ОБОБЩЕННЫЕ МАТРИЦЫ РИОРДАНА И НУЛЕВЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ МАТРИЦЫ ПАСКАЛЯ

Е. В. Бурлаченко

Существует особое множество обобщенных матриц Риордана, определяемое параметром q. При $q=0$ это обыкновенные матрицы Риордана, при $q=1$ это экспоненциальные матрицы Риордана. В остальных случаях, кроме $q=-1$, это матрицы, связанные с коэффициентами Гаусса так же, как экспоненциальные матрицы Риордана связаны с обычными биномиальными коэффициентами. Случай $q=-1$ не вписывается в концепцию обобщенных матриц Риордана, но ради него ее следует расширить. Для этого вводится специальный класс матриц, каждая из которых является предельным случаем определенного множества обобщенных матриц Паскаля.

1. Введение

В пространстве формальных степенных рядов основную роль играют преобразования, соответствующие умножению и композиции рядов. Умножение задается матрицей $(a(x),x)$, n-м столбцом которой ($n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) является ряд $x^n a(x)$; композиция задается матрицей $(1,a(x))$, n-м столбцом которой является ряд $a^n(x)$:

$$(a(x),x)b(x)=a(x)b(x),\ \ (1,a(x))b(x)=b(a(x)).$$

Матрица

$$(b(x),x)(1,a(x))=(b(x),a(x))$$

называется матрицей Риордана [1] – [4]. Матрицы Риордана умножаются по правилу:

$$(b(x),a(x))(f(x),g(x))=(b(x)f(a(x)),g(a(x))).$$

Если $b_0\neq 0$, $a_0=0$, $a_1\neq 0$, матрицы $(b(x),a(x))$ образуют группу, называемую группой Риордана.

Матрицы

$$\left|e^x\right|^{-1}(b(x),a(x))\left|e^x\right|=[b(x),a(x)],$$

где $\left|e^x\right|$ – диагональная матрица, диагональные элементы которой равны коэффициентам ряда e^x: $\left|e^x\right|a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n/n!$, называются экспоненциальными матрицами Риордана. Последовактельность строк матрицы $\left[a(x),b(x)\right]$ называется последовательностью Шеффера и является предметом изучения классического теневого анализа [5], [6].

Матрица

$$P=\left(\frac{1}{1-x},\frac{x}{1-x}\right)=\left[e^x,x\right]=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdot\\1&1&0&0&\cdot\\1&2&1&0&\cdot\\1&3&3&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

имеет особый статус и называется матрицей Паскаля.

Матрицы

$$\left|c(x)\right|^{-1}\left(b(x),a(x)\right)\left|c(x)\right|=\left(b(x),a(x)\right)_{c(x)},$$

где $\left|c(x)\right|$ – диагональная матрица: $\left|c(x)\right|a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_na_nx^n$, $c_n\neq 0$, называются обобщенными матрицами Риордана [3] ((c)-матрицами Риордана [4]). Последовательность строк матрицы $\left(b(x),a(x)\right)_{c(x)}$ называется последовательностью Боаса-Бака и является предметом изучения неклассического теневого анализа [5], [7].

С обобщенными матрицами Риордана связано следующее обобщение биномиальных коэффициентов [8]. Для коэффициентов ряда $b(x)$, $b_0=0$; $b_n\neq 0$, $n>0$, обозначим

$$b_0!=1,\ \ b_n!=\prod_{m=1}^{n}b_m,\ \ \binom{n}{m}_b=\frac{b_n!}{b_m!b_{n-m}!};\ \ \binom{n}{m}_b=0,\ \ m>n.$$

Тогда

$$\binom{n}{m}_b=\binom{n-1}{m-1}_b+\frac{b_n-b_m}{b_{n-m}}\binom{n-1}{m}_b. \tag{1}$$

n-й коэффициент ряда $a(x)$, (n,m)-й элемент матрицы A, n-ю строку и n-й столбец матрицы A будем обозначать соответственно

$$\left[x^n\right]a(x),\ \ [n,m]A,\ \ [n,\rightarrow]A,\ \ [\uparrow,n]A.$$

Рассмотрим матрицу

$$
(c(x),x)_{c(x)}=\begin{pmatrix}
\frac{c_0c_0}{c_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
\frac{c_0c_1}{c_1} & \frac{c_1c_0}{c_1} & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
\frac{c_0c_2}{c_2} & \frac{c_1c_1}{c_2} & \frac{c_2c_0}{c_2} & 0 & 0 & \cdot\\
\frac{c_0c_3}{c_3} & \frac{c_1c_2}{c_3} & \frac{c_2c_1}{c_3} & \frac{c_3c_0}{c_3} & 0 & \cdot\\
\frac{c_0c_4}{c_4} & \frac{c_1c_3}{c_4} & \frac{c_2c_2}{c_4} & \frac{c_3c_1}{c_4} & \frac{c_4c_0}{c_4} & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}.
$$

Обозначим $[\uparrow,1](c(x),x)_{c(x)}=b(x)$. Если $c_0=1$, то

$$
c_n=c_1^n/b_n!\,,\quad [n,m](c(x),x)_{c(x)}=\binom{n}{m}_b.
$$

Пусть $c_0=1$. Обозначим

$$
(c(x),x)_{c(x)}=P_{c(x)}.
$$

Так как $P_{c(x)}=P_{c(\varphi x)}$, примем, что $c_1=1$. Матрицу $P_{c(x)}$ будем называть обобщенной матрицей Паскаля.

