ФРАКТАЛЬНЫЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ

Е. В. Бурлаченко

Множество обобщенных матриц Паскаля рассматривается как целостный объект. Матрица Паскаля (треугольник Паскаля) раскладывается в произведение Адамара матриц, элементами которых являются обобщенные биномиальные коэффициенты, равные по величине p^k, где p – фиксированное простое число, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$. Эти матрицы имеют ярко выраженную фрактальную структуру, из которой вытекают основные свойства распределения простых делителей в треугольнике Паскаля.

1. Обобщенные матрицы Паскаля

Рассмотрим следующее обобщение биномиальных коэффициентов [1]. Для коэффициентов формального степенного ряда $b(x)$, $b_0 = 0$; $b_n \neq 0$, $n > 0$, обозначим

$$b_0! = 1,\ \ b_n! = \prod_{m=1}^{n} b_m\,,\ \ \binom{n}{m}_b = \frac{b_n!}{b_m!\,b_{n-m}!};\ \ \binom{n}{m}_b = 0,\ \ m > n.$$

Тогда

$$\binom{n}{m}_b = \binom{n-1}{m-1}_b + \frac{b_n - b_m}{b_{n-m}}\binom{n-1}{m}_b.$$

n-й коэффициент ряда $a(x)$, (n,m)-й элемент матрицы A будем обозначать соответственно $[x^n]a(x)$, $[n,m]A$. Строкам и столбцам матриц поставим в соответствие производящие функции их элементов. Для элементов нижних треугольных матриц будем иметь в виду, что $(n,m) = 0$, если $n < m$.

Рассмотрим матрицу

$$P_{c(x)}=\begin{pmatrix} \frac{c_0c_0}{c_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{c_0c_1}{c_1} & \frac{c_1c_0}{c_1} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{c_0c_2}{c_2} & \frac{c_1c_1}{c_2} & \frac{c_2c_0}{c_2} & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{c_0c_3}{c_3} & \frac{c_1c_2}{c_3} & \frac{c_2c_1}{c_3} & \frac{c_3c_0}{c_3} & 0 & \cdot \\ \frac{c_0c_4}{c_4} & \frac{c_1c_3}{c_4} & \frac{c_2c_2}{c_4} & \frac{c_3c_1}{c_4} & \frac{c_4c_0}{c_4} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

$$[n,m]P_{c(x)}=\frac{c_m c_{n-m}}{c_n},\ c_n\in\mathbb{R},\ c_n\neq 0,\ c_0=1,\ c_1=1.$$

Первый столбец матрицы $P_{c(x)}$ обозначим $b(x)$. Тогда

$$c_n=(b_n!)^{-1}\ ,\quad [n,m]P_{c(x)}=\binom{n}{m}_b .$$

Матрицу $P_{c(x)}$ назовем обобщенной матрицей Паскаля. При $c(x)=e^x$ она превращается в матрицу Паскаля

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $P_{c(x)}$, – обозначим их для общности, о которой речь пойдет ниже, (n,m), – удовлетворяют равенствам

$$(n,m)(m,0)=(n,n-m)(n-m,0), \tag{1}$$

$$\begin{gathered}(n+q,q)(n+p,m+p)(m+p,p)=\\ =(n+p,p)(n+q,m+q)(m+q,q),\end{gathered} \tag{2}$$

q, $p = 0, 1, 2, \ldots$. Это означает, что с каждой матрицей $P_{c(x)}$ можно связать алгебру формальных степенных рядов, элементы которой умножаются по правилу

$$a(x) \circ b(x) = b(x) \circ a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{m=0}^{n} (n,m)\, a_m b_{n-m}.$$

Множество обобщенных матриц Паскаля является группой относительно умножения Адамара:

$$P_{c(x)} \times P_{g(x)} = P_{c(x)\times g(x)},\ \ c(x)\times g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n g_n x^n .$$

Введем систему матриц

$${}_{\varphi,q}P = {}_{q}P(\varphi) = P_{c(\varphi,q,x)},\ \ c(\varphi,q,x) = \left(\sum_{m=0}^{q-1} x^m\right)\left(1 - \frac{x^q}{\varphi}\right)^{-1},\ q > 1.$$

Тогда

$$c_{qn+i} = \frac{1}{\varphi^n},\ 0 \le i < q;\ \ c_{qn-i} = \frac{1}{\varphi^{n-1}},\ 0 < i \le q,$$

$$\frac{c_{qm+j}c_{q(n-m)+i-j}}{c_{qn+i}} = \frac{\varphi^n}{\varphi^m \varphi^{n-m}} = 1,\ i \ge j;\ = \frac{\varphi^n}{\varphi^m \varphi^{n-m-1}} = \varphi,\ i < j,$$

