ЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПОЛИНОМЫ МАТРИЦ РИОРДАНА

Е. Бурлаченко

Числитель рациональной функции будем называть числительным полиномом. Обобщенные полиномы Эйлера $\alpha_n(x)=(1-x)^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty}p_n(m)x^m$, где $p_n(x)$ – полином степени n, являются числительными полиномами производящих функций диагоналей ординарных матриц Риордана. Обобщенные полиномы Нараяны $\varphi_n(x)=(1-x)^{2n+1}\sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\ldots(m+n)\,p_n(m)x^m$ являются числительными полиномами производящих функций диагоналей экспоненциальных матриц Риордана. В настоящей статье мы рассмотрим конструктивные взаимоотношения между этими двумя типами числительных полиномов.

1. Введение

Предметом нашего изучения являются преобразования в пространстве формальных степенных рядов и соответствующие матрицы. Строкам и столбцам матриц поставим в соответствие производящие функции их элементов. Таким образом, выражение $Aa(x)=b(x)$ означает, что вектор-столбец, умножаемый на матрицу A, имеет производящую функцию $a(x)$, результирующий вектор-столбец имеет производящую функцию $b(x)$. n-й коэффициент ряда $a(x)$, n-ю строку, n-ю нисходящую диагональ и n-й столбец матрицы A будем обозначать соответственно

$$[x^n]a(x),\quad [n,\rightarrow]A,\ \ [n,\searrow]A,\quad Ax^n.$$

Матрица $(f(x),g(x))$, $g_0=0$, n-й столбец которой имеет производящею функцию $f(x)g^n(x)$, называется матрицей Риордана [1] – [5]. Она является произведением двух матриц, которые соответствуют умножению и композиции рядов:

$$(f(x),g(x))=(f(x),x)(1,g(x)),$$

$$(f(x),x)a(x)=f(x)a(x),\ (1,g(x))a(x)=a(g(x)),$$

$$(f(x),g(x))(b(x),a(x))=(f(x)b(g(x)),a(g(x))).$$

Матрицы

$$\left|e^x\right|^{-1}(f(x),g(x))\left|e^x\right|=(f(x),g(x))_{e^x},$$

где $\left|e^x\right|$ – диагональная матрица, $\left|e^x\right| x^n = x^n / n!$, называются экспоненциальными матрицами Риордана. Обозначим

$$[n,\to](f(x), g(x))_{e^x} = s_n(x),\ f_0 \neq 0,\ g_1 \neq 0.$$

Тогда

$$(f(x), g(x))_{e^x}(1-\varphi x)^{-1} = \left|e^x\right|^{-1}(f(x), g(x))e^{\varphi x} = \left|e^x\right|^{-1} f(x)\exp(\varphi g(x))$$

или

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n(\varphi)}{n!}x^n = f(x)\exp(\varphi g(x)).$$

Последовательность полиномов $s_n(x)$ называется последовательностью Шеффера, а в случае $f(x)=1$ – биномиальной последовательностью. Свойства последовательностей Шеффера являются предметом изучения теневого исчисления [6]. Матрица.

$$P = \left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right) = \left(e^x, x\right)_{e^x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

называется матрицей Паскаля. Степень матрицы Паскаля определяется равенством

$$P^{\varphi} = \left(\frac{1}{1-\varphi x}, \frac{x}{1-\varphi x}\right) = \left(e^{\varphi x}, x\right)_{e^x}.$$

Наряду с нижними треугольными матрицами Риордана мы будем рассматривать «квадратные» матрицы $(b(x), a(x))$, $b_0 \neq 0$ $a_0 = 1$. Например,

$$\left(1, \frac{1}{1+x}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 0 & -1 & -2 & -3 & \cdots \\ 0 & 1 & 3 & 6 & \cdots \\ 0 & -1 & -4 & -10 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Сюда же относится верхняя треугольная матрица $(1, 1+x)$, транспонированная к матрице Паскаля и совпадающая с матрицей оператора сдвига:

$$\left(1,1+x\right)=P^{T}=E=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\cdots\\0&1&2&3&\cdots\\0&0&1&3&\cdots\\0&0&0&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}.$$

Матрицу $\left(b\left(x\right),a\left(x\right)\right)$, можно умножать справа на матрицу с конечными столбцами, слева – на матрицу с конечными строками. На первых порах (до Раздела 4) мы ограничимся множеством матриц вида $\left(1,a\left(x\right)\right)$. Так как

$$\left[n,\rightarrow\right]\left(1,a\left(x\right)\right)=\left[n,\searrow\right]\left(1,xa\left(x\right)\right),$$

то матрица $\left(1,a\left(x\right)\right)$ является инструментом для изучения матрицы $\left(1,xa\left(x\right)\right)$. Обозначим

$$\left[n,\rightarrow\right]\left(1,a\left(x\right)-1\right)=v_n\left(x\right)=\sum_{m=1}^{n}v_m x^m\ ,\ n>0.$$

Так как

$$\left(1,a\left(x\right)-1\right)\left(1,1+x\right)=\left(1,a\left(x\right)\right),$$

$$\left[n,\rightarrow\right]\left(1,1+x\right)=\frac{x^n}{\left(1-x\right)^{n+1}},$$

то

$$\left[n,\rightarrow\right]\left(1,a\left(x\right)\right)=\sum_{m=1}^{n}\frac{v_m x^m}{\left(1-x\right)^{m+1}}=\sum_{m=1}^{n}\frac{v_m x^m\left(1-x\right)^{n-m}}{\left(1-x\right)^{n+1}}=\frac{\alpha_n\left(x\right)}{\left(1-x\right)^{n+1}}.$$

Если $a\left(x\right)=e^x$, то $\alpha_n\left(x\right)=A_n\left(x\right)/n!$, где $A_n\left(x\right)$ – полиномы Эйлера:

$$\frac{A_n\left(x\right)}{\left(1-x\right)^{n+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}m^n x^m,\ \ A_n\left(1\right)=n!.$$

Например,

$$A_1\left(x\right)=x,\ \ A_2\left(x\right)=x+x^2,\ \ A_3\left(x\right)=x+4x^2+x^3,$$

$$A_4\left(x\right)=x+11x^2+11x^3+x^4.$$

В связи с этим мы будем называть полиномы $\alpha_n\left(x\right)$ обобщенными полиномами Эйлера (ОПЭ). Так как

$$\frac{\alpha_n(t)}{(1-t)^{n+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}\left[x^n\right]a^m(x)t^m=\left[x^n\right](1-ta(x))^{-1},$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(t)x^n=\frac{1-t}{1-ta(x(1-t))}. \qquad (1)$$

«Квадратные» матрицы Риордана (названные матрицами свертки) и числительные полиномы производящих функций их строк рассматривались в цикле статей [7] – [11]. В [12] такие матрицы названы обобщенными матрицами Риордана. Концепция обобщенных полиномов Эйлера, названных p_n-связанными Эйлеровыми полиномами, в общем виде представлена в [13].

Обозначим

$$[n,\searrow](1,xa(x))=\frac{\alpha_n(x)}{(1-x)^{n+1}},\ [n,\rightarrow](1,\log a(x))_{e^x}=u_n(x),$$

$$[n,\rightarrow](1,a(x)-1)=v_n(x),$$

Если последовательность полиномов имеет вид $c_0(x)=1,\ \left[x^0\right]c_n(x)=0$, мы будем иметь в виду, что выражение $(1/x)c_n(x)$ соответствует случаю $n>0$. Обозначим

$$\frac{1}{x}\alpha_n(x)=\tilde{\alpha}_n(x),\ \frac{1}{x}A_n(x)=\tilde{A}_n(x),\ \frac{1}{x}u_n(x)=\tilde{u}_n(x),$$

$$\frac{1}{x}v_n(x)=\tilde{v}_n(x).$$

Пусть символы $(\varphi)_n$, $[\varphi]_n$ означают соответственно нисходящий и восходящий факториал:

$$(\varphi)_n=\varphi(\varphi-1)\ldots(\varphi-n+1),\ \ [\varphi]_n=\varphi(\varphi+1)\ldots(\varphi+n-1).$$

В Разделе 2 мы рассмотрим обобщенные полиномы Эйлера и связанные с ними преобразования. Введем матрицы $\tilde{U}_n$, $\tilde{V}_n$:

$$\tilde{U}_nx^p=\frac{1}{n!}(1-x)^{n-1-p}\,\tilde{A}_{p+1}(x),\quad \tilde{U}_n^{-1}x^p=(x-1)_p\,[x+1]_{n-p-1},$$

$$\tilde{V}_nx^p=(1+x)^{n-p-1}\,x^p,\quad \tilde{V}_n^{-1}x^p=(1-x)^{n-p-1}\,x^p,\ \ p=0,1,\ldots,n-1.$$

Тогда

$$\tilde{U}_n \tilde{u}_n(x) = \tilde{\alpha}_n(x), \quad \tilde{V}_n \tilde{\alpha}_n(x) = \tilde{v}_n(x).$$

Мы рассмотрим ряды ${}_{(\beta)}a(x)$, ${}_{(0)}a(x) = a(x)$, которые определяются следующим образом:

$${}_{(\beta)}a^{\varphi}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi}{\varphi + n\beta} \frac{u_n(\varphi + n\beta)}{n!} x^n,$$

Обозначим

$$[n, \searrow]\left(1, x\,{}_{(\beta)}a(x)\right) = \frac{{}_{(\beta)}\alpha_n(x)}{(1-x)^{n+1}}, \ \frac{1}{x}\,{}_{(\beta)}\alpha_n(x) = {}_{(\beta)}\tilde{\alpha}_n(x).$$

Введем матрицы

$$A_n^{\beta} = \tilde{U}_n E^{n\beta} \tilde{U}_n^{-1} = \tilde{V}_n^{-1} \tilde{D}\left((1+x)^{n\beta}, x\right)^T \tilde{D}^{-1} \tilde{V}_n, \ \tilde{D}x^n = (n+1)x^n.$$

Тогда

$$A_n^{\beta} \tilde{\alpha}_n(x) = {}_{(\beta)}\tilde{\alpha}_n(x).$$

Мы дадим общую формулу для ОПЭ, связанных с обобщенным биномиальным рядом. Именно, пусть

$${}_{(\beta)}a^{\varphi}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi}{\varphi + n\beta} \binom{\varphi + n\beta}{n} x^n, \ \frac{{}_{(\beta)}\alpha_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m}{m + n\beta} \binom{m + n\beta}{n} x^m.$$

Тогда

$${}_{(\beta)}\alpha_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \binom{n(1-\beta)}{m-1} \binom{n\beta}{n-m} x^m.$$

В Разделе 3 мы рассмотрим обобщенные полиномы Нараяны $\varphi_n(x)$, которые являются числительными полиномами матрицы $\left(1, x\,a(x)\right)_{e^x}$:

$$\frac{\varphi_n(x)}{(1-x)^{2n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[m+1]_n u_n(m)}{n!} x^m, \ \frac{1}{x}\varphi_n(x) = \tilde{\varphi}_n(x).$$

Введем матрицы $\tilde{F}_n$:

$$\tilde{F}_n x^p = (1-x)^{2n+1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{p+1} \binom{m+n}{n} x^{m-1},$$

$$\tilde{F}_n^{-1}x^p = \frac{n!}{(2n)!}(x-1)_p\,[x+n+1]_{n-p-1},\ p=0,1,\dots,n-1.$$

Тогда

$$\tilde{F}_n\tilde{u}_n(x) = \tilde{\varphi}_n(x).$$

Введем матрицы $\tilde{S}_n = \tilde{F}_n\tilde{U}_n^{-1}$. Тогда

$$\tilde{S}_n\tilde{\alpha}_n(x) = \tilde{\varphi}_n(x).$$

Оказывается, что

$$\tilde{S}_n = \tilde{V}_n^{-1}\tilde{C}_n\tilde{V}_n,\ \tilde{C}_nx^p = \frac{(n+p+1)!}{(p+1)!}x^p\ .$$

Мы дадим общую формулу для ОПН, связанных с обобщенным биномиальным рядом. Именно, пусть

$$\frac{{}_{(\beta)}\varphi_n(x)}{(1-x)^{2n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{m}{m+\beta n}\binom{m+\beta n}{n}[m+1]_n\,x^m.$$

Тогда

$${}_{(\beta)}\varphi_n(x) = \frac{(n+1)!}{n}\sum_{m=1}^{n}\binom{n(2-\beta)}{m-1}\binom{n\beta}{n-m}x^m\,.$$

В Разделе 4 мы рассмотрим преобразования общего вида. Пусть $g_n(x)$, $h_n(x)$ являются числительными полиномами соответственно матриц $(b(x),xa(x))$, $(b(x),xa(x))_{e^x}$, $b_0\neq 0$. Обозначим

$$[n,\to](b(x),\log a(x))_{e^x} = s_n(x).$$

Введем матрицы U_n, F_n:

$$U_nx^p = (1-x)^{n+1}\frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}m^px^m,\ U_n^{-1}x^p = (x)_p\,[x+1]_{n-p};$$

$$F_nx^p = (1-x)^{2n+1}\sum_{m=0}^{\infty}m^p\binom{m+n}{n}x^m,\ F_n^{-1}x^p = \frac{n!}{(2n)!}(x)_p\,[x+n+1]_{n-p},$$

$p=0,\ 1,\dots,n$. Тогда

$$U_ns_n(x) = g_n(x),\ F_ns_n(x) = h_n(x).$$

Введем матрицы $S_n = F_n U_n^{-1}$. Тогда

$$S_n g_n(x) = h_n(x).$$

Оказывается, что

$$S_n = V_n^{-1} C_n V_n,$$

$$V_n x^p = (1+x)^{n-p} x^p, \quad V_n^{-1} x^p = (1-x)^{n-p} x^p, \ C_n x^p = \frac{(n+p)!}{p!} x^p \ ;$$

$$S_n x^p = \frac{(n+p)!(n-p)!}{n!} \sum_{m=p}^{n} \binom{n}{m-p} \binom{n}{n-m} x^m,$$

$$S_n^{-1} x^p = \frac{p!(n-p)!}{(2n)!} \sum_{m=p}^{n} \binom{-n}{m-p} \binom{2n}{n-m} x^m.$$

В Разделе 5 мы рассмотрим обобщенные полиномы Нараяны типа B, которые являются числительными полиномами матрицы $(a(x).xa(x))_{e^x}$, и аналогичные полиномы, которые являются числительными полиномами матрицы $\left((xa(x))', xa(x)\right)$.

