B-РАЗЛОЖЕНИЕ ПСЕВДО-ИНВОЛЮЦИИ ГРУППЫ РИОРДАНА

Е. Бурлаченко

Каждая числовая последовательность $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ с производящей функцией $B(x)$ задает псевдо-инволюцию группы Риордана $(1, xg(x))$, такую, что $g(x) = 1 + xg(x)B(x^2 g(x))$. В предлагаемой статье мы реализуем простую идею – выразим коэффициенты ряда $g^m(x)$ через коэффициенты ряда $B(x)$. Полученное разложение имеет яркий комбинаторный характер, проливает свет на связь псевдо-инволюции группы Риордана с обобщенным биномиальным рядом, а также является полезным для нахождения ряда $g(x)$ по заданному ряду $B(x)$. Мы сопоставим это разложение с аналогичным разложением для последовательности $(1, a_1, a_2, \ldots)$ с производящей функцией $A(x)$, такой, что $g(x) = A(xg(x))$.

1. Введение

В пространстве формальных степенных рядов над полем действительных или комплексных чисел основную роль играют преобразования, соответствующие умножению и композиции рядов. Умножение задается матрицей $(f(x), x)$, n-й столбец которой, $n = 0, 1, 2, \ldots$, имеет производящую функцию $f(x)x^n$; композиция задается матрицей $(1, \mathrm{g}(x))$, n-й столбец которой имеет производящую функцию $g^n(x)$, $g_0 = 0$:

$$(f(x), x)a(x) = f(x)a(x), \quad (1, \mathrm{g}(x))a(x) = a(g(x)).$$

Матрица

$$(f(x), x)(1, g(x)) = (f(x), g(x))$$

называется матрицей Риордана [1] – [5]. n-й столбец матрицы Риордана имеет производящую функцию $f(x)g^n(x)$. Таким образом,

$$(f(x), g(x))b(x)a^n(x) = f(x)b(g(x))a^n(g(x)),$$

$$(f(x), g(x))(b(x), a(x)) = (f(x)b(g(x)), a(g(x))).$$

Матрицы $(f(x), g(x))$, $f_0 \neq 0$, $g_1 \neq 0$, или в более удобной записи $(f(x), xg(x))$, $f_0 \neq 0$, $g_0 \neq 0$, образуют группу, которая называется группой Риордана. Элементы матрицы $(f(x), xg(x))$ обозначим $d_{n,m}$. Для каждой матрицы группы Риордана существует последовательнсть чисел $A=(a_0, a_1, a_2, \ldots)$, называемая A-последовательостью, такая, что

$$d_{n+1,m+1} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i d_{n,m+i} .$$

Пусть $A(x)$ – призодящая фукция A-последовательности. Тогда

$$f(x) g^{m+1}(x) = f(x) g^m(x) A(xg(x)),$$

$$g(x) = A(xg(x)),\ (1, xg(x))^{-1} = (1, xA^{-1}(x)).$$

Например,

$$A(x) = 1 + ax + bx^2,\ g(x) = 1 + axg(x) + bx^2 g^2(x) =$$

$$= \frac{1 - ax - \sqrt{(1-ax)^2 - 4bx^2}}{2bx^2}.$$

Матрица Риордана, обратная к самой себе, называется инволюцией группы Риордана. Если матрица $(f(x), xg(x))$ является инволюцией (в этом случае $f_0, g_0 = \pm 1$), то матрица $(1, xg(x))$ также является инволюцией. Случай $f_0 = -1$ можно рассматривать как произведение двух инволюций:

$$(-f(x), xg(x)) = (-1, x)(f(x), xg(x)),\ f_0 = 1.$$

Ряд $f(x)$, представленый в виде

$$f(x) = c(x) + \sqrt{c^2(x) + 1},\ c(x) = \frac{f(x) - f^{-1}(x)}{2},$$

удовлетворяет условию

$$c(xg(x)) = -c(x),\ f(xg(x)) = f^{-1}(x).$$

Любую инволюцию можно представить в виде RM, где R – матрица Риордана,

$$M=(1,-x)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdots\\0&-1&0&0&\cdots\\0&0&1&0&\cdots\\0&0&0&-1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}.$$

Матрица $R=(f(x),xg(x))$,

$$(f(x),xg(x))^{-1}=M(f(x),xg(x))M=(f(-x),xg(-x)),$$

называется псевдо-инволюцией группы Риордана. Примером псевдо-инволюции является матрица Паскаля:

$$P=\left(\frac{1}{1-x},\frac{x}{1-x}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdots\\1&1&0&0&\cdots\\1&2&1&0&\cdots\\1&3&3&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},\ P^{-1}=\left(\frac{1}{1+x},\frac{x}{1+x}\right).$$

