ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ ПО МОДУЛЮ 2 КАК НУЛЕВАЯ ОБОБЩЕННАЯ МАТРИЦА ПАСКАЛЯ

Е. В. Бурлаченко

Треугольник Паскаля по модулю 2 является примером нулевой фрактальной обобщенной матрицы Паскаля. В статье рассматривается общий случай подобных матриц. Акцент делается на связанных с ними алгебрах.

1. Алгебра обобщенных матриц Риордана и нулевые обобщенные матрицы Паскаля

В пространстве формальных степенных рядов основную роль играют преобразования, соответствующие умножению и композиции рядов. Умножение задается матрицей $(a(x),x)$, n-м столбцом которой, $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, является ряд $x^n a(x)$,

$$(a(x),x)=\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix};$$

композиция задается матрицей $(1,a(x))$, n-м столбцом которой является ряд $a^n(x)$:

$$(a(x),x)b(x)=a(x)b(x),\ (1,a(x))b(x)=b(a(x)).$$

Матрица

$$(b(x),x)(1,a(x))=(b(x),a(x))$$

называется матрицей Риордана [1], [2].

Матрицы

$$\left|e^x\right|^{-1}(b(x),a(x))\left|e^x\right|=(b(x),a(x))_{e^x},$$

где $\left|e^x\right|$ – диагональная матрица, диагональные элементы которой равны коэффициентам ряда e^x: $\left|e^x\right|a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$, называются экспоненциальными матрицами Риордана. Матрица

$$P=\left(e^{x},x\right)_{e^{x}}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdot\\1&1&0&0&\cdot\\1&2&1&0&\cdot\\1&3&3&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

имеет особый статус и называется матрицей Паскаля.

Матрицы

$$\left|c(x)\right|^{-1}\left(b(x),a(x)\right)\left|c(x)\right|=\left(b(x),a(x)\right)_{c(x)},$$

где $\left|c(x)\right|$ – диагональная матрица: $\left|c(x)\right|a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_na_nx^n$, $c_n\neq 0$, называются обобщенными матрицами Риордана [1] ((c)-матрицами Риордана [2]). С обобщенными матрицами Риордана связано следующее обобщение биномиальных коэффициентов [3]. Для коэффициентов ряда $b(x)$, $b_0=0$; $b_n\neq 0$, $n>0$, обозначим

$$b_0!=1,\ \ b_n!=\prod_{m=1}^{n}b_m,\ \ \binom{n}{m}_b=\frac{b_n!}{b_m!\,b_{n-m}!};\ \ \binom{n}{m}_b=0,\ \ m>n.$$

Тогда

$$\binom{n}{m}_b=\binom{n-1}{m-1}_b+\frac{b_n-b_m}{b_{n-m}}\binom{n-1}{m}_b.$$

n-й коэффициент ряда $a(x)$, (n,m)-й элемент матрицы A, n-ю строку и n-й столбец матрицы A будем обозначать соответственно

$$\left[x^n\right]a(x),\ \ [n,m]A,\ \ [n,\rightarrow]A,\ \ [\uparrow,n]A.$$

Рассмотрим матрицу

$$\left(c(x),x\right)_{c(x)}=\begin{pmatrix}\frac{c_0c_0}{c_0}&0&0&0&0&\cdot\\ \frac{c_0c_1}{c_1}&\frac{c_1c_0}{c_1}&0&0&0&\cdot\\ \frac{c_0c_2}{c_2}&\frac{c_1c_1}{c_2}&\frac{c_2c_0}{c_2}&0&0&\cdot\\ \frac{c_0c_3}{c_3}&\frac{c_1c_2}{c_3}&\frac{c_2c_1}{c_3}&\frac{c_3c_0}{c_3}&0&\cdot\\ \frac{c_0c_4}{c_4}&\frac{c_1c_3}{c_4}&\frac{c_2c_2}{c_4}&\frac{c_3c_1}{c_4}&\frac{c_4c_0}{c_4}&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Обозначим $[\uparrow,1](c(x),x)_{c(x)}=b(x)$. Если $c_0=1,\ c_1=1$, то

$$c_n=(b_n!)^{-1}\ ,\quad [n,m](c(x),x)_{c(x)}=\binom{n}{m}_b.$$

Пусть $c_0=1$, $c_1=1$.Обозначим

$$(c(x),x)_{c(x)}=P_{c(x)}.$$

Матрицу $P_{c(x)}$ назовем обобщенной матрицей Паскаля.

