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Отметим, что

$$\left(\frac{2+x}{1+x},\frac{x^2}{1+x}\right)\frac{1}{1-x}=\frac{2+x}{1+x-x^2}\to(2,-1,\ 3,-4,\ 7,\ \ldots),$$

$$\left(\frac{x}{1+x},\frac{x^2}{1+x}\right)\frac{1}{1-x}\to\frac{x}{1+x-x^2}=(0,\ 1,-1,\ 2,-3,\ 5,\ \ldots);$$

$$P\left(\frac{2+x}{1+x},\frac{x^2}{1+x}\right)=\left(\frac{2-x}{1-x},\frac{x^2}{1-x}\right)=M\left(\frac{2+x}{1+x},\frac{x^2}{1+x}\right),$$

$$P\left(\frac{x}{1+x},\frac{x^2}{1+x}\right)=\left(\frac{x}{1-x},\frac{x^2}{1-x}\right)=-M\left(\frac{x}{1+x},\frac{x^2}{1+x}\right).$$

Построим псевдособственный базис преобразования P, четными столбцами которого являются столбцы матрицы $\left(\frac{2+x}{1+x},\frac{x^2}{1+x}\right)$, а нечетными столбцами являются столбцы матрицы $\left(\frac{x}{1+x},\frac{x^2}{1+x}\right)$:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 4 & -2 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & -1 & -5 & 3 & -5 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 6 & -4 & 9 & -3 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Пусть $a(x)$ – формальный степенной ряд, $c(x)$ – полином. Обозначим

$$(a(x)\,|\,c(x))=\sum_{n=0}^{\infty}a_nc_n\,.$$

Теорема 2.

$$\left(Ax^n\,|\,Bx^m\right)=2\delta_{n,m}\,.$$

Доказательство. Для любых $a(x)$, $c(x)$ мы имеем

$$(a(x)\,|\,c(x))=\left(Pa(x)\,|\left(P^{-1}\right)^T c(x)\right).$$

Если $Pa(x)=a(-x)$, $\left(P^{-1}\right)^T c(x)=-c(-x)$ или $Pa(x)=-a(-x)$,

$\left(P^{-1}\right)^T c(x) = c(-x)$, то $(a(x) \mid c(x)) = 0$. Таким образом,

$$\left(Ax^{2n} \mid Bx^{2m+1}\right) = \left(Ax^{2n+1} \mid Bx^{2m}\right) = 0.$$

Так как

$$Ax^{2n} = 2\left(1 + x(\log a(x))', xa(x)\right)^{-1} x^{2n},$$

$$Bx^{2m} = [2m, \to]\left(1 + x(\log a(x))', xa(x)\right),$$

$$Ax^{2n+1} = (a(x), xa(x))^{-1} x^{2n+1},$$

$$Bx^{2m+1} = [2m+1, \to]2(a(x), xa(x)),$$

то

$$\left(Ax^{2n} \mid Bx^{2m}\right) = \left(Ax^{2n+1} \mid Bx^{2m+1}\right) = 2\delta_{n,m}.$$

Отметим, что

$$A\frac{1}{1-x} = \frac{2(1+x)}{1+x-x^2} \to 2(1,\ 0,\ 1, -1,\ 2, -3,\ 5,\ \dots),$$

$$B\frac{1}{1-x} = \frac{2(1+x)}{1-x-x^2} \to 2(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ \dots),$$

$$A\frac{1}{1+x} = \frac{2}{1+x-x^2} \to 2(1, -1,\ 2, -3,\ 5,\ \dots),$$

$$B\frac{-1}{1+x} = \frac{2x}{1-x-x^2} \to 2(0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ \dots).$$

В связи с этим базисы A, B назовем базисами Фибоначчи. Обозначим $\alpha = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$. Отметим что

$$A\frac{1+\sqrt{5}x}{1-x^2} = 2\left(1 - \frac{1}{\alpha}x\right)^{-1} \to 2\left(1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\alpha^3}, \dots\right),$$

$$B\frac{\sqrt{5}+x}{1-x^2} = 2\alpha(1-\alpha x)^{-1} \to 2\left(\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots\right),$$

$$A\frac{1-\sqrt{5}x}{1-x^2}=2(1+\alpha x)^{-1}\to 2\left(1,-\alpha,\alpha^2,-\alpha^3,\dots\right),$$

$$B\frac{-\sqrt{5}+x}{1-x^2}=-\frac{2}{\alpha}\left(1+\frac{1}{\alpha}x\right)^{-1}=2\left(-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha^2},-\frac{1}{\alpha^3},\dots\right).$$