В Разделе 6 мы вернемся к рядам ${}_{(\beta)}a(x)$ из Раздела 2 и рассмотрим преобразования

$$G_n^\beta = U_n E^{n\beta} U_n^{-1} = V_n^{-1} \left((1+x)^{n\beta}, x\right)^T V_n,$$

$$H_n^\beta = F_n E^{n\beta} F_n^{-1} = S_n G_n^\beta S_n^{-1} = V_n^{-1} C_n \left((1+x)^{n\beta}, x\right)^T C_n^{-1} V_n,$$

$$T_n^\beta = \tilde{F}_n E^{n\beta} \tilde{F}_n^{-1} = \tilde{S}_n A_n^\beta \tilde{S}_n^{-1} = \tilde{V}_n^{-1} \tilde{C}_n \tilde{D} \left((1+x)^{n\beta}, x\right)^T \tilde{D}^{-1} \tilde{C}_n^{-1} \tilde{V}_n.$$

Пусть ${}_{(\beta)}g_n(x)$, ${}_{(\beta)}h_n(x)$ являются числительными полиномами соответственно матриц

$$\left(b\left(x_{(\beta)}a^\beta(x)\right)\left(1 + x\beta\left(\log{}_{(\beta)}a(x)\right)'\right), x_{(\beta)}a(x)\right),$$

$$\left(b\left(x_{(\beta)}a^\beta(x)\right)\left(1 + x\beta\left(\log{}_{(\beta)}a(x)\right)'\right), x_{(\beta)}a(x)\right)_{e^x},$$

${}_{(\beta)}\varphi_n(x)$ являются числительными полиномами матрицы $\left(1, x_{(\beta)}a(x)\right)_{e^x}$. Тогда

$$G_n^{\beta} g_n(x) = {}_{(\beta)}g_n(x),\ \ H_n^{\beta} h_n(x) = {}_{(\beta)}h_n(x),\ T_n^{\beta}\tilde{\varphi}_n(x) = {}_{(\beta)}\tilde{\varphi}_n(x).$$

Матрицы G_n^{β}, H_n^{β}, T_n^{β} характерны тем, что, по сравнению с ними, столбцы и строки матриц $G_n^{-\beta}$, $H_n^{-\beta}$, $T_n^{-\beta}$ переставлены в обратном порядке. Столбцы матрицы G_n^{β} выражаются общей формулой:

$$G_n^{\beta} x^p = \sum_{m=0}^{n} \binom{-n\beta + p}{m} \binom{n\beta + n - p}{n-m} x^m .$$

2. Обобщенные полиномы Эйлера

Пусть

$$u_n(x) = \sum_{p=1}^{n} u_p x^p,\ n > 0.$$

Так как

$$a^m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n(m)}{n!} x^n,\ \ u_0(x) = 1,$$

то

$$\frac{\alpha_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u_n(m)}{n!} x^m = \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} x^m \sum_{p=1}^{n} u_p m^p = \frac{1}{n!} \sum_{p=1}^{n} \sum_{m=0}^{\infty} u_p m^p x^m =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{p=1}^{n} \frac{u_p A_p(x)}{(1-x)^{p+1}} = \frac{\frac{1}{n!} \sum_{p=1}^{n} u_p (1-x)^{n-p} A_p(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Введем матрицы $\tilde{U}_n$:

$$\tilde{U}_n x^p = \frac{1}{n!} (1-x)^{n-1-p} \tilde{A}_{p+1}(x),\ \ p = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Например,

$$\tilde{U}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{U}_3 = \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{U}_4 = \frac{1}{4!} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & -1 & -3 & 11 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\tilde{U}_n \tilde{u}_n(x) = \tilde{\alpha}_n(x).$$

Так как

$$\frac{x^{p+1}}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+n-p-1}{n} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[m-p]_n}{n!} x^m, \ 0 \le p < n,$$

то

$$\tilde{U}_n^{-1} x^p = \frac{1}{x} \prod_{i=0}^{n-1} (x-p+i) = (x-1)_p [x+1]_{n-p-1}.$$

Например,

$$\tilde{U}_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \tilde{U}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ \tilde{U}_4^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & -6 \\ 11 & -1 & -1 & 11 \\ 6 & 2 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Введем матрицы J_n соответствующие оператору, переставляющему коэффициенты полинома n-й степени в обратном порядке. Например,

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\tilde{J}_n = J_{n-1}$.

Теорема 1.

$$\tilde{U}_n (1,-x) \tilde{U}_n^{-1} = (-1)^{n-1} \tilde{J}_n.$$

Доказательство.

$$(1,-x)(x-1)_p [x+1]_{n-p-1} = (-x-1)_p [-x+1]_{n-p-1} = (-1)^{n-1} (x-1)_{n-p-1} [x+1]_p$$

или

$$(1,-x) \tilde{U}_n^{-1} x^p = (-1)^{n+1} \tilde{U}_n^{-1} x^{n-p-1}, \ \ (1,-x) \tilde{U}_n^{-1} = (-1)^{n+1} \tilde{U}_n^{-1} \tilde{J}_n.$$

Таким образом,

$$(-1)^{n-1} \tilde{J}_n \tilde{\alpha}_n(x) = \tilde{U}_n \tilde{u}_n(-x).$$

Обозначим

$$[n, \searrow]\left(1, x a^{-1}(x)\right) = \frac{\alpha_n^{(-1)}(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Так как

$$[n,\to]\left(1,\log a^{-1}(x)\right)_{e^x}=u_n(-x),$$

то

$$\alpha_n^{(-1)}(x)=(-1)^n xJ_n\alpha_n(x),$$

Теорема 2.

$$\alpha_n(1)=(a_1)^n.$$

Доказательство. Обозначим $\tilde{U}_n x^p=\tilde{U}_p(x)$. Так как

$$a_1=[x]\log a(x),\ (a_1)^n=\left[x^n\right]u_n(x);\ \ \tilde{U}_p(1)=0,\ p<n-1;\ \ \tilde{U}_{n-1}(1)=1.$$

то

$$\alpha_n(1)=\sum_{p=0}^{n-1}u_{p+1}\tilde{U}_p(1)=u_n=(a_1)^n.$$

Возможен случай, когда $a_1=0$, степень полинома $u_n(x)$ меньше n и матрица $(1,\log a(x))_{e^x}$ не имеет обратной. Эта возможность отражается в следующей теореме.

Теорема 3. Если $s_{n-m}(x)$ – полином степени $n-m-1$, то

$$\tilde{U}_n s_{n-m}(x)=(1-x)^m\frac{(n-m)!}{n!}\tilde{U}_{n-m}s_{n-m}(x).$$

Соответственно, если $c_{n-m}(x)$ – полином степени $<n-m$, то

$$\tilde{U}_n^{-1}(1-x)^m c_{n-m}(x)=\frac{n!}{(n-m)!}\tilde{U}_{n-m}^{-1}c_{n-m}(x).$$

Доказательство. Пусть I_n единичная квадратная матрица порядка $n+1$, соответствующая оператору, аннулирующему лишние столбцы или строки матриц. Обозначим $\tilde{I}_n=I_{n-1}$. Тогда очевидно, что

$$\left((1-x)^{-m},x\right)\tilde{U}_n\tilde{I}_{n-m}=\frac{(n-m)!}{n!}\tilde{U}_{n-m},$$

или

$$\tilde{U}_n\tilde{I}_{n-m}=\left((1-x)^m,x\right)\frac{(n-m)!}{n!}\tilde{U}_{n-m}.$$

Соответственно,

$$\tilde{U}_n^{-1}\left((1-x)^m, x\right)\tilde{I}_{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!}\tilde{U}_{n-m}^{-1}.$$

Введем матрицы $\tilde{V}_n = \tilde{J}_n E \tilde{J}_n = \left((1+x)^n, x\right)P^{-1}\tilde{I}_n$. Например,

$$\tilde{V}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{V}_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, как мы уже выяснили во введении,

$$\tilde{V}_n^{-1}\tilde{v}_n(x) = \tilde{\alpha}_n(x),$$

и, следовательно

$$\tilde{U}_n^{-1}\tilde{V}_n^{-1}\tilde{v}_n(x) = \tilde{u}_n(x).$$

По Теореме 3 находим:

$$\tilde{U}_n^{-1}\tilde{V}_n^{-1}x^p = \tilde{U}_n^{-1}(1-x)^{n-p-1}x^p = \frac{n!}{(p+1)!}(x-1)_p =$$

$$= \frac{n!}{(p+1)!}\sum_{m=1}^{p+1} s(p+1,\ m)\,x^{m-1},$$

где $s(p+1,\ m)$ – числа Стирлинга первого рода. Следовательно,

$$\tilde{V}_n\tilde{U}_n x^p = \frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{p+1} m!\,S(p+1,\ m)\ x^{m-1},$$

где $S(p+1,\ m)$ – числа Стирлинга второго рода. Например,

$$\tilde{U}_4^{-1}\tilde{V}_4^{-1} = 4!\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4!} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{V}_4\tilde{U}_4 = \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3! & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4! \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.

$$a(x) = \frac{1+x}{1-x}, \quad a(x) - 1 = \frac{2x}{1-x}, \quad \tilde{v}_n(x) = 2^n\left(\frac{1}{2} + x\right)^{n-1},$$

$$\tilde{\alpha}_n(x) = \tilde{V}_n^{-1} 2^n \left(\frac{1}{2} + x\right)^{n-1} = 2(1+x)^{n-1},$$

$$u_n(x) = x\tilde{U}_n^{-1}\tilde{\alpha}_n(x) = 2\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\prod_{m=0}^{n-1}(x - p + m) =$$

$$= x\tilde{U}_n^{-1}\tilde{V}_n^{-1}\tilde{v}_n(x) = n!\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\frac{2^{p+1}}{(p+1)!}\prod_{m=0}^{p}(x - m).$$

Пример 2. Пусть

$$b(xg(x)) = g(x), \quad g\left(xb^{-1}(x)\right) = b(x).$$

Тогда по теореме обращения Лагранжа

$$[x^n]g^m(x) = [x^n]\Big(1 - x(\log b(x))'\Big)b^{m+n}(x),$$

$$(1, xg(x)) = \begin{pmatrix} g_0^0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ g_1^0 & g_0^1 & 0 & 0 & \cdot \\ g_2^0 & g_1^1 & g_0^2 & 0 & \cdot \\ g_3^0 & g_2^1 & g_1^2 & g_0^3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0^0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ c_1^1 & c_0^1 & 0 & 0 & \cdot \\ c_2^2 & c_1^2 & c_0^2 & 0 & \cdot \\ c_3^3 & c_2^3 & c_1^3 & c_0^3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

где

$$g_n^m = [x^n]g^m(x), \quad c_n^m = [x^n]\Big(1 - x(\log b(x))'\Big)b^m(x),$$

т.е.

$$[n, \to](1, xg(x)) = [n, \to]\Big(\Big(1 - x(\log b(x))'\Big)b^n(x), x\Big).$$

Если

$$g(x)=\frac{x}{2}+\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{1/2},$$