Для каждой псевдо-инволюции группы Риордана (за исключением матриц M, $-M$, которые являются одновременно инволюциями и псевдо-инволюциями) существует числовая последовательность $B=(b_0,b_1,b_2,\ldots)$, называемая B-последовательностью [4], [5] (в [4] эта последовательность называется Δ-последовательностью), такая, что

$$d_{n+1,m}=d_{n,m-1}+\sum_{i=0}^{\infty}b_i d_{n-i,m+i}\,.$$

Пусть $B(x)$ – призодящая фукция B-последовательности матрицы $(f(x),xg(x))$. Тогда

$$f(x)g^m(x)=f(x)g^{m-1}(x)+xf(x)g^m(x)B\left(x^2g(x)\right),$$

$$g(x)=1+xg(x)B\left(x^2g(x)\right).$$

Например,

$$B(x)=a+bx,\ \ g(x)=1+axg(x)+bx^3g^2(x)=$$

$$=\frac{1-ax-\sqrt{(1-ax)^2-4bx^3}}{2bx^3}\ .$$

В разделе 2 для наглядности, которая понадобится в дальнейшем, мы свяжем B-последовательность матрицы $\left(1, xg(x)\right)$ с A-последовательностью матрицы $\left(1, x\sqrt{g(x)}\right)$. В разделе 3 на основании равенства

$$g^m(x) = g^{m-1}(x) + xg^m(x)B\left(x^2 g(x)\right)$$

мы выразим коэффициенты ряда $g^m(x)$, $\left[x^n\right]g^m(x) = g_n^{(m)}$, через коэффициенты ряда $B(x)$, а именно

$$g_n^{(m)} = \sum_n \frac{m(m+k)_q}{(m+k)m_0!m_1!\ldots m_p!} b_0^{m_0} b_1^{m_1} \ldots b_p^{m_p},$$

$$p = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \; k = \sum_{i=0}^{p} m_i (i+1), \; q = \sum_{i=0}^{p} m_i,$$

$$(m+k)_q = (m+k)(m+k-1)\ldots(m+k-q+1),$$

где суммирование ведется по всем мономам $b_0^{m_0} b_1^{m_1} \ldots b_p^{m_p}$, для которых $n = \sum_{i=0}^{p} m_i (2i+1)$. В разделе 4 мы сопоставим полученное разложение с разложениями «биномиального» и «обобщенного биномиального» типа, такими, как

$$g_n^{(m)} = \sum_n \frac{(m)_q}{m_1!m_2\ldots m_n!} g_1^{m_1} g_2^{m_2} \ldots g_n^{m_n} = \sum_n \frac{m^q}{m_1!m_2!\ \ldots\ m_n!} \ l_1^{m_1} l_2^{m_2} \ldots\ l_n^{m_n} =$$

$$= \sum_n \frac{m(m+n)_q}{(m+n)m_1!m_2\ldots m_n!} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n},$$

$$l_i = \left[x^i\right] \ln g(x), \; a_i = \left[x^i\right] A(x), \; n = \sum_{i=1}^{n} m_i i, \; q = \sum_{i=1}^{n} m_i,$$

и покажем, что оно также является разложением этого типа.

2. Некоторые примеры

Замечание 1. Если матрицы $\left(1, xa^{-1}(x)\right)$, $\left(1, xb(x)\right)$ являются взаимно обратными, то

$$\left(1, xb(x)\right)a(x) = b(x),\ \left(1, xb(x)\right)\left(1, xa(x)\right) = \left(1, xb^2(x)\right).$$

Пусть $\left(1, xa(x)\right)^{-1} = \left(1, xc^{-1}(x)\right)$. Тогда

$$\left(1, xc^{-1}(x)\right)a^{-1}(x) = c^{-1}(x),\ \left(1, xc^{-1}(x)\right)\left(1, xa^{-1}(x)\right) = \left(1, xc^{-2}(x)\right),$$

$$\left(1, xb^2(x)\right)^{-1} = \left(1, xc^{-2}(x)\right).$$

Теорема 1. Если матрица $\left(1, xg(x)\right)$, $g(x) \neq -1$, является псевдо-инволюцией, т.е.

$$\left(1, xg(x)\right)^{-1} = \left(1, xg(-x)\right) = M\left(1, xg(x)\right)M,$$

то ее можно представить в виде

$$\left(1, xg(x)\right) = \left(1, x\sqrt{g(x)}\right)\left(1, xh(x)\right),$$

где

$$h(-x) = h^{-1}(x),\quad h(x) = s(x) + \sqrt{s^2(x) + 1},\ s_{2n} = 0.$$

Доказательство вытекает из замечания 1.