Матрицы, о которых пойдет речь, появляются при рассмотрения следующего множества обобщенных матриц Паскаля. Пусть

$$
[\uparrow,1]P_{g(q,x)}=b(x)=\frac{x}{(1-x)(1-qx)},\quad b_n=\sum_{m=0}^{n-1}q^m.
$$

Тогда

$$
g(0,x)=(1-x)^{-1},\ g(1,x)=e^x.
$$

В остальных случаях (q-теневой анализ [5]), кроме $q=-1$,

$$
g(q,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q-1)^n}{(q^n-1)!}x^n,\ (q^n-1)!=\prod_{m=1}^{n}(q^m-1),\ (q^0-1)!=1.
$$

Матрицы $P_{g(q,x)}$, $P_{g(q,x)}^{-1}$ можно также определить следующим образом:

$$[\uparrow,n]P_{g(q,x)} = x^n\prod_{m=0}^{n}\left(1-q^m x\right)^{-1}, \quad [n,\to]P^{-1}_{g(q,x)} = \prod_{m=0}^{n-1}\left(x-q^m\right).$$

При $q=-1$ получаем матрицы

$$P_{g(-1,x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad P^{-1}_{g(-1,x)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 0 & \cdot \\ -1 & 0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

где ряд $g(-1,x)$ не определен.

Во втором разделе статьи с помощью обобщенных матриц Паскаля дается определение матриц, подобных матрице $P_{g(-1,x)}$. В третьем разделе показывается, что с каждой из этих матриц связана группа матриц, аналогичная обобщенной группе Риордана. Отмечаются особенности этой группы. В четвертом разделе полученные результаты обобщаются на более широкий класс матриц.

2. Нулевые обобщенные матрицы Паскаля

Произведение Адамара $(a(x),x)\times A$, где A – нижняя треугольная матрица, обозначим $(a(x),x\,|\,A)$:

$$[n,m](a(x),x\,|\,A)=[n,m](a(x),x)[n,m]A\ .$$

Для обобщенных матриц Риордана

$$\left(a(x),x\,|\,P_{c(x)}\right)=\left(\left|c(x)\right|a(x),x\right)_{c(x)}\ .$$

Если для любых двух рядов $a(x)$, $b(x)$ выполняется равенство

$$(a(x),x\,|\,A)(b(x),x\,|\,A)=(b(x),x\,|\,A)(a(x),x\,|\,A)\in M\,,$$

где M – множество матриц вида $(a(x),x\,|\,A)$, то элементы матрицы A, $[n,m]A=(n,m)$, удовлетворяют равенствам

$$(n,m)(m,0)=(n,n-m)(n-m,0), \tag{2}$$

$$(n+p,p)^{-1}\sum_{m=0}^{n}(n+p,m+p)(m+p,p)a_{n-m}b_m =$$
$$=(n+q,q)^{-1}\sum_{m=0}^{n}(n+q,m+q)(m+q,q)a_{n-m}b_m, \quad p,q=0,1,2,\ldots$$

или

$$\begin{gathered}(n+q,q)(n+p,m+p)(m+p,p)=\\ =(n+p,p)(n+q,m+q)(m+q,q).\end{gathered} \tag{3}$$

Действительно, равенство (2) означает, что

$$(a(x),x\,|\,A)\sum_{n=0}^{\infty}b_n(n,0)x^n=(b(x),x\,|\,A)\sum_{n=0}^{\infty}a_n(n,0)x^n;$$

равенство (3) означает, что если

$$(a(x),x\,|\,A)\sum_{n=0}^{\infty}b_n(n,0)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n,0)x^n,$$

то

$$(a(x),x\,|\,A)(b(x),x\,|\,A)=(c(x),x\,|\,A).$$

Если $(n,m)=\dfrac{c_m c_{n-m}}{c_n}$, то равенства (2), (3) выполняются:

$$\frac{c_m c_{n-m}}{c_n}\frac{c_0 c_m}{c_m}=\frac{c_{n-m}c_m}{c_n}\frac{c_0 c_{n-m}}{c_{n-m}}, \quad \frac{c_q c_n}{c_{n+q}}\frac{c_{m+p}c_{n-m}}{c_{n+p}}\frac{c_p c_m}{c_{m+p}}=\frac{c_p c_n}{c_{n+p}}\frac{c_{m+q}c_{n-m}}{c_{n+q}}\frac{c_q c_m}{c_{m+q}}.$$