то

$$b(x)=(1+x)^{1/2},\quad 1-x(\log b(x))'=\left(1+\frac{x}{2}\right)(1+x)^{-1},$$

$$[2n,\to](1,xg(x))=\left(\frac{1}{2}+x\right)x^n(1+x)^{n-1},\ n>0.$$

Пусть

$$a(x)=\left(\frac{x}{2}+\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{1/2}\right)^2.$$

Тогда

$$a(x)-1=xa^{1/2}(x)=x\left(\frac{x}{2}+\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{1/2}\right),$$

$$\tilde{v}_{2n}(x)=\left(\frac{1}{2}+x\right)x^{n-1}(1+x)^{n-1},$$

$$\tilde{\alpha}_{2n}(x)=\tilde{V}_{2n}^{-1}\left(\frac{1}{2}+x\right)x^{n-1}(1+x)^{n-1}=\frac{1}{2}(1+x)x^{n-1};$$

$$u_{2n}(x)=x\tilde{U}_{2n}^{-1}\tilde{\alpha}_{2n}(x)=\frac{1}{2}\prod_{m=0}^{2n-1}(x-n+1+m)+\frac{1}{2}\prod_{m=0}^{2n-1}(x-n+m)=$$

$$=x\prod_{m=1}^{2n-1}(x+n-m)=\prod_{m=0}^{n-1}\left(x^2-m^2\right).$$

Пример 3. Этот пример рассматривается в [11]. Матрицы свертки мы заменим матрицами Риордана. Обозначим

$$[n,\to]\left(\frac{1}{1-x-kx^2},\frac{1}{1-x-kx^2}\right)=\frac{N_n(x)}{(1-x)^{n+1}},$$

$$[n,\to]\left(\frac{1}{1-kx-x^2},\frac{1}{1-kx-x^2}\right)=\frac{N_n^*(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Тогда

$$N_n(x)=[n,\to]\left(\frac{1}{1-x-kx^2},\frac{-kx^2}{1-x-kx^2}\right),$$

$$N_n^*(x)=[n,\to]\left(\frac{1}{1-kx-x^2},\frac{-x^2}{1-kx-x^2}\right).$$

Например,

$$\left(\frac{1}{1-x-x^2},\frac{1}{1-x-x^2}\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&\cdots\\1&2&3&4&5&\cdots\\2&5&9&14&20&\cdots\\3&10&22&40&65&\cdots\\5&20&51&105&190&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},$$

$$\left(\frac{1}{1-x-x^2},\frac{-x^2}{1-x-x^2}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdots\\1&0&0&0&\cdots\\2&-1&0&0&\cdots\\3&-2&0&0&\cdots\\5&-5&1&0&\cdots\\8&-10&3&0&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},$$

$$\frac{2-x}{(1-x)^3}=2+5x+9x^2+14x^3+\dots,$$

$$\frac{3-2x}{(1-x)^4}=3+10x+22x^2+40x^3+\dots,$$

$$\frac{5-5x+x^2}{(1-x)^5}=5+20x+51x^2+105x^3+\dots.$$

В общем случае, если $a(x)=\left(1+\varphi x+\beta x^2\right)^{-1}$. то

$$\tilde{\alpha}_n(x)=[n,\to]\left(\frac{1}{1+\varphi x+\beta x^2},\frac{\beta x^2}{1+\varphi x+\beta x^2}\right).$$

Действительно,

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\alpha}_n(t)x^n=\left(\frac{1}{1+\varphi x+\beta x^2},\frac{\beta x^2}{1+\varphi x+\beta x^2}\right)\frac{1}{1-tx}=1+\frac{-\varphi x-\beta(1-t)x^2}{1+\varphi x+\beta(1-t)x^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(t)x^n=1+t\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{\alpha}_n(t)x^n=\frac{1+\varphi(1-t)x+\beta(1-t)^2x^2}{1+\varphi x+\beta(1-t)x^2},$$

что соответствует формуле (1).

Обобщенный биномиальный ряд,

$$_{(\beta)}a^{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi}{\varphi+n\beta}\binom{\varphi+n\beta}{n}x^n;$$

$$_{(0)}a(x)=1+x,\ \ _{(1)}a(x)=(1-x)^{-1},\quad _{(2)}a(x)=\frac{1-(1-4x)^{1/2}}{2x},$$

$$_{(-1)}a(x)=\frac{1+(1+4x)^{1/2}}{2},\quad _{(1/2)}a(x)=\left(\frac{x}{2}+\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{1/2}\right)^2,$$

занимает в наших исследованиях важное место. Обобщение, которое лежит в его основе, можно распространить на любой формальный степенной ряд $a(x)$, $a_0=1$. С каждым таким рядом посредством преобразования Лагранжа

$$a^{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a^{\beta n}(x)}[x^n]\left(1-x\beta(\log a(x))'\right)a^{\varphi+\beta n}(x)$$

связано множество рядов $_{(\beta)}a(x)$, $_{(0)}a(x)=a(x)$, таких, что

$$_{(\beta)}a\left(xa^{-\beta}(x)\right)=a(x),\quad a\left(x\,_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right)=\,_{(\beta)}a(x),$$

$$[x^n]\,_{(\beta)}a^{\varphi}(x)=[x^n]\left(1-x\beta\frac{a'(x)}{a(x)}\right)a^{\varphi+\beta n}(x)=\frac{\varphi}{\varphi+\beta n}[x^n]a^{\varphi+\beta n}(x),$$

$$[x^n]\left(1+x\beta\frac{_{(\beta)}a'(x)}{_{(\beta)}a(x)}\right)\,_{(\beta)}a^{\varphi}(x)=\frac{\varphi+\beta n}{\varphi}[x^n]\,_{(\beta)}a^{\varphi}(x)=[x^n]a^{\varphi+\beta n}(x),$$

$$\left(1,x\,_{(\beta)}a^{\varphi}(x)\right)^{-1}=\left(1,x\,_{(\beta-\varphi)}a^{-\varphi}(x)\right),$$

$$\left(1+x\varphi\left(\log\,_{(\beta)}a(x)\right)',x\,_{(\beta)}a^{\varphi}(x)\right)^{-1}=\left(1-x\varphi\left(\log\,_{(\beta-\varphi)}a(x)\right)',x\,_{(\beta-\varphi)}a^{-\varphi}(x)\right).$$

Обозначим

$$[n,\to]\left(1,\log{}_{(\beta)}a(x)\right)_{e^x}={}_{(\beta)}u_n(x).$$

Тогда

$${}_{(\beta)}a^{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi}{\varphi+n\beta}\frac{u_n(\varphi+n\beta)}{n!}x^n,$$

$${}_{(\beta)}u_n(x)=x(x+n\beta)^{-1}u_n(x+n\beta).$$

Пусть

$$(1,\log a(x))^{-1}=(1,q(x)).$$

Тогда

$$\left(1,\log{}_{(\beta)}a(x)\right)^{-1}=\left(1,q(x)e^{-\beta x}\right).$$

Обозначим

$$\left(1,q(x)e^{-\beta x}\right)_{e^x}x^n={}_{(\beta)}q_n(x).$$

Тогда

$${}_{(\beta)}q_n(x)=(1+n\beta x)^{-1}q_n\left(\frac{x}{1+n\beta x}\right),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}{}_{(\beta)}u_n(\varphi)\,{}_{(\beta)}q_n(x)=(1-\varphi x)^{-1}.$$

Ряды ${}_{(\beta)}a(x)$ для целых β, обозначенные $S_\beta(x)$, были введены в [14]. В [15] эти ряды, названные обобщенными рядами Лагранжа, рассматриваются в связи с матрицами Риордана. Свойства этих рядов пересекаются со свойствами последовательностей Шеффера, поэтому связанные с ними равенства можно найти в теневом исчислении.

Обозначим

$$\frac{1}{x}\,{}_{(\beta)}u_n(x)={}_{(\beta)}\tilde{u}_n(x),$$

$$[n,\searrow]\left(1,x\,{}_{(\beta)}a(x)\right)=\frac{{}_{(\beta)}\alpha_n(x)}{(1-x)^{n+1}},\quad \frac{1}{x}\,{}_{(\beta)}\alpha_n(x)={}_{(\beta)}\tilde{\alpha}_n(x),$$

Тогда

$$E^{n\beta}\tilde{u}_n(x)=\tilde{u}_n(x+n\beta)={}_{(\beta)}\tilde{u}_n(x),$$

$$U_nE^{n\beta}U_n^{-1}\tilde{\alpha}_n(x)={}_{(\beta)}\tilde{\alpha}_n(x).$$

Обозначим

$$\tilde{U}_nE^{n\beta}\tilde{U}_n^{-1}=A_n^{\beta}.$$

Так как

$$(1,-x)\,E^{n\beta}\,(1,-x) = E^{-n\beta},\quad \tilde{U}_n\,(1,-x)\,\tilde{U}_n^{-1} = (-1)^{n-1}\,\tilde{J}_n,$$

то

$$\tilde{J}_n A_n^{\beta} \tilde{J}_n = A_n^{-\beta}.$$

Например,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad A_3 = \begin{pmatrix} 5 & \frac{5}{2} & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},\quad A_4 = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 3 & 1 \\ -28 & -\frac{35}{3} & -\frac{10}{3} & 0 \\ 20 & \frac{22}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ -5 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 1 & \frac{5}{2} & 5 \end{pmatrix},\quad A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -5 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{22}{3} & 20 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{35}{3} & -28 \\ 1 & 3 & 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

Так как $[x]_{(\beta)}a(x) = [x]a(x) = a_1$, то ${}_{(\beta)}\alpha_n(1) = \alpha_n(1)$ и сумма элементов каждого столбца матрицы A_n^{β} равна 1. Из Теоремы 3 вытекает равенство

$$\left((1-x)^{-m}, x\right) A_n^{\beta} \left((1-x)^{m}, x\right) \tilde{I}_{n-m} = A_{n-m}^{\frac{n\beta}{n-m}}.$$

Введем диагональную матрицу $\tilde{D}$, $\tilde{D}x^n = (n+1)x^n$:

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},\quad \tilde{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.

$$A_n^{\beta} = \tilde{V}_n^{-1}\tilde{D}\left((1+x)^{n\beta}, x\right)^T \tilde{D}^{-1}\tilde{V}_n.$$

Доказательство. Столбцы матриц $\tilde{V}_n\tilde{U}_n$, $\tilde{U}_n^{-1}\tilde{V}_n^{-1}$ определенным образом связаны со строками матриц $\left(e^x, e^x-1\right)_{e^x}$, $\left((1+x)^{-1}, \log(1+x)\right)_{e^x}$:

$$n!\left|e^x\right|\tilde{D}^{-1}\tilde{V}_n\tilde{U}_n x^p = [p,\to]\left(e^x, e^x-1\right)_{e^x},$$

$$(1/n!)\tilde{U}_n^{-1}\tilde{V}_n^{-1}\left|e^x\right|^{-1}\tilde{D}x^p = [p,\to]\left((1+x)^{-1}, \log(1+x)\right)_{e^x}.$$

Так как

$$\left((1+x)^{-1}, \log(1+x)\right)_{e^x}\left(e^{n\beta}, x\right)_{e^x}\left(e^x, e^x-1\right)_{e^x} = \left((1+x)^{n\beta}, x\right)_{e^x}$$

то

$$\tilde{V}_n\tilde{U}_n E^{n\beta}\tilde{U}_n^{-1}\tilde{V}_n^{-1} = \tilde{D}\left((1+x)^{n\beta}, x\right)^T \tilde{D}^{-1}\tilde{I}_n.$$

Таким образом,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$[n,\to]\left(1, {}_{(\beta)}a(x)-1\right) = {}_{(\beta)}v_n(x),\ \frac{1}{x}{}_{(\beta)}v_n(x) = {}_{(\beta)}\tilde{v}_n(x).$$

Тогда

$$\tilde{D}\left((1+x)^{n\beta}, x\right)^T \tilde{D}^{-1}\tilde{v}_n(x) = {}_{(\beta)}\tilde{v}_n(x).$$

Пусть ${}_{(\beta)}a(x)$ – обобщенный биномиальный ряд. Тогда $a(x) = 1 + x$,

$$\frac{{}_{(\beta)}\alpha_n(x)}{(1-x)^{n+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m}{m+n\beta}\binom{m+n\beta}{n}x^m .$$

Теорема 5.

$${}_{(\beta)}\alpha_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\binom{n(1-\beta)}{m-1}\binom{n\beta}{n-m}x^m .$$

Доказательство. Мы воспользуемся факториальным представлением биномиальных коэффициентов, т.е. докажем теорему для натуральных значений β. В силу полиномиальной аргументации (рассматриваемые биномиальные коэффициенты являются полиномами от β), это равносильно общему доказательству. Так как $\tilde{v}_n(x)=x^{n-1}$, то

$${}_{(\beta)}\tilde{v}_n(x)=\tilde{D}\left((1+x)^{n\beta},x\right)^T\tilde{D}^{-1}x^{n-1}=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{m+1}{n}\binom{n\beta}{n-m-1}x^m .$$