или

$$[n,m]\,{}_{\varphi,q}P = 1,\ n(\operatorname{mod} q) \ge m(\operatorname{mod} q);\ = \varphi,\ n(\operatorname{mod} q) < m(\operatorname{mod} q).$$

Например,

$${}_{\varphi,2}P = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & \varphi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\
1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix},\ \ {}_{\varphi,3}P = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & \varphi & \varphi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & \varphi & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & \varphi & \varphi & 1 & \varphi & \varphi & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & \varphi & 1 & 1 & \varphi & 1 & 1 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы ${}_{\varphi,q}P \times P_{c(x)}$ удовлетворяют равенствам (1), (2) при любых значениях φ, поэтому имеет смысл рассматривать и случай $\varphi = 0$, так как ему соответствует определенная алгебра формальных степенных рядов. Ясно, что в этом случае ряд $c(\varphi, q, x)$ не определен. Матрицу ${}_{0,q}P \times P_{c(x)}$, а также произведение Адамара подобных матриц, назовем нулевой обобщенной матрицей Паскаля.

Каждая обобщенная матрица Паскаля раскладывается в произведение Адамара матриц ${}_{\varphi,q}P$. Разложение сводится к разложению первого столбца матрицы $P_{c(x)}$, обозначим его $b(x)$, в произведение Адамара первых столбцов матриц ${}_{\varphi,q}P$, обозначим их ${}_{\varphi,q}b(x)$:

$$\left[x^n\right]{}_{\varphi,q}b(x) = 1,\ n(\mathrm{mod}\,q) \neq 0;\ = \varphi,\ n(\mathrm{mod}\,q) = 0,$$

так что

$$P_{c(x)} = {}_2P(b_2) \times {}_3P(b_3) \times {}_4P(b_4/b_2) \times {}_5P(b_5) \times {}_6P(b_6/b_2b_3) \times {}_7P(b_7) \times$$

$$\times {}_8P(b_8/b_4) \times {}_9P(b_9/b_3) \times {}_{10}P(b_{10}/b_2b_5) \times {}_{11}P(b_{11}) \times {}_{12}P(b_{12}b_2/b_4b_6) \times \ldots$$

и т.д. Множеству матриц ${}_{\varphi,q}P$ поставим в соответствие множество одномерных векторных подпространств $e_q \log|\varphi|$, где e_q – базисный вектор, $\log|\varphi|$ – координаты натянутых на него векторов. (Это отображение является групповым гомоморфизмом, ядро которого состоит из всех инволюций группы обобщенных матриц Паскаля, т.е. из матриц, ненулевые элементы которых равны ± 1). Тогда множество обобщенных матриц Паскаля, элементами которых являются неотрицательные числа, отождествится с бесконечномерным векторным пространством. Нулевые матрицы можно рассматривать как бесконечно удаленные точки пространства.

2. Фрактальные обобщенные матрицы Паскаля

Матрицы, о которых пойдет речь, рассматривались в [2], но без учета того, что они являются обобщенными матрицами Паскаля. В [3] эти матрицы вводятся как обобщение матрицы Паскаля в связи с теоремами о делимости биномиальных коэффициентов, что не очень удачно, так как в данном случае эти матрицы не столько обобщают, сколько определяют матрицу Паскаля, являясь ее составляющими. Мы рассмотрим их с более конструктивной точки зрения. Начнем с матрицы

$$ {}_{[2]}P = {}_{2,2}P \times {}_{2,2^2}P \times {}_{2,2^3}P \times \ldots \times {}_{2,2^k}P \times \ldots $$

$$ {}_{[2]}P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 8 & 4 & 8 & 2 & 8 & 4 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 2 & 1 & 8 & 2 & 4 & 2 & 8 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 1 & 8 & 4 & 8 & 1 & 4 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 4 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 8 & 1 & 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}. $$

Первый столбец матрицы ${}_{[2]}P$, обозначим его $b(x)$, является произведением Адамара рядов ${}_{2,2^k}b(x)$, $k=1,\ 2\ ,\ \ldots$,

$$ \left[x^n\right]{}_{2,2^k}b(x) = 1,\ n\left(\bmod 2^k\right) \neq 0;\ = 2,\ n\left(\bmod 2^k\right) = 0. $$