Пример 1.

$$\left(1, \frac{x}{1 - 2\varphi x}\right) = \left(1, \frac{x}{\sqrt{1 - 2\varphi x}}\right)\left(1, x\left(\varphi x + \sqrt{\varphi^2 x^2 + 1}\right)\right).$$

Пример 2.

$$\left(1, x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(2+n)^{n-1}}{n!}\varphi^n x^n\right) = \left(1, x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+n)^{n-1}}{n!}\varphi^n x^n\right)\left(1, xe^{\varphi x}\right),$$

где

$$x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+n)^{n-1}}{n!}\varphi^n x^n = \log\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\varphi n)^{n-1}}{n!}x^n\right) = x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\varphi n)^{n-1}}{n!}x^n\right)^{\varphi},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(2+n)^{n-1}}{n!}\varphi^n x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\varphi n)^{n-1}}{n!}x^n\right)^{2\varphi}.$$

Пример 3.

$$\left(1,\frac{1-4\varphi x+\varphi^2x^2-\sqrt{\left(1-4\varphi x+\varphi^2x^2\right)^2-4\varphi^2x^2}}{2\varphi^2x}\right)=$$

$$=\left(1,\frac{1-\varphi x-\sqrt{(1-\varphi x)^2-4\varphi x}}{2\varphi}\right)\left(1,x\frac{1+\varphi x}{1-\varphi x}\right),$$

$$\frac{1+\varphi x}{1-\varphi x}=\frac{2\varphi x}{1-\varphi^2x^2}+\sqrt{\left(\frac{2\varphi x}{1-\varphi^2x^2}\right)^2+1}.$$

Теорема 2. Если $B(x)$ – производящая функция B-последовательности матрицы $(1,xg(x))$, то

$$xB\left(x^2\right)=2s(x).$$

Доказательство. Так как $h^2(x)=1+2s(x)h(x)$, то

$$g(x)=\left(1,x\sqrt{g(x)}\right)(1+2s(x)h(x))=1+xg(x)\tilde{s}\left(x\sqrt{g(x)}\right)=$$

$$=1+xg(x)B\left(x^2g(x)\right),\ \ \tilde{s}(x)=\frac{2s(x)}{x}.$$

Пример 4. В [5] приводится интересный факт, что если

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2m+1}{2m+1+(m+1)n}\binom{2m+1+(m+1)n}{n}x^n,$$

то B-последовательность матрицы $(1,xg(x))$ совпадает с m-й строкой матрицы

$$\left(\frac{1+x}{(1-x)^2},\frac{x}{(1-x)^2}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdots\\3&1&0&0&\cdots\\5&5&1&0&\cdots\\7&14&7&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}.$$

Это следствие того факта, что в данном случае

$$h(x)=\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^{2m+1},$$

$$\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^n=\frac{c_n(x)+s_{n-1}(x)\sqrt{x^2+4}}{2},$$

$$s_{2m}(x)\sqrt{x^2+4}=\sqrt{c_{2m+1}^2(x)+4},\ c_{2m}(x)=\sqrt{s_{2m-1}^2(x)\left(x^2+4\right)+4},$$

где полином $c_n(x)$ сответствует n-й строке матрицы

$$\left(\frac{1+x^2}{1-x^2},\frac{x}{1-x^2}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&\cdots\\0&1&0&0&0&0&\cdots\\2&0&1&0&0&0&\cdots\\0&3&0&1&0&0&\cdots\\2&0&4&0&1&0&\cdots\\0&5&0&5&0&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix},$$

полином $s_n(x)$ соответствует n-й строке матрицы

$$\left(\frac{1}{1-x^2},\frac{x}{1-x^2}\right)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&\cdots\\0&1&0&0&0&0&\cdots\\1&0&1&0&0&0&\cdots\\0&2&0&1&0&0&\cdots\\1&0&3&0&1&0&\cdots\\0&3&0&4&0&1&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}.$$

3. B-разложение

Обозначим $\left[x^n\right]g^m(x)=g_n^{(m)},\ g_n^{(1)}=g_n$. Так как

$$g^m(x) = g^{m-1}(x) + xg^m(x)B\left(x^2 g(x)\right),$$

где

$$g^m(x)B\left(x^2 g(x)\right) = \left(g^m(x), x^2 g(x)\right)B(x),$$

то

$$g_n^{(m)} = b_0 g_{n-1}^{(m)} + b_1 g_{n-3}^{(m+1)} + b_2 g_{n-5}^{(m+2)} + \ldots + b_p g_{n-1-2p}^{(m+p)} + g_n^{(m-1)},\ p = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor,$$