Так как

$$[m,\to]\tilde{V}_n^{-1}=\sum_{i=0}^{m}\binom{m-n}{m-i}x^i=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{n-i-1}{m-i}x^i,$$

то

$$\left[x^m\right]{}_{(\beta)}\tilde{\alpha}_n(x)=\left[x^m\right]\tilde{V}_n^{-1}{}_{(\beta)}\tilde{v}_n(x)=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{n-i-1}{m-i}\frac{(i+1)}{n}\binom{n\beta}{n-i-1}\frac{(n\beta-n+m+1)!}{(n\beta-n+m+1)!}=$$

$$=\frac{1}{n}\binom{n\beta}{n-m-1}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}(i+1)\binom{n\beta-n+m+1}{m-i}=$$

$$=\frac{1}{n}\binom{n\beta}{n-m-1}(-1)^m\binom{n\beta-n+m-1}{m}=\frac{1}{n}\binom{n\beta}{n-m-1}\binom{n(1-\beta)}{m}.$$

Отметим, что

$${}_{(0)}\alpha_n(x)=x^n,\ {}_{(1)}\alpha_n(x)=x,\ {}_{(1/2)}\alpha_{2n}(x)=\frac{1}{2}(1+x)x^n;$$

так как

$${}_{(1-\beta)}a(x)={}_{(\beta)}a^{-1}(-x),$$

то

$${}_{(1-\beta)}\alpha_n(x)=xJ_n\,{}_{(\beta)}\alpha_n(x)..$$

3. Обобщенные полиномы Нараяны

Между обыкновенными и экспоненциональными матрицами Риордана существуют конструктивные взаимоотношения. Отдельные проявления этих взаимоотношений напоминают детали конструкции, общий план которой является загадкой для нас. Следуя [16] – [18], мы рассмотрим некоторые из таких проявлений, связанные с числительными полиномами. Так как

$$[n,\searrow](1,xa(x))=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u_n(m)}{n!}x^m,$$

то

$$[n,\searrow](1,xa(x))_{e^x}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+n)!}{m!}\frac{u_n(m)}{n!}x^m=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[m+1]_n u_n(m)}{n!}x^m.$$

Если $a_1\neq 0$, то $[x+1]_n u_n(x)$ – полином степени $2n$, так что

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[m+1]_n u_n(m)}{n!}x^m=\frac{\varphi_n(x)}{(1-x)^{2n+1}},$$

где

$$\varphi_n(x)=x\frac{(2n)!}{n!}\tilde{U}_{2n}[x+1]_n\tilde{u}_n(x).$$

Так как $[x+1]_n u_n(x)=0$ при $x=0,\ -1,\ \ldots\ ,\ -n$, то в соответствии с Теоремой 1

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{[-m+1]_n u_n(-m)}{n!}x^m=\frac{(-1)^{2n}xJ_{2n}\varphi_n(x)}{(1-x)^{2n+1}}=\frac{(-1)^{2n}x^{n+1}J_n\varphi_n(x)}{(1-x)^{2n+1}},$$

т.е. $\varphi_n(x)$ – полином степени $\le n$. Так как

$$[x^{2n}][x+1]_n u_n(x)=(a_1)^n,$$

то в соответствии с Теоремой 2

$$\varphi_n(1)=(a_1)^n\frac{(2n)!}{n!}.$$

Если $a(x)=(1-x)^{-1}$, то

$$\varphi_n(x)=(n+1)!N_n(x)=(1-x)^{2n+1}\sum_{m=0}^{\infty}[m+1]_n\binom{m+n-1}{n}x^m,$$

где

$$N_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m-1}\binom{n}{n-m}x^m$$

– полиномы Нараяны. В связи с этим, полиномы $\varphi_n(x)$ будем называть обобщенными полиномами Нараяны (ОПН).

Так как

$$\frac{\varphi_n(t)}{(n+1)!(1-t)^{2n+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\binom{n+m}{m}[x^n]a^m(x)t^m=$$

$$=\frac{1}{n+1}[x^n](1-ta(x))^{-n-1}=[x^n]b(x),$$

где

$$b(x)=\frac{1}{1-ta(xb(x))}\ ,\ (1,xb(x))=(1,x(1-ta(x)))^{-1},$$

то

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t)\frac{x^n}{(n+1)!}=(1-t)b\left(x(1-t)^2\right).$$

Например,

$$a(x)=\frac{1}{1-x},\quad b(x)=\frac{1+x-t-\sqrt{1-2x-2t-2xt+x^2+t^2}}{2x}\ ,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t)\frac{x^n}{(n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}N_n(t)x^n=\frac{1+x(1-t)-\sqrt{1-2x(1+t)+x^2(1-t)^2}}{2x}\ .$$

Производящие функции числительных полиномов матриц $\left(1,e^x-1\right)_{e^x}$, $\left(e^x,e^x-1\right)_{e^x}$ рассматриваются в [19].

Введем матрицы $\tilde{F}_n$:

$$\tilde{F}_n=\frac{(2n)!}{n!}\tilde{U}_{2n}\left([x+1]_n,x\right)\tilde{I}_n,\ \ \tilde{F}_n^{-1}=\frac{n!}{(2n)!}\left([x+1]_n,x\right)^{-1}\tilde{U}_{2n}^{-1}\tilde{I}_n;$$

$$\tilde{F}_nx^p=\frac{(2n)!}{n!}\tilde{U}_{2n}x^p[x+1]_n=(1-x)^{2n+1}\sum_{m=1}^{\infty}m^{p+1}\binom{m+n}{n}x^{m-1},$$

$$\tilde{F}_n^{-1}x^p=\frac{n!}{(2n)!}(x-1)_p[x+n+1]_{n-p-1},\ p=0,1,\dots,n-1.$$

Например,

$$\tilde F_2 = 3\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix},\ \tilde F_3 = 4\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -2 & 3 & 13\\ 1 & -4 & 16\end{pmatrix},\ \tilde F_4 = 5\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -3 & 3 & 15 & 39\\ 3 & -9 & 9 & 171\\ -1 & 5 & -25 & 125\end{pmatrix};$$

$$\tilde F_2^{-1} = \frac{2!}{4!}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\ \ \tilde F_3^{-1} = \frac{3!}{6!}\begin{pmatrix}20 & -4 & 2\\ 9 & 3 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$\tilde F_4^{-1} = \frac{4!}{8!}\begin{pmatrix}210 & -30 & 10 & -6\\ 107 & 19 & -13 & 11\\ 18 & 10 & 2 & -6\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Обозначим $(1/x)\varphi_n(x) = \tilde\varphi_n(x)$. Тогда

$$\tilde F_n \tilde u_n(x) = \tilde\varphi_n(x).$$

Пусть $\alpha_n(x) \,|\, a(x)$, $\varphi_n(x) \,|\, a(x)$ означает соответственно ОПЭ, ОПН, связанные с матрицами $(1, xa(x))$, $(1, xa(x))_{e^x}$. Тогда

$$x\tilde F_n x^{n-1} = \varphi_n(x) \,|\, e^x.$$

Теорема 6.

$$\tilde F_n E^n(1,-x)\tilde F_n^{-1} = (-1)^{n-1}\tilde J_n.$$

Доказательство.

$$E^n(1,-x)(x-1)_p[x+n+1]_{n-p-1} = (-x-n-1)_p[-x+1]_{n-p-1} =$$

$$= (-1)^{n-1}(x-1)_{n-p-1}[x+n+1]_p,$$

или

$$E^n(1,-x)\tilde F_n^{-1}x^p = (-1)^{n-1}\tilde F_n^{-1}x^{n-1-p},\quad E^n(1,-x)\tilde F_n^{-1} = (-1)^{n-1}\tilde F_n^{-1}\tilde J_n.$$

Таким образом,

$$(-1)^{n-1}\tilde J_n\tilde\varphi_n(x) = \tilde F_n\tilde u_n(-x-n).$$

Обозначим, используя обозначения для рядов ${}_{(\beta)}a(x)$:

$$\left(1, xa(x)\right)^{-1} = \left(1, x_{(-1)}a^{-1}(x)\right).$$

Тогда

$$[n,\rightarrow]\left(1, \log_{(-1)}a^{-1}(x)\right)_{e^x} = -x\tilde{u}_n(-x-n).$$

Обозначим

$$[n,\searrow](1, xa(x))_{e^x}^{-1} = \frac{\varphi_n^{[-1]}(x)}{(1-x)^{2n+1}}.$$

Тогда

$$\varphi_n^{[-1]}(x) = (-1)^n xJ_n\varphi_n(x).$$

Таким образом, если матрица $(1, xa(x))$ является псевдоинволюцией, т.е. $(1, xa(x))^{-1} = (1, xa(-x))$, то $\varphi_n(x) = xJ_n\varphi_n(x)$.

Введем матрицы $\tilde{S}_n$:

$$\tilde{S}_n = \tilde{F}_n\tilde{U}_n^{-1},\ \tilde{S}_n^{-1} = \tilde{U}_n\tilde{F}_n^{-1}.$$

Например,

$$\tilde{S}_2 = 3!\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ \tilde{S}_3 = 4!\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5/2 & 0 \\ 1 & 5/2 & 5 \end{pmatrix},\ \tilde{S}_4 = 5!\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 7 & 14 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{S}_2^{-1} = \frac{2!}{4!}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \tilde{S}_3^{-1} = \frac{3!}{6!}\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -6 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},\ \tilde{S}_4^{-1} = \frac{4!}{8!}\begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ -28 & 14/3 & 0 & 0 \\ 20 & -16/3 & 2 & 0 \\ -5 & 5/3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\tilde{S}_n\tilde{\alpha}_n(x) = \tilde{\varphi}_n(x).$$

Теорема 7.

$$\tilde{S}_n = \tilde{V}_n^{-1}\tilde{C}_n\tilde{V}_n,\ \tilde{C}_nx^p = \frac{(n+p+1)!}{(p+1)!}x^p.$$

Доказательство. Мы воспользуемся Теоремой 3 и равенствами

$$\tilde{U}_n^{-1}\tilde{V}_n^{-1}x^p = \frac{n!}{(p+1)!}(x-1)_p,\ \tilde{U}_{n+p+1}^{-1}x^p = (x-1)_p[x+1]_n.$$

Тогда

$$\tilde{F}_n\tilde{U}_n^{-1}\tilde{V}_n^{-1}x^p = \frac{(2n)!}{n!}\tilde{U}_{2n}\frac{n!}{(p+1)!}(x-1)_p\,[x+1]_n =$$

$$= \frac{(2n)!}{(p+1)!}(1-x)^{n-p-1}\frac{(n+p+1)!}{(2n)!}\tilde{U}_{n+p+1}(x-1)_p\,[x+1]_n =$$

$$= \frac{(n+p+1)!}{(p+1)!}(1-x)^{n-p-1}\,x^p,$$

или

$$\tilde{S}_n\tilde{V}_n^{-1} = \tilde{V}_n^{-1}\tilde{C}_n.$$

Таким образом,

$$\tilde{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3! & 0 \\ 0 & 4!/2! \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4! & 0 & 0 \\ 0 & 5!/2! & 0 \\ 0 & 0 & 6!/3! \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{S}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5! & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6!/2! & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7!/3! & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8!/4! \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что так как $\alpha_n(x)\,|\,(1-x)^{-1} = x$, то

$$x\tilde{S}_n x^0 = \varphi_n(x)\,|\,(1-x)^{-1} = (n+1)!\,N_n(x);$$

так как

$$x\frac{(2n)!}{n!}\tilde{F}_n^{-1}x^0 = x(x+n+1)\ldots(x+n+n-1) = [n,\to](1,\log C(x))_{e^x}$$

где $C(x)$ – ряд Каталана, то

$$x\frac{(2n)!}{n!}\tilde{S}_n^{-1}x^0 = \alpha_n(x)\,|\,C(x) = \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\binom{-n}{m-1}\binom{2n}{n-m}x^m$$

Пусть ${}_{(\beta)}a(x)$ – обобщенный биномиальный ряд. Обозначим

$$[n,\searrow]\left(1,x_{(\beta)}a(x)\right)_{e^x}=\frac{{}_{(\beta)}\varphi_n(x)}{(1-x)^{2n+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m}{m+\beta n}\binom{m+\beta n}{n}[m+1]_n\,x^m .$$

Теорема 8.

$${}_{(\beta)}\varphi_n(x)=\frac{(n+1)!}{n}\sum_{m=1}^{n}\binom{n(2-\beta)}{m-1}\binom{n\beta}{n-m}x^m .$$