Это производящая функция распределения делителей 2^k в ряду натуральных чисел:

$$ b(x) = x + 2x^2 + x^3 + 4x^4 + x^5 + 2x^6 + x^7 + 8x^8 + x^9 + 2x^{10} + x^{11} + 4x^{12} + $$

$$ + x^{13} + 2x^{14} + x^{15} + 16x^{16} + x^{17} + 2x^{18} + x^{19} + 4x^{20} + x^{21} + 2x^{22} + x^{23} + \ldots $$

Она имеет фрактальную структуру:

$$ b_{2^k n} = 2^k b_n,\ \ b_{2n+1} = 1,\ \ b_{2^k n+i} = b_i,\ 0 < i < 2^k, $$

$$ b(x) = \frac{x}{1-x^2} + 2b\left(x^2\right) = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{2^n x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} + 2^k b\left(x^{2^k}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}. $$

Ряд $c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{b_n!}$ также является фракталом:

$$c(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{2^3}+\frac{x^5}{2^3}+\frac{x^6}{2^4}+\frac{x^7}{2^4}+\frac{x^8}{2^7}+\frac{x^9}{2^7}+\frac{x^{10}}{2^8}+\frac{x^{11}}{2^8}+$$

$$+\frac{x^{12}}{2^{10}}+\frac{x^{13}}{2^{10}}+\frac{x^{14}}{2^{11}}+\frac{x^{15}}{2^{11}}+\frac{x^{16}}{2^{15}}+\frac{x^{17}}{2^{15}}+\frac{x^{18}}{2^{16}}+\frac{x^{19}}{2^{16}}+\frac{x^{20}}{2^{18}}+\frac{x^{21}}{2^{18}}+\ldots,$$

$$c_{2n}=c_{2n+1}=\frac{c_n}{2^n},$$

$$c(x)=(1+x)c\left(\frac{x^2}{2}\right)=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{x^{2^n}}{2^{2^n-1}}\right).$$

Обозначим $[n,m]_{[2]}P=\binom{n}{m}_2$. Из равенств

$$\binom{n}{m}_2=\frac{b_n!}{b_m!b_{n-m}!},$$

$$b_{2n}!=2^n b_n!,\ \ b_{2n+1}!=b_{2n}!,\ \ b_{2n-1}!=b_{2(n-1)}!$$

вытекает

$$\binom{2n+1}{2m+1}_2=\binom{2n+1}{2m}_2=\binom{2n}{2m}_2=\binom{n}{m}_2,$$

$$\binom{2n}{2m+1}_2=2b_n\binom{n-1}{m}_2=2b_{m+1}\binom{n}{m+1}_2.$$

Это означает, что строки и столбцы матрицы ${}_{[2]}P$, обозначим их $u_n(x)$ и $g_n(x)$, образуют рекуррентные последовательности:

$$u_{2n}(x)=u_n\left(x^2\right)+2b_n x u_{n-1}\left(x^2\right),\quad u_{2n+1}(x)=(1+x)u_n\left(x^2\right);$$

$$g_{2n}(x)=(1+x)g_n\left(x^2\right),\quad g_{2n+1}(x)=xg_n\left(x^2\right)+2b_{n+1}g_{n+1}\left(x^2\right).$$

Блочную матрицу, (n,m)- блоком которой является матрица, состоящая из 2^k первых строк матрицы ${}_{[2]}P$, умноженная на $\binom{n}{m}_2$, обозначим ${}_{[2]}P_{2^k}$. Например,

$$
{}_{[2]}P_2 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 4 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}, \quad
{}_{[2]}P_4 = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}
$$

Из равенства $b_{2^k n+i}! = b_{2^k n}! b_i!$, $0 \le i < 2^k$, вытекает равенство

$$\binom{2^k n + i}{2^k m + j}_2 = \binom{n}{m}_2 \binom{i}{j}_2, \; i \ge j .$$

Таким образом, матрица ${}_{[2]}P$ является фракталом в том смысле, что

$${}_{[2]}P \times {}_{0,2^k} P = {}_{[2]}P_{2^k} .$$

Если $i < j$, преобразуем числитель и знаменатель обобщенного биномиального коэффициента $\binom{2^k n + i}{2^k m + j}_2$ следующим образом:

$$b_{2^k n+i}! = b_{2^k n}! b_i! = b_{2^k n} b_{2^k n-1}! b_i! = 2^k b_n b_{2^k (n-1)+2^k-1}! b_i! =$$

$$= b_{2^k} b_n b_{2^k (n-1)}! b_{2^k-1}! b_i! = b_n b_{2^k (n-1)}! b_{2^k+i}!,$$