Обозначим

$$D_n(x,-1)=L_n(x),\;\; E_{n-1}(x,-1)=F_n(x),\; F_0(x)=0;$$

$$L_{-n}(x)=L_n(-x)=(-1)^n L_n(x),\;\; F_{-n}(x)=F_n(-x)=(-1)^{n-1}F_n(x).$$

Теорема 3.

$$[n,\to]A=x^n\left(L_{-n}\left(\frac{1}{x}\right)+F_{-n}\left(\frac{1}{x}\right)\right),\;\;[n,\to]B=x^n\left(L_{n+1}(x)+F_{n+1}(x)\right).$$

Доказательство.

$$\left(\frac{2+x}{1+x},\frac{x^2}{1+x}\right)\frac{1}{1-\varphi^2x}=\frac{2+x}{1+x-\varphi^2x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}D_n\left(-1,-\varphi^2\right)x^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n(-1)^n D_n\left(\frac{1}{\varphi},-1\right)x^n,$$

$$\left(\frac{x}{1+x},\frac{x^2}{1+x}\right)\frac{\varphi}{1-\varphi^2x}=\frac{\varphi x}{1+x-\varphi^2x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi E_{n-1}\left(-1,-\varphi^2\right)x^n=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi^n(-1)^{n-1}E_{n-1}\left(\frac{1}{\varphi},-1\right)x^n;$$

$$\left(1,x(1+x)\right)\frac{1}{1-\varphi^2x}=\frac{1}{1-\varphi^2x-\varphi^2x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\left(\varphi^2,-\varphi^2\right)x^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n E_n(\varphi,-1)x^n.$$

$$\left(1+2x, x(1+x)\right)\frac{\varphi}{1-\varphi^2 x}=\frac{\varphi(1+2x)}{1-\varphi^2 x-\varphi^2 x^2}=\frac{1}{\varphi x}\left(\frac{2-\varphi^2 x}{1-\varphi^2 x-\varphi^2 x^2}-2\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^{-1}D_{n+1}\left(\varphi^2,-\varphi^2\right)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^n D_{n+1}(\varphi,-1)x^n .$$

Из тождества $2A^{-1}=B^T$ видно, что пространство, образованное $2n$ первыми столбцами матрицы A, содержит пространство полиномов степени $< n$. Базис B можно рассматривать как базис пространства формальных степенных рядов, но с одним нюансом. Обозначим

$$a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=a_1\left(x^2\right)+xa_2\left(x^2\right).$$

Тогда

$$Ba(x)=a_1\left(x+x^2\right)+(1+2x)a_2\left(x+x^2\right).$$

Если

$$a(x)=c\left(x^2\right)\left(\sqrt{1+4x^2}-x\right),$$

где $c(x)$ – произвольный ряд, то $Ba(x)=0$. Таким образом, преобразование B аннулирует пространство рядов вида $c\left(x^2\right)\left(\sqrt{1+4x^2}-x\right)$. Так как

$$\left(1, x(1+x)\right)^{-1}=\left(1,\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2}\right),$$

$$\left(1+2x, x(1+x)\right)^{-1}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+4x}},\frac{\sqrt{1+4x}-1}{2}\right),$$

две матрицы Риордана являются правосторонними обратными матрицами матрицы B:

$$B_1^{-1}=\left(1,\frac{\sqrt{1+4x^2}-1}{2}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdots\\0&0&0&0&0&\cdots\\0&1&0&0&0&\cdots\\0&0&0&0&0&\cdots\\0&-1&1&0&0&\cdots\\0&0&0&0&0&\cdots\\0&2&-2&1&0&\cdots\\0&0&0&0&0&\cdots\\0&-5&5&-3&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},$$

$$B_2^{-1}=\left(\frac{x}{\sqrt{1+4x^2}},\frac{\sqrt{1+4x^2}-1}{2}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 6 & -3 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -20 & 10 & -4 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Эти матрицы можно использовать для нахождения координат произвольного ряда $a(x)$ в базисе B. Очевидно, что если коэффициенты ряда $b(x)$ являются координатами ряда $a(x)$, то коэффициенты ряда $b(x)+c(x)$, $Bc(x)=0$, также являются координатами ряда $a(x)$.