Доказательство. Докажем теорему для натуральных значений β и учтем полиномиальную аргументацию. Так как

$$\tilde V_{n\,(\beta)}\tilde\alpha_n(x)={}_{(\beta)}\tilde v_n(x)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{m+1}{n}\binom{n\beta}{n-m-1}x^m ,$$

$$[m,\to]\tilde V_n^{-1}=\sum_{i=0}^{m}\binom{m-n}{m-i}x^i=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{n-i-1}{m-i}x^i ,$$

то

$$\left[x^m\right]{}_{(\beta)}\tilde\varphi_n(x)=\left[x^m\right]\tilde V_n^{-1}\tilde C_{n\,(\beta)}\tilde v_n(x)=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{n-i-1}{m-i}\frac{(n+i+1)!}{(i+1)!}\frac{(i+1)}{n}\binom{n\beta}{n-i-1}\frac{(n\beta-n+m+1)!}{(n\beta-n+m+1)!}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{n}\binom{n\beta}{n-m-1}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{n+i+1}{i}\binom{n\beta-n+m+1}{m-i}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{n}\binom{n\beta}{n-m-1}(-1)^m\binom{n\beta-2n+m-1}{m}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{n}\binom{n\beta}{n-m-1}\binom{n(2-\beta)}{m}.$$

Отметим, что

$${}_{(0)}\varphi_n(x)=\frac{(2n)!}{n!}x^n,\quad {}_{(1)}\varphi_n(x)=(n+1)!\,N_n(x),\quad {}_{(2)}\varphi_n(x)=\frac{(2n)!}{n!}x ;$$

так как

$$\left(1,x_{(\beta)}a(x)\right)^{-1}=\left(1,x_{(\beta-1)}a^{-1}(x)\right),\quad {}_{(\beta-1)}a^{-1}(-x)={}_{(2-\beta)}\,a(x),$$

то

$${}_{(2-\beta)}\varphi_n(x)=xJ_{n\,(\beta)}\varphi_n(x).$$

4. Преобразования общего вида

Введем матрицы U_n:

$$U_n x^p = \frac{1}{n!}(1-x)^{n-p} A_p(x), \ \ A_0(x) = 1, \ p = 0, 1, \ldots, n,$$

или

$$U_n x^p = (1-x)^{n+1} \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} m^p x^m.$$

Например,

$$U_0 = (1), \ U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ U_2 = \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ U_3 = \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$[n, \to](b(x), \log a(x)) = c_n(x) = \sum_{m=0}^{n} c_m x^m, \ b_0 \neq 0,$$

$$[n, \to](b(x), \log a(x))_{e^x} = s_n(x) = \sum_{m=0}^{n} s_m x^m,$$

$$[n, \to](b(x), a(x)) = \frac{g_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Так как

$$(b(x), a(x)) = (b(x), \log a(x))(1, e^x),$$

то

$$\frac{g_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{p=0}^{n} \frac{c_p A_p(x)/p!}{(1-x)^{p+1}} = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n} \frac{s_p A_p(x)}{(1-x)^{p+1}} = \frac{\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n} s_p (1-x)^{n-p} A_p(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Таким образом,

$$b(x) a^m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s_n(m)}{n!} x^n, \ \ \frac{g_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{s_n(m)}{n!} x^m, \ \ g_n(x) = U_n s_n(x).$$

Так как

$$\frac{1}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[m+1]_n}{n!} x^m,$$

то

$$U_n^{-1}x^0=[x+1]_n,\ U_n^{-1}x^p=x\tilde{U}_n^{-1}x^{p-1},$$
или
$$U_n^{-1}x^p=(x)_p[x+1]_{n-p}.$$
Например,
$$U_3^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\11&2&-1&2\\6&3&0&-3\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$
Теорема 9.
$$U_nE(1,-x)U_n^{-1}=(-1)^nJ_n.$$
Доказательство.
$$E(1,-x)(x)_p[x+1]_{n-p}=(-x-1)_p[-x]_{n-p}=(-1)^n(x)_{n-p}[x+1]_p,$$
или
$$E(1,-x)U_n^{-1}=(-1)^nU_n^{-1}J_n.$$
Таким образом,
$$(-1)^nJ_ng_n(x)=U_ns_n(-x-1).$$
Так как
$$(b(x),\log a(x))(1,-x)(e^x,x)=\left(b(x)a^{-1}(x),\log a^{-1}(x)\right),$$

то полиномы $(-1)^nJ_ng_n(x)$ являются числительными полиномами матрицы
$$\left(b(x)a^{-1}(x),xa^{-1}(x)\right).$$
В частности,
$$(-1)^nJ_n\alpha_n(x)=\tilde{\alpha}_n^{(-1)}(x).$$
Обозначим
$$V_n=J_nEJ_n=\left((1+x)^{n+1},x\right)P^{-1}I_n=\tilde{V}_{n+1},$$

$$[n,\to](b(x),a(x)-1)=w_n(x).$$
Так как
$$(b(x),a(x))=(b(x),a(x)-1)(1,1+x),$$
то
$$g_n(x)=V_n^{-1}w_n(x).$$

Теорема 10. Если $s_{n-m}(x)$ – полином степени $n-m$, то

$$U_n s_{n-m}(x) = (1-x)^m \frac{(n-m)!}{n!} U_{n-m} s_{n-m}(x).$$

Соответственно, если $c_{n-m}(x)$ – полином степени $\le n-m$, то

$$U_n^{-1}(1-x)^m c_{n-m}(x) = \frac{n!}{(n-m)!} U_{n-m}^{-1} c_{n-m}(x).$$

Доказательство.

$$\left((1-x)^{-m}, x\right) U_n I_{n-m} = \frac{(n-m)!}{n!} U_{n-m},$$

$$U_n^{-1}\left((1-x)^m, x\right) I_{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!} U_{n-m}^{-1}.$$

Отсюда находим:

$$U_n^{-1} V_n^{-1} x^p = U_n^{-1}(1-x)^{n-p} x^p = \frac{n!}{p!}(x)_p = \frac{n!}{p!}\sum_{m=0}^{p} s(p,\ m) x^m,$$

$$V_n U_n x^p = \frac{1}{n!}\sum_{m=0}^{p} m! S(p,\ m)\ x^m.$$

Замечание 1. Матрицы U_n, U_n^{-1} связаны с матрицами $\tilde{U}_n$, $\tilde{U}_n^{-1}$ равенствами

$$\tilde{U}_n = (x,x)^T U_n (x,x), \quad \tilde{U}_n^{-1} = (x,x)^T U_n^{-1}(x,x),$$

и, так как

$$\frac{\tilde{\alpha}_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u_n(m+1)}{n!} x^m, \quad \tilde{\alpha}_n(x) = U_n E u_n(x),$$

то

$$\tilde{U}_n = U_n E(x,x) I_{n-1}, \quad \tilde{U}_n^{-1} = (x,x)^T E^{-1} U_n^{-1} I_{n-1}.$$

Обозначим

$$[n, \searrow](b(x), xa(x))_{e^x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[m+1]_n s_n(m)}{n!} x^m = \frac{h_n(x)}{(1-x)^{2n+1}},$$

Тогда

$$h_n(x) = \frac{(2n)!}{n!} U_{2n}[x+1]_n s_n(x).$$

Полиномы $g_n(x)$, $h_n(x)$ мы будем называть соответственно ординарными и экспоненциальными числительными полиномами. Названия ОПЭ и ОПН мы закрепим за полиномами $\alpha_n(x)$, $\varphi_n(x)$.

Введем матрицы F_n:

$$F_n = \frac{(2n)!}{n!} U_{2n}\left([x+1]_n, x\right) I_n, \quad F_n^{-1} = \frac{n!}{(2n)!}\left([x+1]_n, x\right)^{-1} U_{2n}^{-1} I_n;$$

Так как

$$U_{2n}[x+1]_n = (1-x)^n \frac{n!}{(2n)!} U_n [x+1]_n = \frac{n!}{(2n)!}(1-x)^n,$$

то

$$F_n x^0 = (1-x)^n, \; F_n x^p = x\tilde{F}_n x^{p-1},$$

или

$$F_n x^p = (1-x)^{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} m^p \binom{m+n}{n} x^m.$$

Например,

$$F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}, \; F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & -8 & 12 & 52 \\ -1 & 4 & -16 & 64 \end{pmatrix}.$$

Соответственно,

$$F_n^{-1} x^0 = \frac{n!}{(2n)!}[x+n+1]_n, \; F_n^{-1} x^p = x\tilde{F}_n^{-1} x^{p-1},$$

или

$$F_n^{-1} x^p = \frac{n!}{(2n)!}(x)_p [x+n+1]_{n-p}.$$

Например,

$$F_2^{-1} = \frac{2!}{4!}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; F_3^{-1} = \frac{3!}{6!}\begin{pmatrix} 120 & 0 & 0 & 0 \\ 74 & 20 & -4 & 2 \\ 15 & 9 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$F_n s_n(x) = h_n(x).$$

Пример 4. Поясним равенство

$$F_n [x+n+1]_n = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Аналогом равенства для обычных матриц Риордана

$$[n,\searrow](a(x),xa(x))=\frac{\tilde{\alpha}_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$$

является равенство для экспоненциальных матриц Риордана

$$[n,\searrow]\Big((xa(x))',xa(x)\Big)_{e^x}=\frac{\tilde{\varphi}_n(x)}{(1-x)^{2n+1}}\ .$$

Так как

$$[n,\to]\Big(1+x(\log a(x))',\log a(x)\Big)_{e^x}=(x+n)\tilde{u}_n(x),$$

$$\Big((xa(x))',\log a(x)\Big)=\Big(1+x(\log a(x))',\log a(x)\Big)\Big(e^x,x\Big),$$

то

$$[n,\to]\Big((xa(x))',\log a(x)\Big)_{e^x}=(x+n+1)\tilde{u}_n(x+1).$$

Если $a(x)=C(x)$, то

$$\tilde{\varphi}_n(x)=\frac{(2n)!}{n!},\ \ \tilde{u}_n(x)=[x+n+1]_{n-1},\ \ (x+n+1)\tilde{u}_n(x+1)=[x+n+1]_n.$$

Теорема 11.

$$F_nE^{n+1}(1,-x)F_n^{-1}=(-1)^nJ_n.$$

Доказательство.

$$E^{n+1}(1,-x)(x)_p[x+n+1]_{n-p}=(-x-n-1)_p[-x]_{n-p}=(-1)^n(x)_{n-p}[x+n+1]_p$$

$$E^{n+1}(1,-x)F_n^{-1}=(-1)^nF_n^{-1}J_n.$$

Таким образом,

$$(-1)^nJ_nh_n(x)=F_nEs_n(-x-n).$$

Так как (см. Замечание 2)

$$s_n(-x-n)=[n,\to]\Big(b\big(x_{(-1)}a^{-1}(x)\big)\Big(1+x\big(\log_{(-1)}a^{-1}(x)\big)'\Big),\log_{(-1)}a^{-1}(x)\Big)_{e^x}$$

где

$$\left(1, x_{(-1)}a^{-1}(x)\right) = \left(1, x a(x)\right)^{-1}, \ {}_{(-1)}a^{\varphi}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi}{(\varphi - n)} \frac{u_n(\varphi - n)}{n!} x^m ,$$

то полиномы $(-1)^n J_n h_n(x)$ являются числительными полиномами матрицы

$$\left(b\left(x_{(-1)}a^{-1}(x)\right)\left(x_{(-1)}a^{-1}(x)\right)', x_{(-1)}a^{-1}(x)\right)_{e^x}.$$

В частности,

$$(-1)^n J_n \varphi_n(x) = \tilde{\varphi}_n^{[-1]}(x).$$

Замечание 2. Представим матрицу $\left(b(x), a^{-1}(x)\right)^T$ в виде:

$$\left(b(x), a^{-1}(x)\right)^T = \begin{pmatrix} s_0(0) & s_1(0) & s_2(0) & s_3(0) & \cdots \\ s_0(-1) & s_1(-1) & s_2(-1) & s_3(-1) & \cdots \\ s_0(-2) & s_1(-2) & s_2(-2) & s_3(-2) & \cdots \\ s_0(-3) & s_1(-3) & s_2(-3) & s_3(-3) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \left| e^x \right|,$$

где $s_0(x) = b_0$. Из теоремы обращения Лагранжа вытекает, что

$$[n, \searrow]\left(b(x), a^{-1}(x)\right)^T = b\left(x_{(-1)}a^{-1}(x)\right)\left(1 + x\left(\log {}_{(-1)}a^{-1}(x)\right)'\right) {}_{(-1)}a^{-n}(x).$$