Если $c_0=1$, $c_1=1$, то $c_n=(b_n!)^{-1}$, $(n,m)=b_n!/b_m!b_{n-m}!$, где $b(x)=[\uparrow,1]P_{c(x)}$. Пусть $b_0=0$, $b_{2n}=\varphi$, $b_{2n+1}=1$. Тогда $c_{2n}=c_{2n+1}=1/\varphi^n$,

$$\frac{c_{2m}c_{2(n-m)}}{c_{2n}}=\frac{c_{2m}c_{2(n-m)+1}}{c_{2n+1}}=\frac{c_{2m+1}c_{2(n-m)}}{c_{2n+1}}=\frac{\varphi^n}{\varphi^m\varphi^{n-m}}=1,$$

$$\frac{c_{2m+1}c_{2(n-m)-1}}{c_{2n}}=\frac{\varphi^n}{\varphi^m\varphi^{n-m-1}}=\varphi.$$

Следовательно, применительно к любой матрице $P_{c(x)}$, преобразованию

$$b(x) \to \overline{b}(x): b_{2n} \to \varphi b_{2n},\ b_{2n+1} \to b_{2n+1},$$

соответствует преобразование

$$P_{c(x)} \to P_{\overline{c}(x)}: (n,2m) \to (n,2m),\ (2n+1,2m+1) \to (2n+1,2m+1),$$

$$(2n,2m+1) \to \varphi(2n,2m+1).$$

Очевидно, что элементы матрицы $P_{\overline{c}(x)}$ удовлетворяют равенствам (2), (3) при любых значениях φ, но в случае $\varphi = 0$ ряд $\overline{c}(x)$ не определен.

Нижнюю треугольную матрицу с элементами $(2n,2m+1)=0$, $(n,2m)=1$, $(2n+1,2m+1)=1$ обозначим ${}_0P$. Матрицу ${}_0P_{c(x,\varphi)} = {}_0P \times P_{c(x,\varphi)}$, где $P_{c(x,\varphi)}$ – определенное множество обобщенных матриц Паскаля, назовем нулевой обобщенной матрицей Паскаля. Для матрицы ${}_0P$

$$P_{c(x,\varphi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & \varphi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & \varphi & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{x}[\uparrow,1]P_{c(x,\varphi)} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{\varphi x}{1-x^2} = \frac{1+\varphi x}{1-x^2},$$

$$c(x,\varphi) = \left(1-\frac{x^2}{\varphi}\right)^{-1} + x\left(1-\frac{x^2}{\varphi}\right)^{-1} = (1+x)\left(1-\frac{x^2}{\varphi}\right)^{-1}.$$

Матрица Паскаля принадлежит множеству матриц

$$P_{c(x,\varphi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 2\varphi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 4\varphi & 6 & 4\varphi & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & 6\varphi & 15 & 20\varphi & 15 & 6\varphi & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{x}[\uparrow,1]P_{c(x,\varphi)} = \frac{1+x^2}{\left(1-x^2\right)^2} + \frac{2\varphi x}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{1+2\varphi x+x^2}{\left(1-x^2\right)^2},$$

$$c(x,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!\varphi^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\varphi^n}.$$

Если дана матрица ${}_0P_{c(x,\varphi)}$, можно найти матрицу $P_{c(x,\varphi)}$, подставив $(2,1)=\varphi$ и применив формулу (1). Для матрицы $P_{g(-1,x)}$ находим:

$$P_{c(x,\varphi)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & \varphi & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 2\varphi & 2 & 2\varphi & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & 3\varphi & 3 & 6\varphi & 3 & 3\varphi & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{x}[\uparrow,1]P_{c(x,\varphi)} = \frac{1}{1-x^2} + \frac{\varphi x}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{1+\varphi x-x^2}{\left(1-x^2\right)^2},$$

$$c(x,\varphi) = \exp\left(x^2/\varphi\right) + x\exp\left(x^2/\varphi\right) = (1+x)\exp\left(x^2/\varphi\right),$$

$$(2n,2m) = (2n+1,2m) = (2n+1,2m+1) = \binom{n}{m},$$

$$(2n,2m+1) = n\varphi\binom{n-1}{m}.$$

4. Нулевая обобщенная группа Риордана

Обозначим

$$\left(a(x), x \mid {}_0P_{c(x,\varphi)}\right) = \left(a(x), 1\right)_0,$$

где матрица ${}_0P_{c(x,\varphi)}$ указывается отдельно. Построим матрицу $\left(1, a(x)\right)_0$ по правилу

$$[\uparrow, n]\left(1, a(x)\right)_0 = [\uparrow, n]\left(a(x), 1\right)_0^n.$$

Обозначим

$$\left(a(x), 1\right)_0 b(x) = a(x) \circ b(x),\ \left(1, a(x)\right)_0 b(x) = b \circ \left(a(x)\right),$$

$$\left(b(x), 1\right)_0 \left(1, a(x)\right)_0 = \left(b(x), a(x)\right)_0.$$

Теорема 1. Матрицы $\left(b(x), a(x)\right)_0$, $b_0 \neq 0$, $a_0 \neq 0$ образуют группу (назовем ее нулевой обобщенной группой Риордана), элементы которой умножаются по правилу

$$\left(b(x), a(x)\right)_0 \left(f(x), \mathrm{g}(x)\right)_0 = \left(b(x) \circ f \circ \left(a(x)\right), a(x) \circ g \circ \left(a(x)\right)\right)_0.$$