Матрицы $(a(x),x)$ образуют алгебру, изоморфную алгебре формальных степенных рядов:

$$(a(x),x)+(b(x),x)=(a(x)+b(x),x),$$

$$(a(x),x)(b(x),x)=(a(x)b(x),x).$$

Очевидно, что

$$(a(x),x)_{c(x)}(b(x),x)_{c(x)}=(a(x)b(x),x)_{c(x)}.$$

Матрицы $(a(x),x)_{c(x)}$ при различных $c(x)$ можно рассматривать и как матрицы одного и того же оператора умножения, действующего в различных базисах пространства формальных степенных рядов, и как матрицы операторов «обобщенного» умножения, действующих в одном и том же базисе. Выберем вторую точку зрения. Пусть $A\times B$ означает произведение Адамара матриц A, B. Матрицу $(a(x),x)\times P_{c(x)}$ обозначим $(a(x),x\,|\,P_{c(x)})$:

$$[n,m](a(x),x\,|\,P_{c(x)})=[n,m](a(x),x)[n,m]P_{c(x)},$$

$$(a(x),x\,|\,P_{c(x)})=(|c(x)|\,a(x),x)_{c(x)}\ .$$

Операцию умножения рядов, соответствующую алгебре матриц $(a(x),x\,|\,P_{c(x)})$ обозначим

$$a(x)\circ b(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{m=0}^{n}(n,m)\,a_m b_{n-m},$$

$(n,m)=[n,m]P_{c(x)}$. Тогда

$$\left(a(x),x\,|\,P_{c(x)}\right)b(x)=a(x)\circ b(x),$$

$$\left(a(x),x\,|\,P_{c(x)}\right)\left(b(x),x\,|\,P_{c(x)}\right)=\left(a(x)\circ b(x),x\,|\,P_{c(x)}\right).$$

Обычная операция умножения рядов остается приоритетной, т.е. $a(x)b(x)\circ c(x)=\left(a(x)b(x)\right)\circ c(x)$. Умножая равенство

$$D\left(a(x),x\right)=\left(a(x),x\right)D+\left(a'(x),x\right),$$

где D – матрица оператора дифференцирования, на матрицу (x,x), получаем равенство

$$(x,x)D\left(a(x),x\right)=\left(a(x),x\right)(x,x)D+\left(xa'(x),x\right),$$

где $(x,x)D$ – диагональная матрица. Следовательно, справедливо равенство

$$(x,x)D\left(a(x),x\,|\,P_{c(x)}\right)=\left(a(x),x\,|\,P_{c(x)}\right)(x,x)D+\left(xa'(x),x\,|\,P_{c(x)}\right).$$

Таким образом,

$$x\left(a(x)\circ b(x)\right)'=a(x)\circ xb'(x)+xa'(x)\circ b(x).$$

Обозначим

$$a^{(n)}(x)=a(x)\circ a^{(n-1)}(x),\;\; a^{(0)}(x)=1,$$

$$x\left(\log\circ\, a(x)\right)'=xa'(x)\circ a^{(-1)}(x).$$

Тогда

$$x\left(a^{(n)}(x)\right)'=na^{(n-1)}(x)\circ xa'(x),$$

$$\log\circ\left(a(x)\circ b(x)\right)=\log\circ\, a(x)+\log\circ\, b(x).$$

Замечание. Ряд $\log\circ\, a(x)$, $a_0=1$, можно также определить «стандартным» образом:

$$\log\circ\, a(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(a(x)-1\right)^{(n)}.$$

Тогда

$$a^{(\varphi)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^n}{n!}(\log\circ a(x))^{(n)},$$

$$a^{(\varphi)}(x)\circ a^{(\beta)}(x)=a^{(\varphi+\beta)}(x).$$

Произведение Адамара $(a(x),x)\times A$, где A – нижняя треугольная матрица, обозначим $(a(x),x\,|\,A)$. Если для любых двух рядов $a(x)$, $b(x)$ выполняется равенство

$$(a(x),x\,|\,A)(b(x),x\,|\,A)=(b(x),x\,|\,A)(a(x),x\,|\,A)\in M,$$

где M – множество матриц вида $(a(x),x\,|\,A)$, то элементы матрицы A, $[n,m]A=(n,m)$, удовлетворяют равенствам

$$(n,m)(m,0)=(n,n-m)(n-m,0), \tag{1}$$

$$(n+p,p)^{-1}\sum_{m=0}^{n}(n+p,m+p)(m+p,p)a_{n-m}b_m=$$
$$=(n+q,q)^{-1}\sum_{m=0}^{n}(n+q,m+q)(m+q,q)a_{n-m}b_m,\quad p,q=0,1,2,\ldots,$$

или

$$\begin{gathered}(n+q,q)(n+p,m+p)(m+p,p)=\\=(n+p,p)(n+q,m+q)(m+q,q).\end{gathered} \tag{2}$$

Элементы матрицы $P_{c(x)}$, $(n,m)=\dfrac{c_m c_{n-m}}{c_n}$, удовлетворяют этим равенствам.