или

$$g_n^{(m)} = b_0 g_{n-1}^{(m)} + b_1 g_{n-3}^{(m+1)} + b_2 g_{n-5}^{(m+2)} + \ldots + b_p g_{n-1-2p}^{(m+p)} +$$

$$+ b_0 g_{n-1}^{(m-1)} + b_1 g_{n-3}^{(m)} + b_2 g_{n-5}^{(m+1)} + \ldots + b_p g_{n-1-2p}^{(m+p-1)} +$$

$$+ b_0 g_{n-1}^{(m-2)} + b_1 g_{n-3}^{(m-1)} + b_2 g_{n-5}^{(m)} + \ldots + b_p g_{n-1-2p}^{(m+p-2)} +$$

$$\ldots$$

$$+ b_0 g_{n-1}^{(1)} + b_1 g_{n-3}^{(2)} + b_2 g_{n-5}^{(3)} + \ldots + b_p g_{n-1-2p}^{(p+1)};$$

$$g_n^{(m)} = b_0 \sum_{i=1}^{m} g_{n-1}^{(i)} + b_1 \sum_{i=2}^{m+1} g_{n-3}^{(i)} + b_2 \sum_{i=3}^{m+2} g_{n-5}^{(i)} + \ldots + b_p \sum_{i=p+1}^{m+p} g_{n-1-2p}^{(i)}. \qquad (1)$$

Используя рекурсию, находим

$$g_0^{(m)} = 1,\ \ g_1^{(m)} = mb_0,\ \ g_2^{(m)} = \binom{m+1}{2} b_0^2,$$

$$g_3^{(m)} = \binom{m+2}{3} b_0^3 + mb_1,$$

$$g_4^{(m)} = \binom{m+3}{4} b_0^4 + m\binom{m+2}{1} b_0 b_1,$$

$$g_5^{(m)} = \binom{m+4}{5} b_0^5 + m\binom{m+3}{2} b_0^2 b_1 + mb_2,$$

$$g_6^{(m)} = \binom{m+5}{6} b_0^6 + m\binom{m+4}{3} b_0^3 b_1 + m\binom{m+3}{1} b_0 b_2 + \frac{m}{m+2}\binom{m+3}{2} b_1^2.$$

Коэффициент при мономе $b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}$ в разложении коэффициента $g_n^{(m)}$ обозначим $\left(m\,|\,b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}\right)$.

Теорема 3.

$$g_n^{(m)}=\sum\left(m\,|\,b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}\right)b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p},$$

где выражению $b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}$ соответствует разбиение $n=\sum_{i=0}^{p}m_i\,(2i+1)$ и суммирование ведется по всем разбиениям числа n на нечетные слагаемые.

Доказательство. Пусть теорема верна для g_n:

$$g_n=\sum\left(1\,|\,b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}\right)b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}.$$

Тогда

$$g_n^{(2)}=\sum_{n=i+j}g_ig_j=\sum\left(2\,|\,b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}\right)b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p},$$

$$g_n^{(m)}=\sum_{n=i+j}g_ig_j^{(m-1)}=\sum\left(m\,|\,b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}\right)b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}.$$

Т.е. коэффициент $g_n^{(m)}$ раскладывается по тем же мономам, что и коэффициент g_n, но с другими коэффициентами разложения. Пусть теорема верна для всех g_i, $i<n$. Тогда она верна и для g_n,

$$g_n=b_0g_{n-1}^{(1)}+b_1g_{n-3}^{(2)}+b_2g_{n-5}^{(3)}+\dots+b_pg_{n-1-2p}^{(p+1)},$$

так как моном, соответствующий разбиению $n=\sum_{i=0}^{p}m_i\,(2i+1)$, присутствует в слагаемом $b_ig_{n-1-2i}^{(i+1)}$, если $m_i\neq 0$. Таким образом, достаточно чтобы теорема выполнялась для g_1.

Теорема 4.

$$\left(m\,|\,b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(i\,|\,b_0^{m_0-1}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}\right)+\sum_{i=2}^{m+1}\left(i\,|\,b_0^{m_0}b_1^{m_1-1}\dots b_p^{m_p}\right)+$$
$$+\sum_{i=3}^{m+2}\left(i\,|\,b_0^{m_0}b_1^{m_1}b_2^{m_2-1}\dots b_p^{m_p}\right)+\dots+\sum_{i=p+1}^{m+p}\left(i\,|\,b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p-1}\right),$$

где $\left(i\,|\dots b_r^{-1}\dots\right)=0$.