Введем матрицы S_n:

$$S_n = F_n U_n^{-1}, \ S_n^{-1} = U_n F_n^{-1} .$$

Например,

$$S_2 = 2!\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \ S_3 = 3!\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 4 & 0 & 0 \\ 9 & 12 & 10 & 0 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix},$$

$$S_4 = 4!\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 36 & 30 & 15 & 0 & 0 \\ 16 & 30 & 40 & 35 & 0 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix};$$

$$S_2^{-1}=\frac{2!}{4!}\begin{pmatrix}6&0&0\\-8&2&0\\3&-1&1\end{pmatrix},\ S_3^{-1}=\frac{3!}{6!}\begin{pmatrix}20&0&0&0\\-45&5&0&0\\36&-6&2&0\\-10&2&-1&1\end{pmatrix},$$

$$S_4^{-1}=\frac{4!}{8!}\begin{pmatrix}70&0&0&0&0\\-224&14&0&0&0\\280&-28&14/3&0&0\\-160&20&-16/3&2&0\\35&-5&5/3&-1&1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$S_n g_n(x)=h_n(x).$$

Теорема 12.

$$S_n=V_n^{-1}C_nV_n,\ C_nx^p=\frac{(n+p)!}{p!}x^p\ .$$

Доказательство. Мы воспользуемся Теоремой 10 и равенствами

$$U_n^{-1}V_n^{-1}x^p=\frac{n!}{p!}(x)_p,\ U_{n+p}^{-1}x^p=(x)_p\,[x+1]_n.$$

Тогда

$$F_nU_n^{-1}V_n^{-1}x^p=\frac{(2n)!}{n!}U_{2n}\frac{n!}{p!}(x)_p\,[x+1]_n=$$

$$=\frac{(2n)!}{p!}(1-x)^{n-p}\frac{(n+p)!}{(2n)!}U_{n+p}(x)_p\,[x+1]_n=\frac{(n+p)!}{p!}(1-x)^{n-p}x^p,$$

или

$$S_nV_n^{-1}=V_n^{-1}C_n.$$

Теорема 13.

$$S_nx^p=\frac{(n+p)!(n-p)!}{n!}\sum_{m=p}^{n}\binom{n}{m-p}\binom{n}{n-m}x^m.$$

Доказательство.

$$[m,\to]V_n^{-1}=\sum_{i=0}^{m}\binom{m-n-1}{m-i}x^i=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{n-i}{m-i}x^i,$$

$$C_nV_nx^p=\sum_{i=p}^{n}\frac{(n+i)!}{i!}\binom{n-p}{i-p}x^i,$$

$$\left[x^m\right]V_n^{-1}C_nV_nx^p=\sum_{i=p}^{m}(-1)^{m-i}\binom{n-i}{m-i}\frac{(n+i)!}{i!}\binom{n-p}{i-p}=$$

$$=\frac{(n+p)!(n-p)!}{(n-m)!m!}\sum_{i=p}^{m}(-1)^{m-i}\binom{n+i}{i-p}\binom{m}{i}=$$

$$=\frac{(n+p)!(n-p)!}{(n-m)!m!}(-1)^{m-p}\binom{m-n-p-1}{m-p}=$$

$$=\frac{(n+p)!(n-p)!}{n!}\binom{n}{m-p}\binom{n}{n-m}.$$

Теорема 14.

$$S_n^{-1}x^p=\frac{p!(n-p)!}{(2n)!}\sum_{m=p}^{n}\binom{-n}{m-p}\binom{2n}{n-m}x^m.$$

Доказательство.

$$\left[x^m\right]V_n^{-1}C_n^{-1}V_nx^p=\sum_{i=p}^{m}(-1)^{m-i}\binom{n-i}{m-i}\frac{i!}{(n+i)!}\binom{n-p}{i-p}=$$

$$=\frac{p!(n-p)!}{(n-m)!(n+m)!}\sum_{i=p}^{m}(-1)^{m-i}\binom{i}{i-p}\binom{n+m}{m-i}=$$

$$=\frac{p!(n-p)!}{(n-m)!(n+m)!}(-1)^{m-p}\binom{n+m-p-1}{m-p}=$$

$$=\frac{p!(n-p)!}{(2n)!}\binom{-n}{m-p}\binom{2n}{n-m}.$$

5. Обобщенные полиномы Нараяны типа B

Полиномы

$${}^{B}N_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}^2x^m=(1-x)^{2n+1}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}^2x^m$$

называются полиномами Нараяны типа B. Обозначим

$$[n,\searrow](a(x),xa(x))_{e^x}=\frac{{}^{B}\varphi_n(x)}{(1-x)^{2n+1}}.$$

Пусть $\tilde{\alpha}_n(x)\,|\,a(x)$, ${}^B\varphi_n(x)\,|\,a(x)$ означает соответственно полиномы $\tilde{\alpha}_n(x)$, ${}^B\varphi_n(x)$, связанные с матрицами $(a(x), xa(x))$, $(a(x), xa(x))_{e^x}$. Тогда

$${}^B\varphi_n(x)\,|\,(1-x)^{-1} = n!\,{}^BN_n(x).$$

В связи с этим, полиномы ${}^B\varphi_n(x)$ мы будем называть обобщенными полиномами Нараяны типа B. Так как

$$[n,\searrow](a(x), xa(x)) = \frac{\tilde{\alpha}_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{u_n(m+1)}{n!} x^m,$$

то

$$[n,\searrow](a(x), xa(x))_{e^x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[m+1]_n\, u_n(m+1)}{n!} x^m,$$

$${}^B\varphi_n(x) = \frac{(2n)!}{n!} U_{2n}[x+1]_n\, u_n(x+1) = F_n u_n(x+1).$$

Введем матрицы ${}^BF_n = F_nE$:

$${}^BF_n x^p = (1-x)^{2n+1} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^p \binom{m+n}{n} x^m,$$

$${}^BF_n^{-1} x^p = \frac{n!}{(2n)!}(x-1)_p\,[x+n]_{n-p}.$$

Например,

$${}^BF_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ {}^BF_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},\ {}^BF_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 9 & 25 \\ 3 & -5 & -1 & 67 \\ -1 & 3 & -9 & 27 \end{pmatrix},$$

$${}^BF_1^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ {}^BF_2^{-1} = \frac{2!}{4!}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$${}^BF_3^{-1} = \frac{3!}{6!}\begin{pmatrix} 60 & -12 & 6 & -6 \\ 47 & 5 & -7 & 11 \\ 12 & 6 & 0 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$ {}^{B}F_n u_n(x) = {}^{B}\varphi_n(x). $$

В частности,

$$ {}^{B}F_n x^n = {}^{B}\varphi_n(x) \,|\, e^x. $$

Для матриц ${}^{B}F_n$ Теорема 11 принимает более простой вид. Так как

$$ E^{n-1}(1,-x)(x-1)_p[x+n]_{n-p} = (-x-n)_p[-x+1]_{n-p} = (-1)^n (x-1)_{n-p}[x+n]_p $$

то

$$ {}^{B}F_n E^{n-1}(1,-x)\, {}^{B}F_n^{-1} = (-1)^n J_n, \quad (-1)^n J_n\, {}^{B}\varphi_n(x) = F_n u_n(-x-n), $$

где

$$ u_n(-x-n) = [n,\rightarrow]\Big(1 + x\big(\log_{(-1)} a^{-1}(x)\big)', \log_{(-1)} a^{-1}(x)\Big)_{e^x}. $$

Обозначим

$$ [n,\searrow]\Big(1 + x(\log a(x))', xa(x)\Big)_{e^x}^{-1} = \frac{{}^{B}\varphi_n^{[-1]}(x)}{(1-x)^{2n+1}}. $$

Так как

$$ \Big(1 + x(\log a(x))', xa(x)\Big)_{e^x}^{-1} = \Big(1 + x\big(\log_{(-1)} a^{-1}(x)\big)', x_{(-1)} a^{-1}(x)\Big)_{e^x}, $$

то

$$ {}^{B}\varphi_n^{[-1]}(x) = (-1)^n J_n\, {}^{B}\varphi_n(x). $$

Пусть все полиномы ${}^{B}\varphi_n(x)$ являются симметричными, т.е.

$$ {}^{B}\varphi_n(x) = J_n\, {}^{B}\varphi_n(x). $$

Тогда должно быть $(xa(x))' = a^2(x)$, или $\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}a_m = (n+1)a_n$. Это возможно только в случае $a(x) = (1-\beta x)^{-1}$:

$$ {}^{B}\varphi_n \,|\, (1-\beta x)^{-1} = \beta^n n!\, {}^{B}N_n(x). $$

Пример 5. Так как

$$ \tilde{\alpha}_n(x) \,|\, 1+x = x^{n-1}, $$

то

$$ {}^{B}\varphi_n(x) \,|\, 1+x = S_n x^{n-1} = \frac{(2n)!}{n!2}(1+x)x^{n-1}; $$

$$\left(1+x,x\left(1+x\right)\right)_{e^x}=\left|e^x\right|^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdots\\1&1&0&0&0&0&0&\cdots\\0&2&1&0&0&0&0&\cdots\\0&1&3&1&0&0&0&\cdots\\0&0&3&4&1&0&0&\cdots\\0&0&1&6&5&1&0&\cdots\\0&0&0&4&10&6&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}\left|e^x\right|.$$

Если $a(x)=1+x$, то ${}_{(-1)}a^{-1}(x)=C(-x)$, и, следовательно,

$$[n,\searrow]\Big(1+x(\log C(x))',xC(x)\Big)_{e^x}=\frac{(2n)!}{n!2}\frac{1+x}{(1-x)^{2n+1}};$$

$$\Big(1+x(\log C(x))',xC(x)\Big)_{e^x}=\left|e^x\right|^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&\cdots\\1&1&0&0&0&0&\cdots\\3&2&1&0&0&0&\cdots\\10&6&3&1&0&0&\cdots\\35&20&10&4&1&0&\cdots\\126&70&35&15&5&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}\left|e^x\right|.$$

Введем обыкновенные числительные полиномы, аналогичные полиномам ${}^{B}\varphi_n(x)$. Обозначим

$$[n,\searrow]\Big((xa(x))',xa(x)\Big)=\frac{{}^{B}\alpha_n(x)}{(1-x)^{n+1}},$$

$$[n,\searrow]\Big(1+x(\log a(x))',xa^{-1}(x)\Big)=\frac{{}^{B}\alpha_n^{(-1)}(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Тогда

$${}^{B}\alpha_n^{(-1)}(x)=(-1)^n J_n\,{}^{B}\alpha_n(x).$$

Пример 6. Пусть $\tilde{\varphi}_n(x)\,|\,a(x)$, ${}^{B}\alpha_n(x)\,|\,a(x)$ означает соответственно полиномы $\tilde{\varphi}_n(x)$, ${}^{B}\alpha_n(x)$, связанные с матрицами $\Big((xa(x))',xa(x)\Big)_{e^x}$, $\Big((xa(x))',xa(x)\Big)$. Так как

$$\tilde{\varphi}_n(x)\,|\,C(x)=\frac{(2n)!}{n!},$$

то

$$ {}^{B}\alpha_n(x)\,|\,C(x)=\frac{(2n)!}{n!}S_n^{-1}x^0=\sum_{m=0}^{n}\binom{-n}{m}\binom{2n}{n-m}x^m; $$

$$ \left((xC(x))',xC(x)\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 20 & 10 & 4 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 70 & 35 & 15 & 5 & 1 & 0 & \cdots \\ 252 & 126 & 56 & 21 & 6 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. $$

Соответственно, полиномы

$$ (-1)^n\sum_{m=0}^{n}\binom{2n}{m}\binom{-n}{n-m}x^m $$

являются числительными полиномами матрицы

$$ \left(1+x(\log C(x))',xC^{-1}(x)\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 10 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 35 & 4 & 0 & -2 & 1 & 0 & \cdots \\ 126 & 15 & 1 & 0 & -3 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. $$

Пример 7. Так как

$$ \tilde{\varphi}_n(x)\,|\,1+x=\frac{(2n)!}{n!}x^{n-1}, $$

то

$$ {}^{B}\alpha_n(x)\,|\,1+x=\frac{(2n)!}{n!}S_n^{-1}x^{n-1}=(2-x)x^{n-1}; $$

$$ \left((x(1+x))',x(1+x)\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 6 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 14 & 7 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. $$

Соответственно, полиномы $(-1)^n(-1+2x)$ являются числительными полиномами матрицы

$$\left(1+x\left(\log(1+x)\right)',x(1+x)^{-1}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -3 & 2 & 2 & -3 & 1 & 0 & \cdots \\ -1 & 4 & -5 & 0 & 5 & -4 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Пример 8. Так как $\left(x(1-x)^{-1}\right)'=(1-x)^{-2}$, то

$$[n,\searrow]\left(\left(\frac{x}{1-x}\right)',\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1}{x}\left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}}-1\right),\ {}^B\alpha_n(x)=\frac{1-(1-x)^{n+1}}{x}\ .$$

Соответственно, числительными полиномами матрицы $\left((1-x)^{-1},x(1-x)\right)$ являются полиномы $(1-x)^{n+1}+(-x)^n$.