Введем систему матриц

$$_{\varphi,q}P=P_{c(\varphi,q,x)},\quad c(\varphi,q,x)=\left(\sum_{m=0}^{q-1}x^m\right)\left(1-\frac{x^q}{\varphi}\right)^{-1},\ q>1.$$

Тогда

$$c_{qn+i}=\frac{1}{\varphi^n},\ 0\le i<q;\ c_{qn-i}=\frac{1}{\varphi^{n-1}},\ 0<i\le q,$$

$$\frac{c_{qm+j}c_{q(n-m)+i-j}}{c_{qn+i}}=\frac{\varphi^n}{\varphi^m\varphi^{n-m}}=1,\ i\ge j;\ =\frac{\varphi^n}{\varphi^m\varphi^{n-m-1}}=\varphi,\ i<j,$$

или, при $n \ge m$,

$$\left[n,m\right]_{\varphi,q} P = 1,\ n\left(\operatorname{mod} q\right) \ge m\left(\operatorname{mod} q\right);\ = \varphi,\ n\left(\operatorname{mod} q\right) < m\left(\operatorname{mod} q\right),$$

Например,

$$_{\varphi,2}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & \varphi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},\ _{\varphi,3}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & \varphi & \varphi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & \varphi & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & \varphi & \varphi & 1 & \varphi & \varphi & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & \varphi & 1 & 1 & \varphi & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Множество обобщенных матриц Паскаля является группой относительно умножения Адамара:

$$P_{c(x)} \times P_{f(x)} = P_{c(x)\times f(x)},\ c(x)\times f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n x^n .$$

Очевидно, что элементы матрицы $_{\varphi,q}P \times P_{c(x)}$ удовлетворяют равенствам (1), (2) при любых значениях φ, но в случае $\varphi = 0$ ряд $c(\varphi, q, x)$ не определен. Матрицу $_{0,q}P \times P_{c(x)}$, а также произведение Адамара подобных матриц, назовем нулевой обобщенной матрицей Паскаля. Для алгебры, связанной с нулевой матрицей, будем использовать те же обозначения, что и для алгебры, связанной с матрицей $P_{c(x)}$. Хотя эти алгебры не изоморфны между собой, операции умножения, дифференцирования, логарифмирования, возведения в степень определяются одинаковыми равенствами.

Каждая обобщенная матрица Паскаля раскладывается в произведение Адамара матриц $_{\varphi,q}P$. Множеству матриц $_{\varphi,q}P$ поставим в соответствие множество одномерных векторных подпространств $e_q \log|\varphi|$, где e_q – базисный вектор, $\log|\varphi|$ – координаты натянутых на него векторов. Тогда множество обобщенных матриц Паскаля, элементами которых являются неотрицательные числа, отождествится с бесконечномерным векторным пространством. Нулевые матрицы можно рассматривать как бесконечно удаленные точки пространства.

2. Основные нулевые матрицы

Матрицы ${}_{0,q}P$ образуют ряд, подобный ряду натуральных чисел:

$$
{}_{0,2}P=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&1&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&\cdot\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix},\quad
{}_{0,3}P=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&1&1&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&1&0&0&1&0&0&\cdot\\
1&1&0&1&1&0&1&1&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix},\ \dots
$$

$$
[n,m]\,{}_{0,q}P=1,\ n\ge m,\ \ n(\operatorname{mod} q)\ge m(\operatorname{mod} q);
$$

$$
[n,m]\,{}_{0,q}P=0,\ n< m,\ \ n(\operatorname{mod} q)< m(\operatorname{mod} q).
$$

Отметим основные свойства этих матриц и связанных с ними алгебр.

Матрицу, состоящую из q первых строк матрицы $(b(x),x)$ обозначим $(b(x),x)_q$. Блочную матрицу, (n,m)-м блоком которой является матрица

$$
a_{n-m}(b(x),x)_q,
$$

обозначим $(a(x)|b(x))_q$. Например,

$$
(a(x)|b(x))_2=\begin{pmatrix}
a_0b_0&0&0&0&0&0&\cdot\\
a_0b_1&a_0b_0&0&0&0&0&\cdot\\
a_1b_0&0&a_0b_0&0&0&0&\cdot\\
a_1b_1&a_1b_0&a_0b_1&a_0b_0&0&0&\cdot\\
a_2b_0&0&a_1b_0&0&a_0b_0&0&\cdot\\
a_2b_1&a_2b_0&a_1b_1&a_1b_0&a_0b_1&a_0b_0&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix},
$$

$$\left(a(x)|b(x)\right)_3 = \begin{pmatrix} a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_0b_2 & a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_1b_0 & 0 & 0 & a_0b_0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_1b_1 & a_1b_0 & 0 & a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & \cdot \\ a_1b_2 & a_1b_1 & a_1b_0 & a_0b_2 & a_0b_1 & a_0b_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left(a(x)|b(x)\right)_q = \left(\left(\sum_{m=0}^{q-1} b_m x^m\right) a\left(x^q\right), x\,|\,{}_{0,q}P\right),$$

$$\left(a(x)|b(x)\right)_q \left(g(x)|c(x)\right)_q = \left(a(x)g(x)|b(x)c(x)\right)_q,$$

$${}_{0,q}P^{\varphi} = \left(\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\varphi} | \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\varphi}\right)_q = \left(\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(\varphi)}, x\,|\,{}_{0,q}P\right),$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(\varphi)} = \left(\sum_{m=0}^{q-1} \binom{\varphi+m-1}{m} x^m\right)\left(\frac{1}{1-x^q}\right)^{\varphi},$$

$$\left[x^{qn+m}\right]\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(\varphi)} = \binom{\varphi+m-1}{m}\binom{\varphi+n-1}{n}.$$