Доказательство. Из теоремы 3 следует, что моном $b_0^{m_0} b_1^{m_1} b_2^{m_2} \ldots b_p^{m_p}$ с коэффициентом $\sum_{i=r+1}^{m+r} \left(i \mid b_0^{m_0} b_1^{m_1} \ldots b_r^{m_r - 1} \ldots b_p^{m_p} \right)$ присутствует в слагаемом

$$b_r \sum_{i=r+1}^{m+r} g_{n-1-2r}^{(i)}$$

формулы (1), если $m_r \neq 0$.

Коэффициенты $\left(m \mid b_0^{m_0} b_1^{m_1} \ldots b_p^{m_p} \right)$ тесно связаны с коэффициентами обобщенного биномиального ряда

$$\mathcal{B}_r(x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m}{m+rn} \binom{m+rn}{n} x^n .$$

Рассмотрим следующее обобщение таблицы Паскаля. Элементы таблицы обобзннаачим $(m,n)_r$. Тогда $(m,0)_r = 1$; $(0,n)_r = 0$, $n > 0$. Остальные элементы находим по правилу

$$(m,n)_r = (m-1,n)_r + (m+r-1,n-1)_r .$$

Например, $r=1$, $r=2$, $r=3$, $r=4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdots \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 2 & 5 & 14 & \cdots \\ 1 & 2 & 5 & 14 & 42 & \cdots \\ 1 & 3 & 9 & 28 & 92 & \cdots \\ 1 & 4 & 14 & 48 & 165 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 3 & 12 & 55 & \cdots \\ 1 & 2 & 7 & 30 & 143 & \cdots \\ 1 & 3 & 12 & 55 & 273 & \cdots \\ 1 & 4 & 18 & 88 & 455 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 4 & 22 & 140 & \cdots \\ 1 & 2 & 9 & 52 & 340 & \cdots \\ 1 & 3 & 15 & 91 & 612 & \cdots \\ 1 & 4 & 22 & 140 & 967 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(m,n)_r = \sum_{i=r}^{m+r-1} (i,n-1)_r , \quad \mathcal{B}_r(x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} (m,n)_r x^n .$$

Теорема 5.

$$\left(m \mid b_r^{m_r}\right)=\left[x^{m_r}\right]\mathcal{B}_{r+1}(x)^m=\frac{m}{m+rm_r}\binom{m+rm_r+m_r-1}{m_r}.$$

Доказательство. Согласно теореме 4,

$$\left(m \mid b_r^{m_r}\right)=\sum_{i=r+1}^{m+r}\left(i \mid b_r^{m_r-1}\right),$$

где $\left(i \mid b_r\right)=i$.

Теорема 6.

$$\left(m \mid b_r^{m_r} b_s^{m_s}\right)=\frac{m}{m+k-m_r-m_s}\binom{m+k-1}{m_r}\binom{m+k-1-m_r}{m_s}=$$

$$=\frac{m(m+k-1)!}{m_r!m_s!(m+k-m_r-m_s)!},\ \ k=m_r(r+1)+m_s(s+1).$$

Доказательство. Последовательно применяя теорему 4, коэффициент $\left(m \mid b_r^{m_r} b_s^{m_s}\right)$ можно разложить в сумму коэффициентов вида $\left(i \mid b_j^{m_j}\right)$, которые удовлетворяют теореме 6. Поэтому достаточно показать, что теорема 4 совместима с теоремой 6:

$$\left(m \mid b_r^{m_r} b_s^{m_s}\right)=\sum_{i=r+1}^{m+r}\left(i \mid b_r^{m_r-1} b_s^{m_s}\right)+\sum_{i=s+1}^{m+s}\left(i \mid b_r^{m_r} b_s^{m_s-1}\right)=$$

$$=\sum_{i=r+1}^{m+r}\frac{i(i+k-1-r-1)!}{(m_r-1)!m_s!(i+k-m_r-m_s-r)!}+$$

$$+\sum_{i=s+1}^{m+s}\frac{i(i+k-1-s-1)!}{m_r!(m_s-1)!(i+k-m_r-m_s-s)!}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{(m_r(r+i)+m_s(s+i))(i+k-2)!}{m_r!m_s!(i+k-m_r-m_s)!}=$$

$$=\frac{k!}{m_r!m_s!(1+k-m_r-m_s)!}+\sum_{i=2}^{m}\frac{(m_r(r+i)+m_s(s+i))(i+k-2)!}{m_r!m_s!(i+k-m_r-m_s)!}=$$

$$=\frac{2(1+k)!}{m_r!m_s!(2+k-m_r-m_s)!}+\sum_{i=3}^{m}\frac{(m_r(r+i)+m_s(s+i))(i+k-2)!}{m_r!m_s!(i+k-m_r-m_s)!}=$$

$$\dots$$

$$=\frac{(m-1)(m+k-2)!}{m_r!m_s!(m-1+k-m_r-m_s)!}+\frac{(m_r(r+m)+m_s(s+m))(m+k-2)!}{m_r!m_s!(m+k-m_r-m_s)!}=$$

$$=\frac{((m-1)(m+k)+k)(m+k-2)!}{m_r!m_s!(m+k-m_r-m_s)!}=\frac{m(m+k-1)!}{m_r!m_s!(m+k-m_r-m_s)!}.$$