где мы воспользовались равенствами $b_{2^k n-i}! = b_{2^k (n-1)+2^k-i}!$, $0 < i \le 2^k$, и $2^k = b_{2^k}$. Для знаменателя:

$$b_{2^k m+j}! b_{2^k (n-m)+i-j}! = b_{2^k m}! b_j! b_{2^k (n-m-1)+2^k+i-j}! = b_{2^k m}! b_j! b_{2^k (n-m-1)}! b_{2^k+i-j}!,$$

или, с учетом равенства $b_{2^k (m+1)}! = b_{2^k m}! b_{2^k-1}! b_{2^k (m+1)} = b_{2^k m}! b_{2^k}! b_{m+1}$,

$$b_{2^k m+j}! b_{2^k (n-m)+i-j}! = \left(b_{m+1} b_{2^k}!\right)^{-1} b_{2^k (m+1)}! b_j! b_{2^k (n-m-1)}! b_{2^k+i-j}!.$$

Таким образом,

$$\binom{2^k n+i}{2^k m+j}_2 = b_n \binom{n-1}{m}_2 \binom{2^k+i}{j}_2 = b_{m+1} \binom{n}{m+1}_2 \binom{2^k+i}{j}_2,$$

$$0 \le i < 2^k,\ i < j.$$

Для наглядности рассмотрим эти элементы как не равные нулю элементы матрицы ${}_{[2]}P - {}_{[2]}P_{2^k}$. Они располагаются в ней, если $k>1$, треугольными сегментами. Например,

$${}_{[2]}P - {}_{[2]}P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 4 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 8 & 4 & 8 & 0 & 8 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Сегмент, образованный элементами

$$\begin{matrix} \binom{2^k n}{2^k m+1}_2 & \cdots & \binom{2^k n}{2^k m+2^k-1}_2 \\ & & \cdots \\ & & \binom{2^k n+2^k-2}{2^k m+2^k-1}_2 \end{matrix}$$

обозначим $\nabla_{n,m}$. Тогда

$$\nabla_{n,m} = b_n \binom{n-1}{m}_2 \nabla_{1,0} = b_{m+1} \binom{n}{m+1}_2 \nabla_{1,0}.$$

Переходя к обобщению, рассмотрим матрицу

$${}_{[3]}P = {}_{3,3}P \times {}_{3,3^2}P \times {}_{3,3^3}P \times \ldots \times {}_{3,3^k}P \times \ldots,$$

$$
{}_{[3]}P=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&3&3&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&3&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&3&3&1&3&3&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&3&1&1&3&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&9&9&3&9&9&3&9&9&1&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&9&3&3&9&3&3&9&1&1&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&3&3&3&3&3&3&1&1&1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&3&3&1&9&9&3&9&9&1&3&3&1&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&3&1&1&9&3&3&9&1&1&3&1&1&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&3&3&3&1&1&1&1&1&1&0&0&0&\cdot\\
1&3&3&1&3&3&1&9&9&1&3&3&1&3&3&1&1&0&\cdot\\
1&1&3&1&1&3&1&1&9&1&1&3&1&1&3&1&1&1&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix}.
$$

Первый столбец матрицы ${}_{[3]}P$ – производящая функция распределения делителей 3^k в ряду натуральных чисел:

$$
b(x)=x+x^2+3x^3+x^4+x^5+3x^6+x^7+x^8+9x^9+x^{10}+x^{11}+3x^{12}+
$$

$$
+x^{13}+x^{14}+3x^{15}+x^{16}+x^{17}+9x^{18}+x^{19}+x^{20}+3x^{21}+x^{22}+x^{23}+\dots,
$$

$$
b_{3^k n}=3^k b_n,\ b_{3n+1}=b_{3n+2}=1,\ b_{3^k n+i}=b_i,\ 0<i<3^k,
$$

$$
b(x)=\frac{(1+x)x}{1-x^3}+3b\left(x^3\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1+x^{3^n}\right)3^n x^{3^n}}{1-x^{3^{n+1}}},
$$

$$
c(x)=1+x+x^2+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{3}+\frac{x^5}{3}+\frac{x^6}{3^2}+\frac{x^7}{3^2}+\frac{x^8}{3^2}+\frac{x^9}{3^4}+\frac{x^{10}}{3^4}+\frac{x^{11}}{3^4}+
$$