Обозначим

$$w_n(\varphi,x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{\varphi+m-1}{m} x^m, \quad \tilde{w}_n(\varphi,x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{\varphi+m-1}{m} x^{n-m}.$$

Тогда

$$\left[qn+m,\rightarrow\right]{}_{0,q}P^{\varphi} = \tilde{w}_m(\varphi,x)\,\tilde{w}_n\left(\varphi,x^q\right),$$

$$[\uparrow, qn+m]_{0,q}P^{\varphi} = w_{q-1-m}(\varphi,x)\frac{x^{qn+m}}{\left(1-x^q\right)^{\varphi}},$$

$$0 \le m < q.$$

Исходя из формулы $x\left(\log\circ a(x)\right)' = xa'(x)\circ a^{(-1)}(x)$ найдем $\log\circ(1-x)^{-1}$:

$$x\left(\log\circ(1-x)^{-1}\right)' = x(1-x)^{-2}\circ\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(-1)} = {}_{0,q}P^{-1}x(1-x)^{-2}.$$

Так как

$$[qn+m,\to]\,{}_{0,q}P^{-1} = \tilde{w}_m(-1,x)\,\tilde{w}_n\left(-1,x^q\right),$$

$$\tilde{w}_0(-1,x)=1,\ \ \tilde{w}_n(-1,x)=x^{n-1}(x-1),$$

например,

$${}_{0,2}P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},\quad {}_{0,3}P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

то

$${}_{0,q}P^{-1}x(1-x)^{-2} = \sum_{m=1}^{q-1}x^m + \sum_{m=1}^{\infty}qx^{qm},$$

$$\log\circ(1-x)^{-1} = \sum_{m=1}^{q-1}\frac{x^m}{m} + \log\left(1-x^q\right)^{-1}.$$

В алгебрах, связанных с нулевыми матрицами, существуют ряды вида $a(x)=1+\log\circ a(x)$, для которых выполняются равенства

$$a^{(\varphi)}(x)=1+\varphi\log\circ a(x),\ \ (\log\circ a(x))\circ(\log\circ a(x))=0.$$

Назовем эти ряды, например, логарифмическими. В алгебре, связанной с матрицей ${}_{0,q}P$, логарифмические ряды образуют группу (а также подалгебру), элементы которой умножаются по правилу

$$a_1(x)\circ a_2(x)=1+\log\circ(a_1(x)\circ a_2(x)).$$

Их общий вид найдем следующим образом. Если произведение двух рядов равно нулю, будем называть эти ряды делителями нуля. Как видно из матрицы ${}_{0,2}P$, мономы x^{2n+1}, и только они, являются делителями нуля по отношению друг к другу и к самим себе. Следовательно, логарифмический ряд имеет вид $a(x)=1+xb(x^2)$. Как видно из матрицы ${}_{0,3}P$, мономы x^{3n+2}, и только они, являются делителями нуля по отношению друг к другу и к самим себе. Следовательно, логарифмический ряд имеет вид $a(x)=1+x^2b(x^3)$. Как видно из матрицы

$$
{}_{0,4}P=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&0&1&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&1&1&0&0&\cdot\\
1&1&1&0&1&1&1&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&1&1&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix},
$$

мономы x^{4n+2}, x^{4n+3} и только они, являются делителями нуля по отношению друг к другу и к самим себе. Следовательно, логарифмический ряд имеет вид $a(x)=1+x^2b_1(x^4)+x^3b_2(x^4)$. В общем, для алгебры, связанной с матрицей ${}_{0,q}P$, логарифмический ряд имеет вид

$$
a(x)=1+\sum_{m=1}^{[q/2]}x^{q-m}b_{[q/2]-m+1}(x^q),
$$

где $[q/2]$ – целая часть от $q/2$. Очевидно, что алгебра, связанная с произведением Адамара матриц ${}_{0,q}P$, содержит все группы логарифмических рядов алгебр, связанных с сомножителями. Например, в алгебре, связанной с матрицей

$$
{}_{0,2}P\times{}_{0,4}P=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&0&1&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&1&1&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&1&0&1&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&1&1&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix},
$$

логарифмические ряды образуют две группы рядов вида $1+xb(x^2)$ и $1+x^2b_1(x^4)+x^3b_2(x^4)$ с общим рядом вида $1+x^3b(x^4)$. В алгебре, связанной с матрицей

$$
{}_{0,2}P \times {}_{0,3}P \times {}_{0,4}P \times \ \dots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}
$$

логарифмическими рядами являются все ряды с $a_0 = 1$.