Обобщая, выводим

$$\left(m\,|\,b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}\right)=\frac{m(m+k-1)!}{m_0!m_1!\dots m_p!(m+k-m_0-m_1-\dots-m_p)!},$$

$$k=\sum_{i=0}^{p}m_i(i+1).$$

Пусть выражение

$$\sum_n\left(m\,|\,b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}\right)b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}$$

означает, что суммирование ведется по всем мономам $b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}$ для которых $n=\sum_{i=0}^{p}m_i(2i+1)$ (или по другому закону для n, который указывается отдельно). Тогда

$$g^m(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_n\left(m\,|\,b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}\right)b_0^{m_0}b_1^{m_1}\dots b_p^{m_p}x^n.$$

Так как

$$\left(m\,|\,b_0^{m_0}b_1^{m_1}b_2^{m_2}\dots b_p^{m_p}\right)=$$

$$=\frac{(m+k-1)!m(m+k-m_0-1)!}{m_0!(m+k-m_0-1)!m_1!\dots m_p!(m+k-m_0-m_1-\dots-m_p)!}=$$

$$=\binom{m+(k-m_0)+m_0-1}{m_0}\left(m\,|\,b_1^{m_1}b_2^{m_2}\dots b_p^{m_p}\right),$$

то ряд $g^m(x)$ можно также представить в виде

$$g^m(x)=\frac{1}{(1-b_0x)^m}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{n}\left(m\,|\,b_1^{m_1}b_2^{m_2}\ldots b_p^{m_p}\right)b_1^{m_1}b_2^{m_2}\ldots b_p^{m_p}\,\frac{x^n}{(1-b_0x)^{m+k}},$$

$$n=\sum_{i=1}^{p}m_i\,(2i+1),\; k=\sum_{i=1}^{p}m_i\,(i+1).$$

Пример 5.

$$B(x)=b_0+b_rx^r,\;\; g^m(x)=\frac{1}{(1-b_0x)^m}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(m\,|\,b_r^n\right)b_r^n\,\frac{x^{n(2r+1)}}{(1-b_0x)^{m+n(r+1)}}=$$

$$=\left(\frac{1}{(1-b_0x)^m},\frac{b_rx^{2r+1}}{(1-b_0x)^{r+1}}\right)\mathcal{B}_{r+1}(x)^m.$$

В частности,

$$\left(\frac{1}{(1-b_0x)^m},\frac{b_1x^3}{(1-b_0x)^2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)^m=$$

$$=\left(\frac{1-b_0x-\sqrt{(1-b_0x)^2-4b_1x^3}}{2b_1x^3}\right)^m.$$

4. Разложения обобщенного биномиального типа

Пусть $\left|e^x\right|$ – диагональная матрица, диагональные элементы которой равны коэффициентам ряда e^x: $\left|e^x\right|(1-x)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n/n!$. Полином, соответствующий n-й строке матрицы $\left|e^x\right|^{-1}(1,\ln a(x))\left|e^x\right|$ обозначим $p_n(x)$ (последовательность таких полиномов называется биномиальной последовательностью). Тогда

$$a^{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_n(\varphi)}{n!}x^n.$$

Полином, соответствующий n-й строке матрицы $(1,f(x))$, $f_0=0$, $f_1\neq 0$, $n>0$, имеет вид

$$\sum_n \frac{q!x^q}{m_1!m_2!\ldots m_n!} f_1^{m_1} f_2^{m_2} \ldots f_n^{m_n}\ , \ \ n=\sum_{i=1}^n m_i i,\ \ q=\sum_{i=1}^n m_i\ .$$

Следовательно, если $g(x)=a(f(x))$, то

$$g_n^{(m)}=\sum_n \frac{p_q(m)}{m_1!m_2!\ldots m_n!} f_1^{m_1} f_2^{m_2} \ldots f_n^{m_n}\ .$$