Доказательство. Пусть $[\uparrow, n]AB = [\uparrow, n](AB)$. В силу равенства (3)

$$[\uparrow, n]\left(1, a(x)\right)_0 \left(b(x), 1\right)_0 = [\uparrow, n]\left(b \circ \left(a(x)\right), 1\right)_0 \left(a(x), 1\right)_0^n,$$

или

$$\left(1, a(x)\right)_0 \left(b(x), 1\right)_0 = \left(b \circ \left(a(x)\right), a(x)\right)_0.$$

Тогда

$$[\uparrow, n]\left(1, a(x)\right)_0 \left(b(x), 1\right)_0^n = [\uparrow, n]\left(b \circ \left(a(x)\right), 1\right)_0^n \left(a(x), 1\right)_0^n =$$

$$= [\uparrow, n]\left(a(x) \circ b \circ \left(a(x)\right), 1\right)_0^n,$$

или

$$\left(1, a(x)\right)_0 \left(1, b(x)\right)_0 = \left(1, a(x) \circ b \circ \left(a(x)\right)\right)_0.$$

Замечание 1. Матрицы $\left(b(x), a(x)\right)_0$, $b_{2n+1} = 0$, $a_{2n+1} = 0$, образуют подгруппу, общую для всех групп, связанных с множеством обобщенных матриц Паскаля $P_{c(x,\varphi)}$. Например, для ${}_0P$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\0&0&1&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&1&0&0&0&\cdot\\0&0&2&0&1&0&0&\cdot\\0&1&0&3&0&1&0&\cdot\\0&0&3&0&4&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\0&0&1&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&1&0&0&0&\cdot\\0&0&2&0&1&0&0&\cdot\\0&1&0&3&0&1&0&\cdot\\0&0&3&0&4&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\0&0&1&0&0&0&0&\cdot\\0&2&0&1&0&0&0&\cdot\\0&0&4&0&1&0&0&\cdot\\0&5&0&6&0&1&0&\cdot\\0&0&14&0&8&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},$$

или

$$\left(1,\frac{1}{1-x^2}\right)_0\left(1,\frac{1}{1-x^2}\right)_0=\left(1,\frac{1-x^2}{1-3x^2+x^4}\right)_0=\left(1,\frac{x\left(1-x^2\right)}{1-3x^2+x^4}\right).$$

Для сравнения

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\0&0&1&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&1&0&0&0&\cdot\\0&0&2&0&1&0&0&\cdot\\0&1&0&3&0&1&0&\cdot\\0&0&3&0&4&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\0&0&1&0&0&0&0&\cdot\\0&1&2&1&0&0&0&\cdot\\0&0&2&0&1&0&0&\cdot\\0&1&4&3&4&1&0&\cdot\\0&0&3&0&4&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\0&0&1&0&0&0&0&\cdot\\0&2&2&1&0&0&0&\cdot\\0&0&4&0&1&0&0&\cdot\\0&5&10&6&4&1&0&\cdot\\0&0&14&0&8&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},$$

или

$$\left(1,\frac{1}{1-x^2}\right)_0\left(1,\frac{1}{1-x}\right)_0=\left(1,\frac{1}{1-x-x^2}\right)_0,$$

где

$$a(x)=\frac{1}{1-x^2},\quad b(x)=\frac{1}{1-x},$$

$$b\circ(a(x))=\frac{1-x^2}{1-x-x^2}\ ,\quad a(x)\circ b\circ(a(x))=\frac{1}{1-x-x^2}\ .$$

Обозначим

$$a^{(n)}(x)=a(x)\circ a^{(n-1)}(x),\ \ a^{(0)}(x)=1.$$

Умножая равенство

$$D(a(x),x)=(a(x),x)D+\left(a'(x),x\right),$$

где D – матрица оператора дифференцирования, на матрицу (x,x), получаем равенство

$$(x,x)D(a(x),x)=(a(x),x)(x,x)D+(xa'(x),x),$$

где $(x,x)D$ – диагональная матрица. Следовательно, справедливо равенство

$$(x,x)D(a(x),x\,|\,A)=(a(x),x\,|\,A)(x,x)D+(xa'(x),x\,|\,A), \quad (4)$$

где A – любая матрица. Таким образом,

$$x(a(x)\circ b(x))'=a(x)\circ xb'(x)+xa'(x)\circ b(x),$$

$$x\left(a^{(n)}(x)\right)'=na^{(n-1)}(x)\circ xa'(x).$$

Обозначим

$$x(\log\circ a(x))'=xa'(x)\circ a^{(-1)}(x).$$

Тогда

$$\log\circ(a(x)\circ b(x))=\log\circ a(x)+\log\circ b(x).$$

Замечание 2. Благодаря равенству (4) для нулевой обобщенной группы Риордана существует аналог теоремы обращения Лагранжа. Пусть матрицы $(1,a(x))_0$, $\left(1,b^{(-1)}(x)\right)_0$ являются взаимно обратными . Обозначим

$$a^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^k x^n\,,\ \ b^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^k x^n\,,\ \ k=0\,,\ \pm1\,,\ \pm2\,,\ \ldots$$