3. Треугольник Паскаля по модулю 2

Рассмотрим матрицу

$$
{}_{[2,2]}P = {}_{2,2}P \times {}_{2,2^2}P \times {}_{2,2^3}P \times \ldots \times {}_{2,2^k}P \times \ldots
$$

$$
{}_{[2,2]}P = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 4 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 8 & 4 & 8 & 2 & 8 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 2 & 1 & 8 & 2 & 4 & 2 & 8 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 4 & 2 & 4 & 1 & 8 & 4 & 8 & 1 & 4 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 8 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}.
$$

Первый столбец матрицы ${}_{[2,2]}P$, обозначим его $b(x)$, является произведением Адамара рядов ${}_{2,2^k}b(x)$, $k = 1,\ 2\ , \dots$,

$$
\left[x^n\right]{}_{2,2^k}b(x) = 1,\ n\left(\bmod 2^k\right) \neq 0;\ = 2,\ n\left(\bmod 2^k\right) = 0.
$$

Это производящая функция распределения делителей 2^k в ряду натуральных чисел:

$$
b(x) = x + 2x^2 + x^3 + 4x^4 + x^5 + 2x^6 + x^7 + 8x^8 + x^9 + 2x^{10} + x^{11} + 4x^{12} +
$$

$$+x^{13}+2x^{14}+x^{15}+16x^{16}+x^{17}+2x^{18}+x^{19}+4x^{20}+x^{21}+2x^{22}+x^{23}+\dots$$

Она имеет фрактальную структуру:

$$b_{2^k n}=2^k b_n\,,\ b_{2n+1}=1,\ b_{2^k n+i}=b_i\,,\ 0<i<2^k\,.$$

Обозначим $[n,m]_{[2,2]}P=\binom{n}{m}_{2,2}$. Из равенств

$$\binom{n}{m}_{2,2}=\frac{b_n\,!}{b_m\,!b_{n-m}\,!},$$

$$b_{2n}\,!=2^n b_n\,!,\ b_{2n+1}\,!=b_{2n}\,!,\ b_{2n-1}\,!=b_{2(n-1)}\,!$$

вытекает

$$\binom{2n+1}{2m+1}_{2,2}=\binom{2n+1}{2m}_{2,2}=\binom{2n}{2m}_{2,2}=\binom{n}{m}_{2,2},$$

$$\binom{2n}{2m+1}_{2,2}=2b_n\binom{n-1}{m}_{2,2}=2b_{m+1}\binom{n}{m+1}_{2,2}.$$

Это означает, что строки и столбцы матрицы ${}_{[2,2]}P$, обозначим их $u_n(x)$ и $g_n(x)$, образуют рекуррентные последовательности:

$$u_{2n}(x)=u_n(x^2)+2b_n x u_{n-1}(x^2),\quad u_{2n+1}(x)=(1+x)u_n(x^2);$$

$$g_{2n}(x)=(1+x)g_n(x^2),\quad g_{2n+1}(x)=xg_n(x^2)+2b_{n+1}g_{n+1}(x^2).$$

Блочную матрицу, (n,m)- блоком которой является матрица, состоящая из 2^k первых строк матрицы ${}_{[2,2]}P$, умноженная на $\binom{n}{m}_{2,2}$, обозначим ${}_{[2,2]}P_{2^k}$. Например,

$$
{}_{[2,2]}P_2 = \begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&2&0&1&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&2&2&1&1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&4&0&2&0&4&0&1&0&0&0&\cdot\\
1&1&4&4&2&2&4&4&1&1&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&2&0&2&0&1&0&1&0&\cdot\\
1&1&1&1&2&2&2&2&1&1&1&1&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix},\quad
{}_{[2,2]}P_4 = \begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&2&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&2&1&0&1&2&1&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&0&2&0&0&0&1&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&2&2&0&0&1&1&0&0&\cdot\\
1&2&1&0&2&4&2&0&1&2&1&0&\cdot\\
1&1&1&1&2&2&2&2&1&1&1&1&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix}.
$$

Из равенства $b_{2^k n+i}! = b_{2^k n}! b_i!$, $0 \le i < 2^k$, вытекает равенство

$$
\binom{2^k n + i}{2^k m + j}_2 = \binom{n}{m}_2 \binom{i}{j}_2,\ i \ge j .
$$

Таким образом, матрица ${}_{[2,2]}P$ является фракталом в том смысле, что

$$
{}_{[2,2]}P \times {}_{0,2^k}P = {}_{[2,2]}P_{2^k} .
$$

Рассмотрим теперь матрицу

$$
{}_{[0,2]}P = {}_{0,2}P \times {}_{0,2^2}P \times {}_{0,2^3}P \times \ldots \times {}_{0,2^k}P \times \ldots
$$

$$
{}_{[0,2]}P = \begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix}.
$$

Обозначим $\left[n,m\right]_{[0,2]}P=\binom{n}{m}_{0,2}$. Из определения матрицы ${}_{[0,2]}P$ как произведения Адамара матриц ${}_{0,2^k}P$ вытекает, что если при каком-нибудь значении k выполняется равенство $n\left(\operatorname{mod}2^k\right)<m\left(\operatorname{mod}2^k\right)$, то $\binom{n}{m}_{0,2}=0$. Представим числа n, m в виде $n=\sum_{i=0}^{\infty}n_i2^i$, $m=\sum_{i=0}^{\infty}m_i2^i$, $0\le n_i,m_i<2$. Тогда

$$n\left(\operatorname{mod}2^k\right)=\sum_{i=0}^{k-1}n_i2^i,\ m\left(\operatorname{mod}2^k\right)=\sum_{i=0}^{k-1}m_i2^i.$$