Представление коэффициетов $g_n^{(m)}$ в таком виде будем называть разложением биномиального типа, или биномиальным разложением. Например, так как

$$g^m(x)=(1,g(x)-1)(1+x)^m=(1,\ln g(x))e^{xm},$$

то

$$g_n^{(m)}=\sum_n \frac{(m)_q}{m_1!m_2\ldots m_n!} g_1^{m_1} g_2^{m_2} \ldots g_n^{m_n}=\sum_n \frac{m^q}{m_1!m_2!\ \ldots\ m_n!}\ l_1^{m_1} l_2^{m_2}\ldots\ l_n^{m_n},$$

$$l_n=\left[x^n\right]\ln g(x),\ \ n=\sum_{i=1}^n m_i i\ ,\ \ q=\sum_{i=1}^n m_i\ .$$

Полином, соответствующий n-й строке матрицы $(1,\ln g(x))\left|e^x\right|$, обозначим $l_n(x)$. Тогда

$$l_n(x)=\sum_n \frac{p_q(x)}{m_1!m_2!\ldots m_n!} f_1^{m_1} f_2^{m_2} \ldots f_n^{m_n}=\sum_n \frac{x^q}{m_1!m_2!\ \ldots\ m_n!}\ l_1^{m_1} l_2^{m_2}\ldots\ l_n^{m_n}\ .$$

Полином, соответствующий n-й строке матрицы $(1,\ln A(x))\left|e^x\right|$, обозначим $\tilde{l}_n(x)$. Так как $(1,xg(x))^{-1}=\left(1,xA^{-1}(x)\right)$, то по теореме обращения Лагранжа

$$l_n(x)=x(x+n)^{-1}\,\tilde{l}_n(x+n).$$

Таким образом,

$$\tilde{l}_n(x)=\sum_n \frac{(x)_q}{m_1!m_2\ldots m_n!} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}\ ,$$

$$l_n(x)=\sum_n \frac{x(x+n)_q}{(x+n)m_1!m_2\ldots m_n!} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}\ .$$

A-разложение,

$$g_n^{(m)} = \sum_n \frac{m(m+n)_q}{(m+n)m_1!m_2\dots m_n!} a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_n^{m_n},$$

применимо к любой матрице $(1, xg(x))$, $g_0 = 1$. Оно не является разложением биномиального типа, поэтому расширим класс рассматриваемых разложений. Разложения, такие, что

$$g_n^{(m)} = \sum_n \frac{(m/\varphi)\, p_q((m/\varphi)+n)}{((m/\varphi)+n)m_1!m_2!\dots m_n!} f_1^{m_1} f_2^{m_2} \dots f_n^{m_n},$$

если

$$[x^n]_{(\varphi)} A^m(x) = \sum_n \frac{p_q(m)}{m_1!m_2!\dots m_n!} f_1^{m_1} f_2^{m_2} \dots f_n^{m_n},$$

где ${}_{(\varphi)}A(x)$ – производящая функция A-последовательности матрицы $(1, xg^{\varphi}(x))$, будем называть разложениями обобщенного биномиального типа.

Теорема 7. B-разложение является разложением обобщенного биномиального типа.

Доказательство. Пусть матрица $(1, xg(x))$ является псевдо-инволюцией. Согласно теоремам 1 и 2

$$\left(1, x\sqrt{g(x)}\right)^{-1} = \left(1, xh^{-1}(x)\right),$$

$$h(x) = (1, s(x))\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \; s_{2n} = 0, \; s_{2n+1} = b_n/2.$$

Биномиальное разложение коэффициентов ряда $h^m(x)$ имеет вид

$$[x^n]h^m(x) = \sum_n \frac{p_q(m)}{m_0!m_1!\dots m_p!} \frac{1}{2^q} b_0^{m_0} b_1^{m_1} \dots b_p^{m_p},$$

где

$$p = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \; n = \sum_{i=0}^{p} m_i(2i+1), \; q = \sum_{i=0}^{p} m_i,$$

$$p_1(m) = m, \;\; p_q(m) = m\prod_{i=1}^{q-1}(m+q-2i).$$

Соответствующее разложение коэффициентов ряда $g^{m/2}(x)$ имеет вид

$$\left[x^n\right]g^{m/2}(x)=\sum_n \frac{mp_q(m+n)}{(m+n)m_0!m_1!\ldots m_p!}\frac{1}{2^q}b_0^{m_0}b_1^{m_1}\ldots b_p^{m_p}.$$

Так как

$$\frac{2m}{2m+n}p_q(2m+n)=2^q m\prod_{i=1}^{q-1}\left(m+\frac{q+n}{2}-i\right)=\frac{2^q m(m+k)_q}{m+k},$$

где

$$k=\sum_{i=0}^{p}m_i(i+1),$$

то

$$g_n^{(m)}=\sum_n \frac{m(m+k)_q}{(m+k)m_0!m_1!\ldots m_p!}b_0^{m_0}b_1^{m_1}\ldots b_p^{m_p}.$$