Тогда

$$\left(1+x(\log\circ a(x))'\right)\circ a^{(k)}(x)=a^{(k)}(x)+\frac{x}{k}\left(a^{(k)}(x)\right)'=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k+n}{k}a_n^k x^n=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{k+n}x^n,$$

$$\left(1-x(\log\circ b(x))'\right)\circ b^{(k)}(x)=b^{(k)}(x)-\frac{x}{k}\left(b^{(k)}(x)\right)'=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k-n}{k}b_n^k x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{k-n}x^n,$$

так что

$$[n,\to](a(x),a(x))_0=[n,\to]\left(\left(1-x(\log\circ b(x))'\right)\circ b^{(n+1)}(x),1\right)_0,$$

$$[n,\rightarrow]\left(b^{(-1)}(x),b^{(-1)}(x)\right)_0=[n,\rightarrow]\left(\left(1+x(\log\circ a(x))'\right)\circ a^{(-n-1)}(x),1\right)_0,$$

где матрицы $(a(x),a(x))_0$, $\left(b^{(-1)}(x),b^{(-1)}(x)\right)_0$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} a_0^1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_1^1 & a_0^2 & 0 & 0 & \cdot \\ a_2^1 & a_1^2 & a_0^3 & 0 & \cdot \\ a_3^1 & a_2^2 & a_1^3 & a_0^4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\times {}_0P_{c(x,\varphi)},\quad \begin{pmatrix} b_0^{-1} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ b_1^{-1} & b_0^{-2} & 0 & 0 & \cdot \\ b_2^{-1} & b_1^{-2} & b_0^{-3} & 0 & \cdot \\ b_3^{-1} & b_2^{-2} & b_1^{-3} & b_0^{-4} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\times {}_0P_{c(x,\varphi)},$$

$$\left[x^n\right](a(x),a(x))_0\,b(x)=\left[x^n\right]\left(1-x(\log\circ b(x))'\right)\circ b^{(n+2)}(x)=a_n^2,$$

$$\left[x^n\right]\left(b^{(-1)}(x),b^{(-1)}(x)\right)_0 a(x)=\left[x^n\right]\left(1+x(\log\circ a(x))'\right)\circ a^{(-n)}(x)=b_n^0,$$

$$b\circ(a(x))=a(x),\quad a\circ\left(b^{(-1)}(x)\right)=b(x).$$

Замечание 3. В нулевой обобщенной группе Риордана для рядов вида $a(x)=1+xb\left(x^2\right)$ выполняются равенства:

$$[\uparrow,2n+1](a(x),1)_0=[\uparrow,2n+1](1,a(x))_0=x^{2n+1},$$

$$xb\left(x^2\right)=\log\circ a(x),$$

$$a_1(x)\circ a_2(x)=1+x\left(b_1\left(x^2\right)+b_2\left(x^2\right)\right)=1+\log\circ\left(a_1(x)\circ a_2(x)\right),$$

$$a_1\circ\left(a_2(x)\right)=a_1(x).$$

Замечание 4. Группы, связанные с матрицами

$$
{}_0P=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&1&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&0&\cdot\\
1&0&1&0&1&0&1&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix},\quad
{}_0P_e=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&1&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&0&0&0&\cdot\\
1&0&2&0&1&0&0&\cdot\\
1&1&2&2&1&1&0&\cdot\\
1&0&3&0&3&0&1&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix},
$$

где ${}_0P_e=P_{g(-1,x)}$, содержат свои особые подгруппы. Рассмотрим блочную матрицу $(a(x)|b(x))_{(2\times 2)}$, $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, (n,m)-м блоком которой является матрица

$$
a_{n-m}\begin{pmatrix}b_0&0\\b_1&b_0\end{pmatrix}:
$$

$$
(a(x)|b(x))_{(2\times 2)}=\begin{pmatrix}
a_0b_0&0&0&0&0&0&\cdot\\
a_0b_1&a_0b_0&0&0&0&0&\cdot\\
a_1b_0&0&a_0b_0&0&0&0&\cdot\\
a_1b_1&a_1b_0&a_0b_1&a_0b_0&0&0&\cdot\\
a_2b_0&0&a_1b_0&0&a_0b_0&0&\cdot\\
a_2b_1&a_2b_0&a_1b_1&a_1b_0&a_0b_1&a_0b_0&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix}.
$$

Матрицы $(a(x)|b(x))_{(2\times 2)}$ образуют группу, в чем легко убедится, перемножив две матрицы данного вида:

$$
(a(x)|b(x))_{(2\times 2)}(g(x)|c(x))_{(2\times 2)}=(a(x)g(x)|b(x)c(x))_{(2\times 2)}.
$$

Очевидно, что

$$
(a(x)|b(x))_{(2\times 2)}=\left((b_0+b_1x)a\left(x^2\right),x\,|\,{}_0P\right).
$$

Так как

$$
{}_0P=\left(\frac{1}{1-x}\,|\,\frac{1}{1-x}\right)_{(2\times 2)}=\left(\frac{1+x}{1-x^2},x\,|\,{}_0P\right),
$$