Пример 2.

$$(1+x)^n=B\left(\frac{1+\sqrt{1+4x^2}}{2}\right)^n.$$

С другой стороны, так как $PA=MAM$, $A^T=2B^{-1}$, то

$$(1+x)^n=B\,\frac{x^nL_n(1/x)+x^nF_n(1/x)}{2}.$$

Действительно,

$$\left(\frac{1+\sqrt{1+4x^2}}{2}\right)^n=\frac{x^nL_n(1/x)+x^nF_n(1/x)}{2}+\frac{x^{n-1}F_n(1/x)\left(\sqrt{1+4x^2}-x\right)}{2}.$$

5. Обобщенные базисы Фибоначчи

Пусть D_1, D_2 – диагональные матрицы, такие, что

$$D_1x^{2n}=\frac{1}{2}x^{2n},\ D_1x^{2n+1}=x^{2n+1},\ \ D_2x^{2n}=x^{2n},\ D_2x^{2n+1}=\frac{1}{2}x^{2n+1}.$$

Обозначим $AD_1=\tilde{A}$, $BD_2=\tilde{B}$. Тогда

$$\tilde{A}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}\left(\frac{2+3x}{1+x-x^2}\right)\to\frac{1}{2}(2,1,1,0,1,-1,2,-3,\ldots),$$

$$\tilde{B}\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}\left(\frac{3+2x}{1-x-x^2}\right)\to\frac{1}{2}(3,5,8,13,21,\dots),$$

$$\tilde{A}\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}\left(\frac{2-x}{1+x-x^2}\right)\to\frac{1}{2}(2,-3,5,-8,13,\dots),$$

$$\tilde{B}\frac{-1}{1+x}=\frac{1}{2}\left(\frac{-1+2x}{1-x-x^2}\right)\to\frac{1}{2}(-1,1,0,1,1,2,3,5,\dots).$$

Базисы $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ назовем приведенными базисами Фибоначчи. Обобщением этих базисов являются базисы $A_{(\varphi,\beta)}$, $B_{(\varphi,\beta)}$, которые строятся следующим образом. Пусть

$$b(xa(x))=a(x),\quad a\left(xb^{-1}(x)\right)=b(x),$$

где

$$a(x)=\frac{(\varphi/2)x+\sqrt{1+\left((\varphi/2)^2-\beta\right)x^2}}{1-\beta x^2},$$

$$b(x)=\sqrt{1+\varphi x+\beta x^2},\ 1-x(\log b(x))'=\frac{1+(\varphi/2)x}{1+\varphi x+\beta x^2}.$$

Тогда

$$B_{(\varphi,\beta)}x^{2n}=[2n,\to]\left(1+x(\log a(x))',xa(x)\right)=\left(\beta+\varphi x+x^2\right)^n,$$

$$B_{(\varphi,\beta)}x^{2n+1}=[2n+1,\to](a(x),xa(x))=\left(\frac{\varphi}{2}+x\right)\left(\beta+\varphi x+x^2\right)^n,$$

$$A_{(\varphi,\beta)}x^{2n}=\left(\frac{1+(\varphi/2)x}{1+\varphi x+\beta x^2},\frac{x}{\sqrt{1+\varphi x+\beta x^2}}\right)x^{2n}=\frac{(1+(\varphi/2)x)x^{2n}}{\left(1+\varphi x+\beta x^2\right)^{n+1}},$$

$$A_{(\varphi,\beta)}x^{2n+1}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi x+\beta x^2}},\frac{x}{\sqrt{1+\varphi x+\beta x^2}}\right)x^{2n+1}=\frac{x^{2n+1}}{\left(1+\varphi x+\beta x^2\right)^{n+1}},$$

$$\left(A_{(\varphi,\beta)}x^n\mid B_{(\varphi,\beta)}x^m\right)=\delta_{n,m},$$

$$P^{\varphi}A_{(\varphi,\beta)}=MA_{(\varphi,\beta)}M,\ \left(P^{-\varphi}\right)^T B_{(\varphi,\beta)}=MB_{(\varphi,\beta)}M.$$