Если $n\left(\operatorname{mod}2^k\right)<m\left(\operatorname{mod}2^k\right)$, то хотя бы при одном значении i будет $n_i<m_i$. По теореме Люка, если q – простое число, то

$$\binom{n}{m}\equiv\binom{n_0}{m_0}\binom{n_1}{m_1}\dots\binom{n_s}{m_s}(\operatorname{mod}q),$$

где $n_s\ne0$, n_i, m_i – цифры в q-ичном представлении чисел n, m. Если $n_i<m_i$, то $\binom{n_i}{m_i}=0$, $\binom{n}{m}$ делится на q. Таким образом,

$$\binom{n}{m}_{0,2}=\binom{n}{m}(\operatorname{mod}2).$$

Из равенства

$${}_{[0,2]}P={}_{[0,2]}P\times{}_{[2,2]}P$$

вытекает, что если $\binom{2^kn+i}{2^km+j}_{0,2}=1$, то $\binom{n}{m}_{0,2}\binom{i}{j}_{0,2}=1$, если $\binom{2^kn+i}{2^km+j}_{0,2}=0$, то $\binom{n}{m}_{0,2}\binom{i}{j}_{0,2}=0$. Таким образом,

$$\binom{2^kn+i}{2^km+j}_{0,2}=\binom{n}{m}_{0,2}\binom{i}{j}_{0,2},0\le i,j<2^k.$$

Блочную матрицу, (n,m)- блоком которой является матрица, состоящая из 2^k первых строк матрицы ${}_{[0,2]}P$, умноженная на $\binom{n}{m}_{0,2}$, обозначим ${}_{[0,2]}P_{2^k}$. Тогда

$$ {}_{[0,2]}P = {}_{[0,2]}P_{2^k}. $$

Строки и столбцы матрицы ${}_{[0,2]}P$, обозначим их $u_n(x)$ и $g_n(x)$, образуют рекуррентные последовательности:

$$ u_0(x)=1,\ u_{2^k n}(x)=u_n\left(x^{2^k}\right),\ u_{2^k n+1}(x)=(1+x)u_n\left(x^{2^k}\right), $$

$$ g_0(x)=\frac{1}{1-x},\ g_{2^k n}(x)=(1+x)g_n\left(x^{2^k}\right),\ g_{2^k n+1}(x)=xg_n\left(x^{2^k}\right), $$

$k=1,\ 2,\ \ldots$ Обозначим

$$ U(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)t^n,\ G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)t^n. $$

Тогда

$$ U(x,t)=1+(1+x)t+\left(1+x^2\right)t^2+(1+x)\left(1+x^2\right)t^3+\left(1+x^4\right)t^4+ $$

$$ +(1+x)\left(1+x^4\right)t^5+\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)t^6+(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)t^7+\ldots= $$

$$ =\left(\sum_{n=0}^{2^k-1}u_n(x)t^n\right)U\left(x^{2^k},t^{2^k}\right), $$

например,

$$ U(x,t)=(1+(1+x)t)\left(1+\left(1+x^2\right)t^2+\left(1+x^4\right)t^4+\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)t^6+\ldots\right)= $$

$$ =\left(1+(1+x)t+\left(1+x^2\right)t^2+(1+x)\left(1+x^2\right)t^3\right)\times $$

$$ \times\left(1+\left(1+x^4\right)t^4+\left(1+x^8\right)t^8+\left(1+x^4\right)\left(1+x^8\right)t^{12}+\ldots\right); $$

$$ G(x,t)=\frac{1}{1-x}+\frac{xt}{1-x^2}+\frac{(1+x)x^2t^2}{1-x^4}+\frac{x^3t^3}{1-x^4}+\frac{(1+x)\left(1+x^2\right)x^4t^4}{1-x^8}+ $$

$$ +\frac{\left(1+x^2\right)x^5t^5}{1-x^8}+\frac{(1+x)x^6t^6}{1-x^8}+\frac{x^7t^7}{1-x^8}+\frac{(1+x)\left(1+x^2\right)\left(1+x^4\right)x^8t^8}{1-x^{16}}+\ldots= $$

$$ =\left(\sum_{n=0}^{2^k-1}u_{2^k-1-n}(x)x^nt^n\right)G\left(x^{2^k},t^{2^k}\right), $$

например,

$$G(x,t)=((1+x)+xt)\left(\frac{1}{1-x^2}+\frac{x^2t^2}{1-x^4}+\frac{\left(1+x^2\right)x^4t^4}{1-x^8}+\frac{x^6t^6}{1-x^8}+\ldots\right)=$$

$$=\left((1+x)\left(1+x^2\right)+\left(1+x^2\right)xt+(1+x)x^2t^2+x^3t^3\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{1-x^4}+\frac{x^4t^4}{1-x^8}+\frac{\left(1+x^4\right)x^8t^8}{1-x^{16}}+\ldots\right).$$