то

$$
{}_0P^{\varphi}=\left(\frac{1+\varphi x}{\left(1-x^2\right)^{\varphi}},x\,|\,{}_0P\right)=\left(\frac{1+\varphi x}{\left(1-x^2\right)^{\varphi}},x\right)\big|2n\big|+\left(\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\varphi}},x\right)\big|2n+1\big|,
$$

где $|2n|$, $|2n+1|$ – операторы (диагональные матрицы), предназначенные для бисекции рядов и матриц:

$$|2n|\,a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^{2n},\quad |2n+1|\,a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}.$$

Рассмотрим блочную матрицу $\left(a(x)\,|\,b(x)\,|\,P\right)_{(2\times2)}$, $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, (n,m)-м блоком которой является матрица

$$a_{n-m}\binom{n}{m}\begin{pmatrix}b_0 & 0\\ b_1 & b_0\end{pmatrix}:$$

$$\left(a(x)\,|\,b(x)\,|\,P\right)_{(2\times2)}=\begin{pmatrix}a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\ a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\ a_1b_0 & 0 & a_0b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\ a_1b_1 & a_1b_0 & a_0b_1 & a_0b_0 & 0 & 0 & \cdot\\ a_2b_0 & 0 & 2a_1b_0 & 0 & a_0b_0 & 0 & \cdot\\ a_2b_1 & a_2b_0 & 2a_1b_1 & 2a_1b_0 & a_0b_1 & a_0b_0 & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\left(a(x),x\,|\,P\right)g(x)=a(x)*g(x),$$

т.е.

$$a(x)*g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}a_m g_{n-m}.$$

Тогда,

$$\left(a(x)\,|\,b(x)\,|\,P\right)_{(2\times2)}\left(g(x)\,|\,f(x)\,|\,P\right)_{(2\times2)}=\left(a(x)*g(x)\,|\,b(x)f(x)\,|\,P\right)_{(2\times2)}.$$

Так как

$$(2n,2m)=(2n+1,2m)=(2n+1,2m+1)=\binom{n}{m},$$

где $(n,m)=[n,m]\,{}_0P_e$, то

$$\left(a(x)\,|\,b(x)\,|\,P\right)_{(2\times2)}=\left((b_0+b_1x)\,a\left(x^2\right),x\,|\,{}_0P_e\right),$$

$${}_0P_e=\left(\frac{1}{1-x}\,|\,\frac{1}{1-x}\,|\,P\right)_{(2\times2)}=\left(\frac{1+x}{1-x^2},x\,|\,{}_0P_e\right),$$

$$ {}_0P_e^{\varphi}=\left(\frac{1+\varphi x}{1-\varphi x^2},x\mid {}_0P_e\right), $$

$$ [\uparrow,2n]_0P_e^{\varphi}=\frac{(1+\varphi x)\,x^{2n}}{\left(1-\varphi x^2\right)^{n+1}},\quad [\uparrow,2n+1]_0P_e^{\varphi}=\frac{x^{2n+1}}{\left(1-\varphi x^2\right)^{n+1}}, $$

$$ {}_0P_e^{\varphi}=\left(\frac{1+\varphi x}{1-\varphi x^2},\frac{x}{\left(1-\varphi x^2\right)^{1/2}}\right)\left|2n\right|+\left(\frac{1}{\left(1-\varphi x^2\right)^{1/2}},\frac{x}{\left(1-\varphi x^2\right)^{1/2}}\right)\left|2n+1\right|. $$

4. Обобщение

Пусть $[\uparrow,1]P_{c(x)}=b(x)$, $b_0=0$, $b_{3n}=\varphi$, $b_{3n+1}=1$, $b_{3n+2}=1$. Тогда $c_{3n}=c_{3n+1}=c_{3n+2}=1/\varphi^n$,

$$ \frac{c_{3m}c_{3(n-m)+2}}{c_{3n+2}}=\frac{c_{3m+1}c_{3(n-m)+1}}{c_{3n+2}}=\frac{c_{3m+2}c_{3(n-m)}}{c_{3n+2}}=\frac{\varphi^n}{\varphi^m\varphi^{n-m}}=1, $$

$$ \frac{c_{3m}c_{3(n-m)+1}}{c_{3n+1}}=\frac{c_{3m+1}c_{3(n-m)}}{c_{3n+1}}=\frac{\varphi^n}{\varphi^m\varphi^{n-m}}=1,\quad \frac{c_{3m+2}c_{3(n-m)-1}}{c_{3n+1}}=\frac{\varphi^n}{\varphi^m\varphi^{n-m-1}}=\varphi, $$

$$ \frac{c_{3m}c_{3(n-m)}}{c_{3n}}=\frac{\varphi^n}{\varphi^m\varphi^{n-m}}=1,\quad \frac{c_{3m+1}c_{3(n-m)-1}}{c_{3n}}=\frac{c_{3m+2}c_{3(n-m)-2}}{c_{3n}}=\frac{\varphi^n}{\varphi^m\varphi^{n-m-1}}=\varphi. $$