$$
+\frac{x^{12}}{3^5}+\frac{x^{13}}{3^5}+\frac{x^{14}}{3^5}+\frac{x^{15}}{3^6}+\frac{x^{16}}{3^6}+\frac{x^{17}}{3^6}+\frac{x^{18}}{3^8}+\frac{x^{19}}{3^8}+\frac{x^{20}}{3^8}+\frac{x^{21}}{3^9}+\frac{x^{22}}{3^9}+\dots,
$$

$$
c_{3n}=c_{3n+1}=c_{3n+2}=\frac{c_n}{3^n},
$$

$$c(x)=\left(1+x+x^2\right)c\left(\frac{x^3}{3}\right)=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{x^{3^n}}{3^{\left(3^n-1\right)/2}}+\frac{x^{2\left(3^n\right)}}{3^{3^n-1}}\right).$$

Из

$$\binom{n}{m}_3=\frac{b_n!}{b_m!b_{n-m}!},$$

$$b_{3n}!=3^n b_n!,\ \ b_{3n+i}!=b_{3n}!,\ 0\le i<3;\ b_{3n-i}!=b_{3(n-1)}!,\ \ 0<i\le 3,$$

следует

$$\binom{3n+i}{3m+j}_3=\binom{n}{m}_3,\ i\ge j;\ =3b_n\binom{n-1}{m}_3=3b_{m+1}\binom{n}{m+1}_3,\ i<j.$$

Строки и столбцы матрицы ${}_{[3]}P$ образуют рекуррентные последовательности:

$$u_{3n}(x)=u_n\left(x^3\right)+3b_n(1+x)xu_{n-1}\left(x^3\right),$$

$$u_{3n+1}(x)=(1+x)u_n\left(x^3\right)+3b_n x^2 u_{n-1}\left(x^3\right),$$

$$u_{3n+2}(x)=\left(1+x+x^2\right)u_n\left(x^3\right);$$

$$g_{3n}=\left(1+x+x^2\right)g_n\left(x^3\right),$$

$$g_{3n+1}(x)=(1+x)xg_n\left(x^3\right)+3b_{n+1}g_{n+1}\left(x^3\right),$$

$$g_{3n+2}(x)=x^2 g_n\left(x^3\right)+3b_{n+1}(1+x)g_{n+1}\left(x^3\right).$$

Блочную матрицу, (n,m)- блоком которой является матрица, состоящая из 3^k первых строк матрицы ${}_{[3]}P$, умноженная на $\binom{n}{m}_3$, обозначим ${}_{[3]}P_{3^k}$. Так как

$$\binom{3^k n+i}{3^k m+j}_3=\binom{n}{m}_3\binom{i}{j}_3,\ 0\le i<3^k,\ i\ge j,$$

то

$${}_{[3]}P\times{}_{0,3^k}P={}_{[3]}P_{3^k}.$$

Из равенства

$$\binom{3^k n+i}{3^k m+j}_3 = b_n \binom{n-1}{m}_3 \binom{3^k+i}{j}_3 = b_{m+1} \binom{n}{m+1}_3 \binom{3^k+i}{j}_3 ,$$

$$0 \le i < 3^k ,\ i < j ,$$

вытекает равенство для сегментов матрицы ${}_{[3]}P - {}_{[3]}P_{3^k}$:

$$\nabla_{n,m} = b_n \binom{n-1}{m}_3 \nabla_{1,0} = b_{m+1} \binom{n}{m+1}_3 \nabla_{1,0} .$$

Введем обозначение

$$w_m(x) = \sum_{n=0}^{m} x^n ,\ \ w_{-1}(x) = 0 .$$

Для матрицы

$${}_{[q]}P = {}_{q,q}P \times {}_{q,q^2}P \times {}_{q,q^3}P \times \ldots \times {}_{q,q^k}P \times \ldots ,$$

$q = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$, имеем (в тех же обозначениях, что и в предыдущих примерах):

$$b_{q^k n} = q^k b_n ,\ \ b_{qn+i} = 1 ,\ 0 < i < q ,\ b_{q^k n+i} = b_i ,\ 0 < i < q^k ,$$

$$b(x) = \frac{w_{q-2}(x)x}{1-x^q} + q b(x^q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_{q-2}\left(x^{q^n}\right) q^n x^{q^n}}{1-x^{q^{n+1}}} ;$$

$$c_{qn+i} = \frac{c_n}{q^n} ,\ \ 0 \le i < q ,$$

$$c(x) = w_{q-1}(x)\, c\left(\frac{x^q}{q}\right) = \prod_{n=0}^{\infty} w_{q-1}\left(x^{q^n} \Big/ q^{\frac{q^n-1}{q-1}} \right) ;$$