Таким образом, $\tilde{A} = A_{(1,0)}$, $\tilde{B} = B_{(1,0)}$. Отметим, что множество матриц $A_{(\varphi,\beta)}$ (соответственно, множество матриц $B_{(\varphi,\beta)}$) содержит две матричные группы. Во-первых, это степени матрицы Паскаля: $P^{\varphi} = A_{\left(-2\varphi,\varphi^2\right)}$, $\left(P^{\varphi}\right)^T = B_{\left(2\varphi,\varphi^2\right)}$. Во-вторых, $A_{(0,\beta)}$, $B_{(0,\beta)}$:

$$A_{(0,\beta)}x^{2n} = \frac{x^{2n}}{\left(1+\beta x^2\right)^{n+1}},\quad A_{(0,\beta)}x^{2n+1} = \frac{x^{2n+1}}{\left(1+\beta x^2\right)^{n+1}},$$

$$B_{(0,\beta)}x^{2n} = \left(\beta + x^2\right)^n,\ B_{(0,\beta)}x^{2n+1} = x\left(\beta + x^2\right)^n,$$

$$\left(A_{(0,\beta)}\right)^T = B_{(0,-\beta)}.$$

Теорема 4.

$$A_{(\varphi,\beta_1)}A_{(0,\beta_2)} = A_{(\varphi,\beta_1+\beta_2)},\quad B_{(\varphi,\beta_1)}B_{(0,\beta_2)} = B_{(\varphi,\beta_1+\beta_2)}.$$

Доказательство.

$$\left(\frac{1+(\varphi/2)x}{1+\varphi x+\beta_1 x^2},\frac{x^2}{1+\varphi x+\beta_1 x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\beta_2 x},\frac{x}{1+\beta_2 x}\right) =$$

$$\left(\frac{1+(\varphi/2)x}{1+\varphi x+(\beta_1+\beta_2)x^2},\frac{x^2}{1+\varphi x+(\beta_1+\beta_2)x^2}\right),$$

$$\left(\frac{x}{1+\varphi x+\beta_1 x^2},\frac{x^2}{1+\varphi x+\beta_1 x^2}\right)\left(\frac{1}{1+\beta_2 x},\frac{x}{1+\beta_2 x}\right) =$$

$$\left(\frac{x}{1+\varphi x+(\beta_1+\beta_2)x^2},\frac{x^2}{1+\varphi x+(\beta_1+\beta_2)x^2}\right);$$

$$\left(1,\beta_1+\varphi x+x^2\right)\left(1,\beta_2+x\right) = \left(1,(\beta_1+\beta_2)+\varphi x+x^2\right),$$

$$\left(\frac{\varphi}{2}+x,\beta_1+\varphi x+x^2\right)\left(1,\beta_2+x\right) = \left(\frac{\varphi}{2}+x,(\beta_1+\beta_2)+\varphi x+x^2\right),$$

где мы воспользовались «обобщенными» матрицами Риордана $\left(f(x),g(x)\right)$, для которых условие $g_0 \neq 0$ является допустимым [17], [18].

Таким образом, $A_{(\varphi,\beta)} = A_{(\varphi,0)}A_{(0,\beta)}$, $B_{(\varphi,\beta)} = B_{(\varphi,0)}B_{(0,\beta)}$. Так как

$$[n,\to]\,A_{(\varphi,0)} = x^n\left(\frac{1}{2}L_{-n}\left(\frac{\varphi}{x}\right) + F_{-n}\left(\frac{\varphi}{x}\right)\right),$$

$$[n,\to]\,B_{(\varphi,0)} = x^n\left(\frac{1}{2}L_{n+1}(\varphi x) + F_{n+1}(\varphi x)\right),$$

то

$$[n,\to]\,A_{(\varphi,\beta)} = \frac{1}{2}\left(1,\sqrt{x^2-\beta}\right)x^n L_{-n}\left(\frac{\varphi}{x}\right) + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-\beta}},\sqrt{x^2-\beta}\right)x^n F_{-n}\left(\frac{\varphi}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-\beta}\right)^n L_{-n}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{x^2-\beta}}\right) + x\left(\sqrt{x^2-\beta}\right)^{n-1} F_{-n}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{x^2-\beta}}\right);$$

$$[n,\to]\,B_{(\varphi,\beta)} =$$

$$= \left(\frac{1}{1-\beta x^2},\frac{x}{\sqrt{1-\beta x^2}}\right)x^n F_{n+1}(\varphi x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta x^2}},\frac{x}{\sqrt{1-\beta x^2}}\right)x^n L_{n+1}(\varphi x) =$$

$$= \frac{x^n}{\left(\sqrt{1-\beta x^2}\right)^{n+2}} F_{n+1}\left(\frac{\varphi x}{\sqrt{1-\beta x^2}}\right) + \frac{x^n}{2\left(\sqrt{1-\beta x^2}\right)^{n+1}} L_{n+1}\left(\frac{\varphi x}{\sqrt{1-\beta x^2}}\right).$$