Следовательно, преобразованию $b(x)\to\bar b(x)$: $b_{3n}\to\varphi b_{3n}$, $b_{3n+1}\to b_{3n+1}$, $b_{3n+2}\to b_{3n+2}$ соответствует преобразование $P_{c(x)}\to P_{\bar c(x)}$:

$$ (3n,3m+1)\to\varphi(3n,3m+1),\ (3n,3m+2)\to\varphi(3n,3m+2), $$

$$ (3n+1,3m+2)\to\varphi(3n+1,3m+2), $$

и $(n,m)\to(n,m)$ в остальных случаях. Элементы матрицы $P_{\bar c(x)}$ удовлетворяют равенствам (2), (3) при любых значениях φ, но в случае $\varphi=0$ ряд $\bar c(x)$ не определен. Будем называть такую матрицу 3-нулевой обобщенной матрицей Паскаля и обозначать ${}_{03}P_{c(x,\varphi)}={}_{03}P\times P_{c(x,\varphi)}$, где ${}_{03}P$ – 3-нулевая матрица, для которой

$$P_{c(x,\varphi)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\1&1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\1&1&1&0&0&0&0&0&\cdot\\1&\varphi&\varphi&1&0&0&0&0&\cdot\\1&1&\varphi&1&1&0&0&0&\cdot\\1&1&1&1&1&1&0&0&\cdot\\1&\varphi&\varphi&1&\varphi&\varphi&1&0&\cdot\\1&1&\varphi&1&1&\varphi&1&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{x}[\uparrow,1]P_{c(x,\varphi)}=\frac{1+x+\varphi x^2}{1-x^3},\quad c(x,\varphi)=\left(1+x+x^2\right)\left(1-\frac{x^3}{\varphi}\right)^{-1}.$$

Матрица Паскаля принадлежит множеству матриц

$$P_{c(x,\varphi)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\1&1&0&0&0&0&0&\cdot\\1&2&1&0&0&0&0&\cdot\\1&3\varphi&3\varphi&1&0&0&0&\cdot\\1&4&6\varphi&4&1&0&0&\cdot\\1&5&10&10&5&1&0&\cdot\\1&6\varphi&15\varphi&20&15\varphi&6\varphi&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{x}[\uparrow,1]P_{c(x,\varphi)}=\frac{1+2x^3}{\left(1-x^3\right)^2}+\frac{2x+x^4}{\left(1-x^3\right)^2}+\frac{3\varphi x^2}{\left(1-x^3\right)^2}=\frac{1+2x+3\varphi x^2+2x^3+x^4}{\left(1-x^3\right)^2},$$

$$c(x,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!\varphi^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!\varphi^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!\varphi^n}\ .$$

Матрица ${}_{03}P_e$ определяется множеством матриц

$$P_{c(x,\varphi)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\1&1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\1&1&1&0&0&0&0&0&\cdot\\1&\varphi&\varphi&1&0&0&0&0&\cdot\\1&1&\varphi&1&1&0&0&0&\cdot\\1&1&1&1&1&1&0&0&\cdot\\1&2\varphi&2\varphi&2&2\varphi&2\varphi&1&0&\cdot\\1&1&2\varphi&2&2&2\varphi&1&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{x}[\uparrow,1]P_{c(x,\varphi)}=\frac{1+x+\varphi x^2-x^3-x^4}{\left(1-x^3\right)^2},\ c(x,\varphi)=\left(1+x+x^2\right)\exp\left(x^3/\varphi\right),$$

$$(3n,3m)=(3n+1,3m)=(3n+1,3m+1)=$$

$$=(3n+2,3m)=(3n+2,3m+1)=(3n+2,3m+2)=\binom{n}{m},$$

$$(3n,3m+1)=(3n,3m+2)=(3n+1,3m+2)=n\varphi\binom{n-1}{m}.$$

Обозначим $\left(a(x),x\,|\,{}_{03}P_{c(x,\varphi)}\right)=(a(x),1)_{03}$. Построим матрицу $(1,a(x))_{03}$ по правилу $[\uparrow,n](1,a(x))_{03}=[\uparrow,n](a(x),1)_{03}^{n}$. Матрицы $(b(x),a(x))_{03}$ образуют группу, аналогичную группе матриц $(b(x),a(x))_0=(b(x),a(x))_{02}$. Матрицы

$$(b(x),a(x))_{03},\ b_{3n+1}=b_{3n+2}=0,\ a_{3n+1}=a_{3n+2}=0,$$

образуют подгруппу, общую для всех групп, связанных с множеством матриц $P_{c(x,\varphi)}$. Для рядов вида $a(x)=1+x^2b\left(x^3\right)$ выполняются равенства

$$x^2b\left(x^3\right)=\log\circ a(x),\quad a_1(x)\circ a_2(x)=1+\log\circ(a_1(x)\circ a_2(x)),$$

$$a_1\circ(a_2(x))=a_1(x).$$

Группы, связанные с матрицами

$$
{}_{03}P=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&1&1&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&1&0&0&1&0&0&\cdot\\
1&1&0&1&1&0&1&1&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&1&1&1&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix},\quad
{}_{03}P_e=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&0&1&1&0&0&0&0&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&0&0&0&\cdot\\
1&0&0&2&0&0&1&0&0&\cdot\\
1&1&0&2&2&0&1&1&0&\cdot\\
1&1&1&2&2&2&1&1&1&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{pmatrix},
$$