$$\binom{q^k n+i}{q^k m+j}_q = \binom{n}{m}_q \binom{i}{j}_q ,\ \ 0 \le i < q^k ,\ i \ge j ,$$

$$\binom{q^k n+i}{q^k m+j}_q = b_n \binom{n-1}{m}_q \binom{q^k+i}{j}_q = b_{m+1} \binom{n}{m+1}_q \binom{q^k+i}{j}_q ,\ i < j ;$$

$$u_{qn+m}(x) = w_m(x) u_n\left(x^q\right) + q b_n x^{m+1} w_{q-2-m}(x) u_{n-1}\left(x^q\right),$$

$$g_{qn+m}(x) = x^m w_{q-1-m}(x) g_n(x^q) + q b_{n+1} w_{m-1}(x) g_{n+1}(x^q),$$

$$0 \le m < q;$$

$$_{[q]}P \times {}_{0,q^k}P = {}_{[q]}P_{q^k};$$

$$\nabla_{n,m} = b_n \binom{n-1}{m}_q \nabla_{1,0} = b_{m+1} \binom{n}{m+1}_q \nabla_{1,0}.$$

Из определения матрицы $_{[q]}P$ вытекает, что

$$P = {}_{[2]}P \times {}_{[3]}P \times {}_{[5]}P \times \ldots \times {}_{[p]}P \times \ldots ,$$

где p – член последовательности простых чисел. Соответственно, экспоненциальный ряд является произведением Адамара рядов

$$\prod_{n=0}^{\infty} w_{p-1}\left(x^{p^n} \Big/ p^{\frac{p^n-1}{p-1}} \right).$$

Обобщением матрицы $_{[q]}P$ является матрица

$$_{[\varphi,q]}P = {}_{\varphi,q}P \times {}_{\varphi,q^2}P \times {}_{\varphi,q^3}P \times \ldots \times {}_{\varphi,q^k}P \times \ldots,$$

$_{[q,q]}P = {}_{[q]}P$. Если $\varphi \ne 0$, равенства для матрицы $_{[\varphi,q]}P$ легко получить из равенств для матрицы $_{[q]}P$, заменив $b_{q^k n} = q^k b_n$, $c_{qn+i} = \dfrac{c_n}{q^n}$ на $b_{q^k n} = \varphi^k b_n$, $c_{qn+i} = \dfrac{c_n}{\varphi^n}$. При фиксированном q матрицы $_{[\varphi,q]}P$ образуют группу :

$$_{[\varphi,q]}P \times {}_{[\beta,q]}P = {}_{[\varphi\beta,q]}P,$$

где $_{[1,q]}P = {}_{1,q}P = P_{(1-x)^{-1}}$ – единица группы обобщенных матриц Паскаля.

При $\varphi = 0$ получаем нулевую обобщенную матрицу Паскаля

$$_{[0,q]}P = {}_{0,q}P \times {}_{0,q^2}P \times {}_{0,q^3}P \times \ldots \times {}_{0,q^k}P \times \ldots$$

Например (треугольник Паскаля по модулю 2),

$$
{}_{[0,2]}P=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&1&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&0&0&0&0&1&1&1&1&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&1&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&1&1&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&1&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix}.
$$

Из равенства

$$ {}_{[0,q]}P={}_{[0,q]}P\times{}_{[\varphi,q]}P $$

вытекают равенства

$$ \binom{q^k n+i}{q^k m+j}_{0,q}=\binom{n}{m}_{0,q}\binom{i}{j}_{0,q},0\le i,j<q^k; $$

$$ u_{qn+m}(x)=w_m(x)u_n\left(x^q\right), $$

$$ g_{qn+m}(x)=x^m w_{q-1-m}(x)g_n\left(x^q\right),\ 0\le m<q; $$

$$ {}_{[0,q]}P={}_{[0,q]}P_{q^k}. $$

[1] G. Fontene, Generalization d’une formule connue, Nouv. ann. math., 1915, 15 (4), p. 112.

[2] Абачиев С. К, О треугольнике Паскаля, простых делителях и фрактальных структурах, В мире науки, 1989, №9, с. 75-78.

[3] Tyler Ball, Tom Edgar, and Daniel Juda, Dominance Orders, Generalized Binomial Coefficients, and Kummer’s Theorem, Mathematics Magazine, Vol. 87, No. 2, April 2014, p. 135-143.