Конечную матрицу, состоящую из 2^k первых строк матрицы $\left(b(x),x\,|_{[0,2]}P\right)$ обозначим $\left(b(x),x\,|_{[0,2]}P\right)_{2^k}$. Блочную матрицу, (n,m)-м блоком которой является матрица

$$a_{n-m}\binom{n}{m}_{0,2}\left(b(x),x\,|_{[0,2]}P\right)_{2^k},$$

обозначим $(a(x)\,|\,b(x))_{2^k}$. Например,

$$(a(x)\,|\,b(x))_2=\begin{pmatrix}
a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
a_1b_0 & 0 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
a_1b_1 & a_1b_0 & a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
a_2b_0 & 0 & 0 & 0 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
a_2b_1 & a_2b_0 & 0 & 0 & a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & \cdot\\
a_3b_0 & 0 & a_2b_0 & 0 & a_1b_0 & 0 & a_0b_0 & 0 & \cdot\\
a_3b_1 & a_3b_0 & a_2b_1 & a_2b_0 & a_1b_1 & a_1b_0 & a_0b_1 & a_0b_0 & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix},$$

$$(a(x)\,|\,b(x))_4=\begin{pmatrix}
a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
a_0b_2 & 0 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
a_0b_3 & a_0b_2 & a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
a_1b_0 & 0 & 0 & 0 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
a_1b_1 & a_1b_0 & 0 & 0 & a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & \cdot\\
a_1b_2 & 0 & a_1b_0 & 0 & a_0b_2 & 0 & a_0b_0 & 0 & \cdot\\
a_1b_3 & a_1b_2 & a_1b_1 & a_1b_0 & a_0b_3 & a_0b_2 & a_0b_1 & a_0b_0 & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left(a(x) \mid b(x)\right)_{2^k} = \left(\left(\sum_{n=0}^{2^k-1} b_n x^n \right) a\left(x^{2^k}\right), x \mid {}_{[0,2]}P \right),$$

$$\left(a(x) \mid b(x)\right)_{2^k} \left(g(x) \mid c(x)\right)_{2^k} = \left(a(x) \circ g(x) \mid b(x) \circ c(x)\right)_{2^k},$$

где

$$a(x) \circ g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m}_{0,2} a_m g_{n-m} .$$

Матрица ${}_{[0,2]}P$ является фракталом в том смысле, что

$${}_{[0,2]}P = \left(\frac{1}{1-x} \mid \frac{1}{1-x} \right)_{2^k}, \; k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots$$

При фиксированном k матрицы $\left(a(x) \mid b(x)\right)_{2^k}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, образуют группу. Таким образом, матрица ${}_{[0,2]}P$ входит в каждую из этих групп. Степень матрицы ${}_{[0,2]}P$ также является фракталом:

$${}_{[0,2]}P^{\varphi} = \left(\left(\frac{1}{1-x} \right)^{(\varphi)} \mid \left(\frac{1}{1-x} \right)^{(\varphi)} \right)_{2^k},$$

например,

$${}_{[0,2]}P^2 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
4 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
8 & 4 & 4 & 2 & 4 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
8 & 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
4 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
8 & 4 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
8 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\
16 & 8 & 8 & 4 & 8 & 4 & 4 & 2 & 8 & 4 & 4 & 2 & 4 & 2 & 2 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix},$$

так что

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(\varphi)}=b(x)=\left(\sum_{n=0}^{2^k-1}b_nx^n\right)b\left(x^{2^k}\right)=\prod_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{2^k-1}b_nx^{2^{mk}n}\right),$$

$$b_0=1,\ b_{2^kn}=b_n,\ b_{2^kn+1}=\varphi b_n,\ k=1,\,2,\,\dots,$$

$$b(x)=1+\varphi x+\varphi x^2+\varphi^2x^3+\varphi x^4+\varphi^2x^5+\varphi^2x^6+\varphi^3x^7+\varphi x^8+\varphi^2x^9+\dots$$

Обозначим

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(\varphi)}=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi^{|n|}x^n,$$

где $|n|=\log_\varphi b_n$. Тогда

$$(\varphi+\beta)^{|n|}=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}_{0,2}\varphi^{|m|}\beta^{|n-m|}.$$

Найдем $\log\circ(1-x)^{-1}$:

$$x\left(\log\circ(1-x)^{-1}\right)'={}_{[0,2]}P^{-1}x(1-x)^{-2},$$

$$_{[0,2]}P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\cdot\\-1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\cdot\\-1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\cdot\\1&-1&-1&1&0&0&0&0&0&0&0\cdot\\-1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\cdot\\1&-1&0&0&-1&1&0&0&0&0&0\cdot\\1&0&-1&0&-1&0&1&0&0&0&0\cdot\\-1&1&1&-1&1&-1&-1&1&0&0&0\cdot\\-1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\cdot\\1&-1&0&0&0&0&0&0&-1&1&0\cdot\\1&0&-1&0&0&0&0&0&-1&0&1\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Строки матрицы ${}_{[0,2]}P^{-1}$, обозначим их $u_n(x)$, связаны рекуррентным отношением

$$u_0(x)=1,\ u_{2^kn}(x)=u_n\left(x^{2^k}\right),\ u_{2^kn+1}(x)=(x-1)u_n\left(x^{2^k}\right).$$

Так как

$$u_{2^k}(x)=x^{2^k}-1,$$

а в остальных случаях полиномы $u_n(x)$ содержат более чем один множитель вида $x^m - 1$, то

$$ {}_{[0,2]}P^{-1}x(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2^n}, \quad \log\circ(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n}. $$

Интересно, что ряд $\frac{1}{x}\log\circ(1-x)^{-1}$ является логарифмическим рядом, т.е. имеет вид $a(x) = 1 + \log\circ a(x)$. Эта же деталь присутствует и в алгебре, связанной с матрицей ${}_{0,2}P$.