При выводе B-разложения в разделе 3 мы отметили некоторые его конструктивные свойства, которые трудно было бы разглядеть с более общей точки зрения. Отметим аналогичные свойства у A-разложения,

$$g^m(x)=g^{m-1}(x)A(xg(x)),\ a_0=1,$$

$$g_n^{(m)}=a_1\sum_{i=1}^{m}g_{n-1}^{(i)}+a_2\sum_{i=2}^{m+1}g_{n-2}^{(i)}+a_3\sum_{i=3}^{m+2}g_{n-3}^{(i)}+\ldots+a_n\sum_{i=n}^{m+n-1}g_0^{(i)}.$$

Обозначим

$$\left(m\mid a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n}\right)=\frac{m(m+n-1)!}{m_1!m_2\ldots m_n!(m+n-m_1-m_2-\ldots-m_n)!},$$

$n=\sum_{i=1}^{n}m_i i$. Тогда

$$\left(m\mid a_r^{m_r}\right)=\left[x^{m_r}\right]\mathcal{B}_r(x)^m=\frac{m}{m+rm_r}\binom{m+rm_r}{m_r},$$

$$\left(m\mid a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n}\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(i\mid a_1^{m_1-1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n}\right)+\sum_{i=2}^{m+1}\left(i\mid a_1^{m_1}a_2^{m_2-1}\ldots a_n^{m_n}\right)+$$

$$+\sum_{i=3}^{m+2}\left(i\mid a_1^{m_1}a_2^{m_2}a_3^{m_3-1}\ldots a_n^{m_n}\right)+\ldots+\sum_{i=n}^{m+n-1}\left(i\mid a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n-1}\right),$$

где $\left(i \mid \ldots a_r^{-1} \ldots\right)=0$,

$$g^m(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty} \sum_n \left(m \mid a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n}\right) a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n} x^n, \; n=\sum_{i=1}^n m_i i .$$

Так как

$$\left(m \mid a_1^{m_1} a_2^{m_2} a_3^{m_3} \ldots a_n^{m_n}\right)=$$

$$=\frac{(m+n-1)! m(m+n-m_1-1)!}{m_1!(m+n-m_1-1)! m_2! \ldots m_n!(m+n-m_1-m_2-\ldots-m_n)!}=$$

$$=\binom{m+(n-m_1)+m_1-1}{m_1}\left(m \mid a_2^{m_2} a_3^{m_3} \ldots a_n^{m_n}\right),$$

то ряд $g^m(x)$ можно также представить в виде

$$g^m(x)=\frac{1}{(1-a_1 x)^m}+\sum_{n=1}^{\infty} \sum_n \left(m \mid a_2^{m_2} a_3^{m_3} \ldots a_n^{m_n}\right) a_2^{m_2} a_3^{m_3} \ldots a_n^{m_n} \frac{x^n}{(1-a_1 x)^{m+n}},$$

$$n=\sum_{i=2}^n m_i i .$$

Пример 6.

$$A(x)=1+a_1 x+a_r x^r,$$

$$g^m(x)=\frac{1}{(1-a_1 x)^m}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(m \mid a_r^n\right) a_r^n \frac{x^{nr}}{(1-a_1 x)^{m+nr}}=$$

$$=\left(\frac{1}{(1-a_1 x)^m}, \frac{a_r x^r}{(1-a_1 x)^r}\right) \mathcal{B}_r(x)^m .$$

В частности,

$$\left(\frac{1}{(1-a_1 x)^m}, \frac{a_2 x^2}{(1-a_1 x)^2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{1-4 x}}{2 x}\right)^m=$$

$$=\left(\frac{1-a_1 x-\sqrt{(1-a_1 x)^2-4 a_2 x^2}}{2 a_2 x^2}\right)^m .$$

[1] N. T. Cameron, A. Nkwanta, On some (pseudo) involutions in the Riordan group, J. Integer seq., 8 (2005), Article 06.2.3.
[2] G.-S. Cheon, H.Kim, Simple proofs of open problems about the structure of involutions in the Riordan group, Linear Algebra Appl., 428 (2008), 930–940.
[3] G.-S. Cheon, H. Kim, L. W. Shapiro, Riordan group involutions, Linear Algebra Appl., 428 (2008), 941-952.
[4] G.-S. Cheon, S.-T. Jin, H.Kim, L.W. Shapiro, Riordan group involutions and the Δ-sequence, Discrete Appl. Math., 157 (2009), 1696–1701.
[5] D. Phulara, L. Shapiro, Constructing pseudo-involutions in the Riordan group, J. Integer seq., 20 (2017), Article 17.4.7.