Пример 9. Так как $\left(xe^x\right)'=(1+x)e^x$, то

$$[n,\searrow]\left(\left(xe^x\right)',xe^x\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+1)^n+n(m+1)^{n-1}}{n!}x^m,$$

$${}^B\alpha_n(x)\,|\,e^x=\frac{1}{n!}\left(\tilde{A}_n(x)+n(1-x)\tilde{A}_{n-1}(x)\right),\ \ \tilde{A}_0(x)=A_0(x).$$

Соответственно, числительными полиномами матрицы $\left(1+x,xe^{-x}\right)$ являются полиномы

$$\frac{(-1)^n}{n!}\left(A_n(x)-n(1-x)A_{n-1}(x)\right).$$

Отметим, что

$$\tilde{\varphi}_n(x)\,|\,e^x=F_n(x+n+1)(x+1)^{n-1}={}^BF_n(x+n)x^{n-1}.$$

В общем случае

$$\tilde{\varphi}_n(x)=F_n(x+n+1)\tilde{u}_n(x+1)={}^BF_n(x+n)\tilde{u}_n(x),$$

или

$$F_n\left(x+n+1,x\right)EI_{n-1} = {}^{B}F_n\left(x+n,x\right)I_{n-1} = \tilde{F}_n .$$

Следовательно,

$$\left[x^n\right]F_n x^p\left(x+n+1\right) = \left[x^n\right]{}^{B}F_n x^p\left(x+n\right) = 0,\ p<n .$$

Здесь проявляются равенства для n-х элементов столбцов матриц F_n, ${}^{B}F_n$:

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\binom{2n+1}{n-m}m^p\binom{m+n}{n} = (-1)^{n+p}\left(n+1\right)^p,$$

$$\sum_{m=0}^{n}(-1)^{n-m}\binom{2n+1}{n-m}(m+1)^p\binom{m+n}{n} = (-1)^{n+p}\,n^p,\ \ p\le n .$$

6. Числительные полиномы и обобщенные ряды Лагранжа

Вернемся к рядам ${}_{(\beta)}a\left(x\right)$, ${}_{(0)}a\left(x\right)=a\left(x\right)$, из раздела 2. Параметр β определяется равенством

$$a\left(x\,{}_{(\beta)}a^{\beta}\left(x\right)\right) = {}_{(\beta)}a\left(x\right),$$

так что

$$a^{\beta}\left(x\,{}_{(\beta)}a^{\beta}\left(x\right)\right) = {}_{(\beta)}a^{\beta}\left(x\right).$$

Обозначим $a^{\beta}\left(x\right)=c\left(x\right)$. ${}_{(\beta)}a^{\beta}\left(x\right)=d\left(x\right)$. По теореме обращения Лагранжа, если

$$b\left(x\right)c^{\varphi}\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\left(\varphi\right)x^n,$$

где $f_n\left(x\right)$ – полиномы, то

$$b\left(xd\left(x\right)\right)\left(1+x\left(\log d\left(x\right)\right)'\right)d^{\varphi}\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n\left(\varphi+n\right)x^n .$$

Здесь

$$f_n\left(x\right)=\frac{s_n\left(\beta x\right)}{n!},\ s_n\left(x\right)=[n,\to]\left(b\left(x\right),\log a\left(x\right)\right)_{e^x} .$$

Таким образом,

$$s_n\left(\beta x+\beta n\right)=[n,\to]\left(b\left(x\,{}_{(\beta)}a^{\beta}\left(x\right)\right)\left(1+x\left(\log{}_{(\beta)}a^{\beta}\left(x\right)\right)'\right),\log{}_{(\beta)}a^{\beta}\left(x\right)\right)_{e^x}$$

$$s_n(x+\beta n)=[n,\rightarrow]\left(b\left(x_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right)\left(1+x\left(\log_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right)'\right),\log_{(\beta)}a(x)\right)_{e^x}.$$

Обозначим

$$[n,\searrow]\left(b\left(x_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right)\left(1+x\beta\left(\log_{(\beta)}a(x)\right)'\right),x_{(\beta)}a(x)\right)=\frac{{}_{(\beta)}g_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Введем матрицы $G_n^{\beta}=U_nE^{n\beta}U_n^{-1}$. Например,

$$G_2=\begin{pmatrix}6&3&1\\-8&-3&0\\3&1&0\end{pmatrix},\quad G_3=\begin{pmatrix}20&10&4&1\\-45&-20&-6&0\\36&15&4&0\\-10&-4&-1&0\end{pmatrix},$$

$$G_4=\begin{pmatrix}70&35&15&5&1\\-224&-105&-40&-10&0\\280&126&45&10&0\\-160&-70&-24&-5&0\\35&15&5&1&0\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$G_n^{\beta}g_n(x)={}_{(\beta)}g_n(x).$$

Теорема 15.

$$G_n^{-\beta}=J_nG_n^{\beta}J_n.$$

Доказательство. Так как $E(1,-x)=(1,-x)E^{-1}$, по Теореме 6

$$J_nU_nE^{n\beta}U_n^{-1}J_n=U_nE(1,-x)E^{n\beta}E(1,-x)U_n^{-1}=$$

$$=U_n(1,-x)E^{n\beta}(1,-x)U_n^{-1}=U_nE^{-n\beta}U_n^{-1}.$$

Таким образом,

$$G_2^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&3\\0&-3&-8\\1&3&6\end{pmatrix},\ G_3^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&-4&-10\\0&4&15&36\\0&-6&-20&-45\\1&4&10&20\end{pmatrix},$$

$$G_4^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 5 & 15 & 35\\ 0 & -5 & -24 & -70 & -160\\ 0 & 10 & 45 & 126 & 280\\ 0 & -10 & -40 & -105 & -224\\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70\end{pmatrix}.$$

Теорема 16.

$$G_n^{\beta}=V_n^{-1}\left((1+x)^{n\beta},x\right)^T V_n.$$

Доказательство. Так как

$$n!\left|e^x\right|V_nU_nx^p=[p,\to]\left(1,e^x-1\right)_{e^x},$$

$$(1/n!)U_n^{-1}V_n^{-1}\left|e^x\right|^{-1}x^p=[p,\to]\left(1,\log(1+x)\right)_{e^x},$$

$$\left(1,\log(1+x)\right)_{e^x}\left(e^{n\beta},x\right)_{e^x}\left(1,e^x-1\right)_{e^x}=\left((1+x)^{n\beta},x\right)_{e^x},$$

то

$$V_nU_nE^{n\beta}U_n^{-1}V_n^{-1}=\left((1+x)^{n\beta},x\right)^T I_n.$$

Например,

$$G_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Теорема 17.

$$G_n^{\beta}x^p=\sum_{m=0}^{n}\binom{-n\beta+p}{m}\binom{n\beta+n-p}{n-m}x^m.$$

Доказательство. Докажем теорему для натуральных значений β и учтем полиномиальную аргументацию.

$$\left((1+x)^{n\beta},x\right)^T V_nx^p=\sum_{i=0}^{n}\binom{n\beta+n-p}{n-i}x^i,$$

$$\left[x^m\right]V_n^{-1}\left((1+x)^{n\beta},x\right)^T V_nx^p=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{n-i}{m-i}\binom{n\beta+n-p}{n-i}\frac{(n\beta+m-p)!}{(n\beta+m-p)!}=$$

$$=\binom{n\beta+n-p}{n-m}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{n\beta+m-p}{m-i}=$$

$$=\binom{n\beta+n-p}{n-m}(-1)^{m}\binom{n\beta+m-p-1}{m}=\binom{n\beta+n-p}{n-m}\binom{-n\beta+p}{m}.$$

Введем матрицы $X_n=V_n^{-1}(x,x)^T V_n$. Так как $V_n^{-1}=\left((1-x)^{n+1},x\right)PI_n$, находим:

$$X_n x^0=\frac{1-x-(1-x)^{n+1}}{x}\ ,\quad X_n x^p=x^{p-1}(1-x).$$

Тогда

$$G_n^{\beta}=(I_n+X_n)^{n\beta}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n\beta}{m}X_n^m\ .$$

Например,

$$G_3=I_3+3\begin{pmatrix}3&1&0&0\\-6&-1&1&0\\4&0&-1&1\\-1&0&0&-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3&2&1&0\\-8&-5&-2&1\\7&4&1&-2\\-2&-1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-3&-3&-3&-3\\3&3&3&3\\-1&-1&-1&-1\end{pmatrix},$$

$$G_3^{-1}=I_3-3\begin{pmatrix}3&1&0&0\\-6&-1&1&0\\4&0&-1&1\\-1&0&0&-1\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}3&2&1&0\\-8&-5&-2&1\\7&4&1&-2\\-2&-1&0&1\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-3&-3&-3&-3\\3&3&3&3\\-1&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

Таким образом,

$$I_n+X_n=G_n^{1/n}=U_nEU_n^{-1}.$$

Например,

$$G_2^{1/2}=\begin{pmatrix}3&1&0\\-3&0&1\\1&0&0\end{pmatrix},\ G_3^{1/3}\begin{pmatrix}4&1&0&0\\-6&0&1&0\\4&0&0&1\\-1&0&0&0\end{pmatrix},\ G_4^{1/4}=\begin{pmatrix}5&1&0&0&0\\-10&0&1&0&0\\10&0&0&1&0\\-5&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$G_2^{-1/2}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&-3\\0&1&3\end{pmatrix},\ G_3^{-1/3}\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\1&0&0&4\\0&1&0&-6\\0&0&1&4\end{pmatrix},\ G_4^{-1/4}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&0&0&-5\\0&1&0&0&10\\0&0&1&0&-10\\0&0&0&1&5\end{pmatrix}.$$

Из Теоремы 10 вытекает равенство

$$\left((1-x)^{-m},x\right)G_n^{\beta}\left((1-x)^{m},x\right)I_{n-m}=G_{n-m}^{\frac{n\beta}{n-m}}.$$

В частности,

$$\left((1-x)^{-m},x\right)G_n^{1/n}\left((1-x)^{m},x\right)I_{n-m}=G_{n-m}^{1/(n-m)}.$$

Пример 10. Пусть $b(x)=1$, $a(x)=1+x$, ${}_{(\beta)}a(x)$ – обобщенный биномиальный ряд. Тогда полиномы ${}_{(\beta)}g_n(x)=G_n^{\beta}x^n$ являются числительными полиномами матрицы

$$\left(1+x\left(\log {}_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right)',x_{(\beta)}a(x)\right).$$

Но так как ${}_{(1)}g_n(x)=1$, $G_n^{\beta}x^0=G_n^{\beta+1}x^n$, то эту матрицу можно также представить в виде

$$\left({}_{(\beta)}a(x)\left(1+x\left(\log {}_{(\beta)}a^{\beta-1}(x)\right)'\right),x_{(\beta)}a(x)\right).$$

Следовательно, здесь проявляется свойство обобщенного биномиального ряда

$${}_{(\beta)}a(x)\left(1+x\left(\log {}_{(\beta)}a^{\beta-1}(x)\right)'\right)=1+x\left(\log {}_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right)'.$$

Пример 11. Пусть ${}_{(\beta)}a(x)$ – обобщенный биномиальный ряд. Тогда полиномы $G_n^{\beta}x$ являются числительными полиномами матрицы

$$\left(1+x\left(\log {}_{(\beta+1)}a^{\beta}(x)\right)',x_{(\beta+1)}a(x)\right),$$

полиномы $G_n^{\beta}x^{n-1}$являются числительными полиномами матрицы

$$\left({}_{(\beta)}a(x)\left(1+x\left(\log {}_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right)'\right),x_{(\beta)}a(x)\right).$$

Так как $G_n^{-\beta}x=J_nG_n^{\beta}x^{n-1}$, то матрица

$$\left(1+x\left(\log {}_{(1-\beta)}a^{-\beta}(x)\right)',x_{(1-\beta)}a(x)\right)$$

совпадает с матрицей

$$(1,-x)\left(1+x\left(\log{}_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right)', x_{(\beta)}a^{-1}(x)\right)(1,-x),$$

матрица

$$\left({}_{(-\beta)}a(x)\left(1+x\left(\log{}_{(-\beta)}a^{-\beta}(x)\right)'\right), x_{(-\beta)}a(x)\right)$$

совпадает с матрицей

$$(1,-x)\left({}_{(\beta+1)}a^{-1}(x)\left(1+x\left(\log{}_{(\beta+1)}a^{\beta}(x)\right)'\right), x_{(\beta+1)}a^{-1}(x)\right)(1,-x)$$