4. Нулевые фрактальные обобщенные матрицы Паскаля

Обобщением матрицы ${}_{[0,2]}P$ является матрица

$$ {}_{[0,q]}P = {}_{0,q}P \times {}_{0,q^2}P \times {}_{0,q^3}P \times \ldots \times {}_{0,q^k}P \times \ldots $$

Например,

$$ {}_{[0,3]}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. $$

Обозначим $[n,m]\,{}_{[0,q]}P = \binom{n}{m}_{0,q}$. Если q – простое число, элементы матрицы ${}_{[0,q]}P$ можно рассматривать как функцию биномиальных коэффициентов:

$$\binom{n}{m}_{0,q}=1, \text{ если } \binom{n}{m}(\operatorname{mod} q)\neq 0;\ =0, \text{ если } \binom{n}{m}(\operatorname{mod} q)=0.$$

Из равенства

$$_{[0,q]}P={}_{[0,q]}P\times{}_{[q,q]}P$$

вытекает, что

$$\binom{q^k n+i}{q^k m+j}_{0,q}=\binom{n}{m}_{0,q}\binom{i}{j}_{0,q}, 0\le i,j<q^k,$$

$$_{[0,q]}P={}_{[0,q]}P_{q^k}.$$

Блочную матрицу, (n,m)-м блоком которой является матрица

$$a_{n-m}\binom{n}{m}_{0,q}\left(b(x),x\,|\,{}_{[0,q]}P\right)_{q^k},$$

обозначим $(a(x)\,|\,b(x))_{q^k}$. Тогда

$$(a(x)\,|\,b(x))_{q^k}=\left(\left(\sum_{m=0}^{q^k-1}b_m x^m\right)a\left(x^{q^k}\right),x\,|\,{}_{[0,q]}P\right),$$

$$(a(x)\,|\,b(x))_{q^k}(g(x)\,|\,c(x))_{q^k}=(a(x)\circ g(x)\,|\,b(x)\circ c(x))_{q^k},$$

$$_{[0,q]}P^{\varphi}=\left(\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(\varphi)}\,|\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(\varphi)}\right)_{q^k},$$

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(\varphi)}=b(x)=\left(\sum_{n=0}^{q^k-1}b_n x^n\right)b\left(x^{q^k}\right)=\prod_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{q^k-1}b_n x^{q^{mk}n}\right).$$

Так как q первых строк матриц $_{[0,q]}P^{\varphi}$ и $\left((1-x)^{-\varphi},x\right)$ совпадают, то

$$b_0=1,\ b_{q^k n+m}=\binom{\varphi+m-1}{m}b_n,$$

$k=1,\ 2,\ \dots\ ,\ 0\le m<q$. Строки и столбцы матрицы $_{[0,q]}P^{\varphi}$ обозначим соответственно $u_n(x)$ и $g_n(x)$. Тогда

$$u_0(x)=1,\ u_{q^k n+m}(x)=\tilde{w}_m(\varphi,x)u_n\left(x^{q^k}\right),$$

$$g_0(x)=\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(\varphi)},\quad g_{q^k n+m}(x)=w_{q-1-m}(\varphi,x)x^m g_n\left(x^{q^k}\right).$$

Применив равенства

$$\left[q^k n+m,\rightarrow\right]_{[0,q]}P^{-1}=\tilde{w}_m(-1,x)u_n\left(x^{q^k}\right),$$

$$\tilde{w}_0(-1,x)=1,\ \tilde{w}_m(-1,x)=x^{m-1}(x-1),$$

находим

$$_{[0,q]}P^{-1}x(1-x)^{-2}=\sum_{m=1}^{q-1}x^m+\sum_{m=1}^{q-1}qx^{qm}+\sum_{m=2}^{\infty}q^m x^{q^m},$$

$$\log\circ(1-x)^{-1}=\sum_{m=1}^{q-1}\frac{x^m}{m}+\sum_{m=1}^{q-1}\frac{x^{qm}}{m}+\sum_{m=2}^{\infty}x^{q^m}.$$

[1] W, Wang, T. Wang, Generalized Riordan arrays, Discrete Math., 308 (2008) 6466-6500.
[2] H. W. Gould, T. X. He, Characterization of (c)-Riordan arrays, Gegenbauer-Humbert-type polynomial sequences, and (c)-Bell polynomials, J. Math. Res. Appl., 33 (5) (2013) 505-52.
[3] G. Fontene, Generalization d'une formule connue, Nouv. ann. math., 1915, 15 (4), p. 112.