Пример 3. Так как $P^{\varphi} = A_{\left(-2\varphi,\varphi^2\right)}$, $\left(P^{\varphi}\right)^T = B_{\left(2\varphi,\varphi^2\right)}$, то

$$(\varphi + x)^n =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-\varphi^2}\right)^n L_n\left(\frac{2\varphi}{\sqrt{x^2-\varphi^2}}\right) + x\left(\sqrt{x^2-\varphi^2}\right)^{n-1} F_n\left(\frac{2\varphi}{\sqrt{x^2-\varphi^2}}\right),$$

$$\frac{1}{(1-\varphi x)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2\left(\sqrt{1-\varphi^2 x^2}\right)^{n+1}} L_{n+1}\left(\frac{2\varphi x}{\sqrt{1-\varphi^2 x^2}}\right) + \frac{1}{\left(\sqrt{1-\varphi^2 x^2}\right)^{n+2}} F_{n+1}\left(\frac{2\varphi x}{\sqrt{1-\varphi^2 x^2}}\right).$$

[1] L. Shapiro, S. Getu, W. Woan, L. Woodson, The Riordan group, Discrete Appl. Math. 34 (1991) 229-339.
[2] R. Sprugnoli, Riordan arrays and combinatorial sums, Discrete Math.132 (1994) 267-290.
[3] W, Wang, T. Wang, Generalized Riordan arrays, Discrete Math. 308 (2008) 6466-6500.
[4] S. M. Roman, The Umbral Calculus, Academic Press, 1984.
[5] N. T. Cameron, A. Nkwanta, On some (pseudo) involutions in the Riordan group, J. Integer Seq., 8 (2005), Article 06.2.3.
[6] G.-S. Cheon, H. Kim, L. W. Shapiro, Riordan group involutions, Linear Algebra Appl., 428 (2008), 941-952.
[7] Z.-H. Sun, Invariant sequences under binomial transformation, Fibonacci Quart. 39 (2001) 324–333.
[8] Y. Wang, Self-inverse sequences related to a binomial inverse pair, Fibonacci Quart. 43 (2005) 46–52.
[9] G-S. Choi, S-G. Hwang, I-P. Kim, B. L. Shader, (± 1)-Invariant sequences and truncated Fibonacci sequences, Linear Algebra Appl. 395 (2005) 303–312.
[10] I-P. Kim, M. J. Tsatsomeros, Pascal eigenspaces and invariant sequences of the first or second kind, Linear Algebra Appl. 535 (2017) 171-190.
[11] I-P. Kim, M. J. Tsatsomeros, Inverse relations in Shapiro's open questions, Discrete Math. 341 (2018) 691-700.
[12] P. Barry, Symmetric third-order recurring sequences, Chebyshev polynomials, and Riordan arrays, J. of Integer Seq., 12 (2009), Article 09.8.6.
[13] A Luzon and M. A. Moron, Recurrence relations for polynomial sequences via Riordan matrices, Linear Algebra Appl. 433 (2010) 1422-1446.
[14] P. Barry and A. Hennessy, Meixner-type results for Riordan arrays and associated integer sequences, J. Integer Seq., 13 (2010), Article 10.9.4.
[15] P. Barry, On the restricted Chebyshev–Boubaker polynomials, Integral Transforms Spec. Funct., 28(2017), 1-16.
[16] W. Lang, On polynomials related to powers of the generating function of Catalan's numbers, Fibonacci Quart. 38. (2000) 408-419.
[17] Peter Bala, Notes on generalized Riordan arrays, https://oeis.org/A260492/a260492.pdf
[18] Alan D. Sokal, How to generalize (and not to generalize) the Chu--Vandermonde identity, arXiv:1804.08919.