Обозначим

$$[n,\searrow]\left(b\left(x_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right)\left(1+x\beta\left(\log{}_{(\beta)}a(x)\right)'\right), x_{(\beta)}a(x)\right)_{e^x} = \frac{{}_{(\beta)}h_n(x)}{(1-x)^{2n+1}}.$$

Введем матрицы $H_n^{\beta} = F_n E^{n\beta} F_n^{-1}$. Например,

$$H_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 15 & 5 & 1 \\ -12 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \frac{1}{20}\begin{pmatrix} 84 & 28 & 7 & 1 \\ -108 & -4 & 15 & 9 \\ 54 & -6 & -1 & 9 \\ -10 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_4 = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 495 & 165 & 135/3 & 9 & 1 \\ -880 & -110 & 160/3 & 44 & 16 \\ 660 & 0 & -90/3 & 24 & 36 \\ -240 & 20 & 0 & -6 & 16 \\ 35 & -5 & 5/3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$H_n^{\beta} h_n(x) = {}_{(\beta)}h_n(x).$$

Теорема 18.

$$H_n^{-\beta} = J_n H_n^{\beta} J_n.$$

Доказательство. По теореме 11,

$$J_n F_n E^{n\beta} F_n^{-1} J_n = F_n E^{n+1}(1,-x) E^{n\beta} E^{n+1}(1,-x) F_n^{-1} =$$

$$= F_n (1,-x) E^{n\beta} (1,-x) F_n^{-1} = F_n E^{-n\beta} F_n^{-1}.$$

Матрицу H_n^β можно представить в виде

$$H_n^\beta = S_n G_n^\beta S_n^{-1} = V_n^{-1} C_n \left((1+x)^{n\beta}, x \right)^T C_n^{-1} V_n .$$

Например,

$$H_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Обозначим

$$t_n(\varphi \mid \beta, x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{\varphi}{m} \binom{\beta}{n-m} x^m .$$

Теорема 19.

$$H_n^\beta x^p = \sum_{m=p}^{n} \binom{n-p}{n-m} \binom{n+m}{m}^{-1} (1-x)^{n-m} t_m(-n\beta + n + m \mid n\beta, x).$$

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{n!}\left[x^m\right] V_p^{-1} C_n \left((1+x)^{n\beta}, x \right)^T x^p =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{p-i}{m-i} \binom{n\beta}{p-i} \binom{n+i}{i} \frac{(n\beta + m - p)!}{(n\beta + m - p)!} =,$$

$$= \binom{n\beta}{p-m} \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{n+i}{i} \binom{n\beta + m - p}{m-i} =$$

$$= \binom{n\beta}{p-m} (-1)^m \binom{n\beta + m - p - n - 1}{m} = \binom{n\beta}{p-m} \binom{-n\beta + n + p}{m},$$

то

$$V_n^{-1} C_n \left((1+x)^{n\beta}, x \right)^T x^p = \left((1-x)^{n-p}, x \right) V_p^{-1} C_n \left((1+x)^{n\beta}, x \right)^T x^p =$$

$$= n!(1-x)^{n-p} t_p(-n\beta + n + p \mid n\beta, x).$$

Остается добавить, что

$$C_n^{-1}V_n x^p = \frac{1}{n!}\sum_{m=p}^{n}\binom{n-p}{n-m}\binom{n+m}{m}^{-1}x^m .$$

В частности,

$$H_n^{\beta}x^n = \binom{2n}{n}^{-1}\sum_{m=0}^{n}\binom{-n\beta+2n}{m}\binom{n\beta}{n-m}x^m .$$

Соответственно, в силу Теоремы 18,

$$H_n^{\beta}x^0 = \binom{2n}{n}^{-1}\sum_{m=0}^{n}\binom{-n\beta}{m}\binom{n\beta+2n}{n-m}x^m .$$

Пример 12. Пусть ${}_{(\beta)}a(x)$ – обобщенный биномиальный ряд. Тогда полиномы ${}_{(\beta)}h_n(x) = \frac{(2n)!}{n!}H_n^{\beta}x^n$ являются числительными полиномами матрицы

$$\left(1+x\left(\log {}_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right)', x_{(\beta)}a(x)\right)_{e^x} .$$

Так как ${}_{(2)}h_n(x) = \frac{(2n)!}{n!}$, то полиномы $\frac{(2n)!}{n!}H_n^{\beta}x^0 = \frac{(2n)!}{n!}H_n^{\beta+2}x^n$ являются числительными полиномами матрицы

$$\left(1+x\left(\log {}_{(\beta+2)}a^{\beta+2}(x)\right)', x_{(\beta+2)}a(x)\right)_{e^x} .$$

Так как

$$H_n^{-\beta}x^0 = J_n H_n^{\beta}x^n, \quad \left(1, x_{(\beta)}a(x)\right)^{-1} = \left(1, x_{(\beta-1)}a^{-1}(x)\right),$$

$$\left(x_{(\beta-1)}a^{-1}(x)\right)'\left(1, x_{(\beta-1)}a^{-1}(x)\right)\left(1+x\left(\log {}_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right)'\right) =$$

$$= \left(1+x\left(\log {}_{(\beta-1)}a^{\beta-1}(x)\right)'\right){}_{(\beta-1)}a^{-1}(x),$$

то матрица

$$\left(1+x\left(\log {}_{(2-\beta)}a^{2-\beta}(x)\right)', x_{(2-\beta)}a(x)\right)$$

совпадает с матрицей

$$(1,-x)\left(\left(1+x\left(\log{}_{(\beta-1)}a^{\beta-1}(x)\right)'\right){}_{(\beta-1)}a^{-1}(x), x_{(\beta-1)}a^{-1}(x)\right)(1,-x).$$

Обозначим

$$[n,\searrow]\left(1,x_{(\beta)}a(x)\right)_{e^x}=\frac{{}_{(\beta)}\varphi_n(x)}{(1-x)^{2n+1}},\ \frac{1}{x}{}_{(\beta)}\varphi_n(x)={}_{(\beta)}\tilde{\varphi}_n(x).$$

Введем матрицы $T_n^\beta=\tilde{F}_nE^{n\beta}\tilde{F}_n^{-1}$. Например,

$$T_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3&1\\-1&1\end{pmatrix},\ T_3=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}12&4&1\\-9&2&3\\2&-1&1\end{pmatrix},\ T_4=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}55&55/3&5&1\\-66&0&10&6\\30&-6&0&6\\-5&5/3&-1&1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$T_n^\beta\tilde{\varphi}_n(x)={}_{(\beta)}\tilde{\varphi}_n(x).$$

Теорема 20.

$$T_n^{-\beta}=\tilde{J}_nT_n^\beta\tilde{J}_n.$$

Доказательство. По теореме 6,

$$\tilde{J}_n\tilde{F}_nE^{n\beta}\tilde{F}_n^{-1}\tilde{J}_n=\tilde{F}_nE^n(1,-x)E^{n\beta}E^n(1,-x)\tilde{F}_n^{-1}=$$

$$=\tilde{F}_n(1,-x)E^{n\beta}(1,-x)\tilde{F}_n^{-1}=\tilde{F}_nE^{-n\beta}\tilde{F}_n^{-1}.$$

Матрицу T_n^β можно представить в виде

$$T_n^\beta=\tilde{S}_nA_n^\beta\tilde{S}_n^{-1}=\tilde{V}_n^{-1}\tilde{C}_n\tilde{D}\left((1+x)^{n\beta},x\right)^T\tilde{D}^{-1}\tilde{C}_n^{-1}\tilde{V}_n,$$

где

$$\tilde{C}_n\tilde{D}x^p=(n+1)!\binom{n+1+p}{p}x^p.$$

Например,

$$T_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\3&-2&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&21&0\\0&0&0&56\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&6&4\\0&1&4&6\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{6}&0&0\\0&0&\frac{1}{21}&0\\0&0&0&\frac{1}{56}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\3&2&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

Теорема 21.

$$T_n^{\beta} x^p = \sum_{m=p}^{n-1} \binom{n-1-p}{n-1-m} \binom{n+1+m}{m}^{-1} (1-x)^{n-m-1}\, t_m(-n\beta+n+m+1 \mid n\beta, x).$$

Доказательство. В данном случае $p = 0, 1, \ldots, n-1$. Так как

$$\frac{1}{(n+1)!}\left[x^m\right]\tilde{V}_{p+1}^{-1}\tilde{C}_n\tilde{D}\left((1+x)^{n\beta}, x\right)^T x^p =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} (-1)^{m-i} \binom{p-i}{m-i}\binom{n\beta}{p-i}\binom{n+1+i}{i}\frac{(n\beta+m-p)!}{(n\beta+m-p)!} =,$$

$$= \binom{n\beta}{p-m}\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{n+1+i}{i}\binom{n\beta+m-p}{m-i} =$$

$$= \binom{n\beta}{p-m}(-1)^m\binom{n\beta+m-p-n-2}{m} = \binom{n\beta}{p-m}\binom{-n\beta+n+p+1}{m},$$

то

$$\tilde{V}_n^{-1}\tilde{C}_n\tilde{D}\left((1+x)^{n\beta}, x\right)^T x^p = \left((1-x)^{n-p-1}, x\right)\tilde{V}_{p+1}^{-1}\tilde{C}_n\tilde{D}\left((1+x)^{n\beta}, x\right)^T x^p =$$

$$= (n+1)!(1-x)^{n-p-1}\, t_p(-n\beta+n+p+1 \mid n\beta, x).$$

Остается добавить, что

$$\tilde{D}^{-1}\tilde{C}_n^{-1}\tilde{V}_n x^p = \frac{1}{(n+1)!}\sum_{m=p}^{n-1}\binom{n-1-p}{n-1-m}\binom{n+1+m}{m}^{-1} x^m.$$

В частности,

$$T_n^{\beta} x^{n-1} = \binom{2n}{n-1}^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{n(2-\beta)}{m}\binom{n\beta}{n-1-m} x^m.$$

Соответственно, в силу Теоремы 20,

$$T_n^{\beta} x^0 = \binom{2n}{n-1}^{-1}\sum_{m=0}^{n-1}\binom{-n\beta}{m}\binom{n(2+\beta)}{n-1-m} x^m.$$

[1] L. Shapiro, S. Getu, W. Woan, L. Woodson, The Riordan group, Discrete Appl. Math. 34 (1991) 229-339.

[2] R. Sprugnoli, Riordan arrays and combinatorial sums, Discrete Math.132 (1994) 267-290.
[3] D. Merlini, D. G. Rogers, R. Sprugnoli and M. C. Verri, On some alternative characterizations of Riordan arrays, Can. J. Math. 49 (1997) 301-320.
[4] W, Wang, T. Wang, Generalized Riordan arrays, Discrete Math. 308 (2008) 6466-6500.
[5] P. Barry, A study of integer sequences, Riordan arrays, Pascal-like arrays and Hankel transforms, University College Cork, 2009.
[6] S. M. Roman, The Umbral Calculus, Academic Press, 1984.
[7] V. E. Hoggatt and Marjorie Bicknell, Convolution triangles, Fibonacci Quart. 10 (1972) 599-609.
[8] V. E. Hoggatt, and G. E. Bergum, Generalized convolution arrays, Fibonacci Quart. 13 (1975) 193-198.
[9] V. E. Hoggatt and Marjorie Bicknell-Johnson, Numerator polynomial coefficient arrays for Catalan and related sequence convolution triangles, Fibonacci Quart. 15 (1977) 30-34.
[10] G. E. Bergum and V. E. Hoggatt, An application of the characteristic of the generalized Fibonacci sequence, Fibonacci Quart. 15 (1977) 215-220.
[11] V. E. Hoggatt and Marjorie Bicknell-Johnson, Convolution arrays for Jacobsthal and Fibonacci polynomials, 16 (1978) 385-402.
[12] Peter Bala, Notes on generalized Riordan arrays,
https://oeis.org/A260492/a260492.pdf
[13] M. Koutras, Eulerian nambers associated with sequences of polynomials, Fibonacci Quart. 32 (1994) 44-57.
[14] V. E. Hoggatt and Paul S. Bruckman, H-convolution transform, Fibonacci Quart. 13 (1975) 357-368.
[15] E. V. Burlachenko, Riordan arrays and generalized Lagrange series, Mathematical Notes, 100 (2016) 531-539.
[16] B. Drake, An inversion theorem for labeled trees and some limits of areas under lattice paths, A dissertation presented to the Faculty of the Graduate School of Arts and Sciences of Brandeis University, 2008.
[17] P. Bala, Diagonals of triangles with generating function exp(t*F(x)),
https://oeis.org/A112007/a112007.txt
[18] Wolfdieter Lang, On Generating functions of Diagonals Sequences of Sheffer and Riordan Number Triangles, arXiv:1708.01421.
[19] Dmitry V. Kruchinin, Vladimir V. Kruchinin, A generating function for the Euler numbers of the second kind and its application, arXiv:1802.09003.