содержат свои особые подгруппы. Пусть $\left(a(x)|b(x)\right)_{(3\times3)}$, $a_0\neq0$, $b_0\neq0$, – блочная матрица, (n,m)-м блоком которой является матрица

$$
a_{n-m}\begin{pmatrix}b_0&0&0\\b_1&b_0&0\\b_2&b_1&b_0\end{pmatrix}.
$$

Тогда

$$
\left(a(x)|b(x)\right)_{(3\times3)}\left(g(x)|f(x)\right)_{(3\times3)}=\left(a(x)g(x)|b(x)f(x)\right)_{(3\times3)},
$$

$$
\left(a(x)|b(x)\right)_{(3\times3)}=\left(\left(b_0+b_1x+b_2x^2\right)a\left(x^3\right),x\,|\,{}_{03}P\right),
$$

$$
{}_{03}P=\left(\frac{1}{1-x}\,|\,\frac{1}{1-x}\right)_{(3\times3)}=\left(\frac{1+x+x^2}{1-x^3},x\,|\,{}_{03}P\right),
$$

$$
{}_{03}P^{\varphi}=\left(\frac{1+\varphi x+\varphi(\varphi+1)x^2/2}{\left(1-x^3\right)^{\varphi}},x\,|\,{}_{03}P\right),
$$

$$
{}_{03}P^{\varphi}=\left(\frac{1+\varphi x+\varphi(\varphi+1)x^2/2}{\left(1-x^3\right)^{\varphi}},x\right)|3n|+
$$

$$
+\left(\frac{1+\varphi x}{\left(1-x^3\right)^{\varphi}},x\right)|3n+1|+\left(\frac{1}{\left(1-x^3\right)^{\varphi}},x\right)|3n+2|,
$$

где $|3n|$, $|3n+1|$, $|3n+2|$ – операторы, предназначенные для трисекции рядов и матриц.

Пусть $(a(x)|b(x)|P)_{(3\times3)}$, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, – блочная матрица, (n,m)-м блоком которой является матрица

$$a_{n-m}\binom{n}{m}\begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$(a(x)|b(x)|P)_{(3\times3)}(g(x)|f(x)|P)_{(3\times3)} = (a(x)*g(x)|b(x)f(x)|P)_{(3\times3)},$$

$$(a(x)|b(x)|P)_{(3\times3)} = \left(\left(b_0+b_1x+b_2x^2\right)a\left(x^3\right), x\,|\,{}_{03}P_e\right),$$

$${}_{03}P_e = \left(\frac{1}{1-x}\,|\,\frac{1}{1-x}\,|\,P\right)_{(3\times3)} = \left(\frac{1+x+x^2}{1-x^3}, x\,|\,{}_{03}P_e\right),$$

$${}_{03}P_e^{\varphi} = \left(\frac{1+\varphi x+\varphi(\varphi+1)x^2/2}{1-\varphi x^3}, x\,|\,{}_{03}P_e\right),$$

$$[\uparrow,3n]_0P_e^{\varphi} = \frac{\left(1+\varphi x+\varphi(\varphi+1)x^2/2\right)x^{3n}}{\left(1-\varphi x^3\right)^{n+1}},$$

$$[\uparrow,3n+1]_0P_e^{\varphi} = \frac{(1+\varphi x)x^{3n+1}}{\left(1-\varphi x^3\right)^{n+1}},\ [\uparrow,3n+2]_0P_e^{\varphi} = \frac{x^{3n+2}}{\left(1-\varphi x^3\right)^{n+1}},$$

$${}_{03}P_e^{\varphi} = \left(\frac{1+\varphi x+\varphi(\varphi+1)x^2/2}{1-\varphi x^3}, \frac{x}{\left(1-\varphi x^3\right)^{1/3}}\right)|3n| +$$

$$+\left(\frac{1+\varphi x}{\left(1-\varphi x^3\right)^{2/3}}, \frac{x}{\left(1-\varphi x^3\right)^{1/3}}\right)|3n+1| + \left(\frac{1}{\left(1-\varphi x^3\right)^{1/3}}, \frac{x}{\left(1-\varphi x^3\right)^{1/3}}\right)|3n+2|.$$

….

Дальнейшее продолжение ряда матриц ${}_{0n}P_{c(x,\varphi)}$ представляется очевидным:

$${}_{0n}P_{c(x,\varphi)} = {}_{0n}P \times P_{c(x,\varphi)},$$

где матрица ${}_{0n}P$ определяется рядом $c(x,\varphi) = \left(\sum_{m=0}^{n-1} x^m\right)\left(1-\dfrac{x^n}{\varphi}\right)^{-1}$. Матрица

${}_{0n}P_e$ определяется рядом $c(x,\varphi)=\left(\sum_{m=0}^{n-1}x^m\right)\exp\left(x^n/\varphi\right)$.

Если элементы матриц A, B удовлетворяют равенствам (2), (3), то элементы матрицы $A\times B$ также удовлетворяют этим равенствам. Поэтому под нулевыми матрицами следует понимать не только n-нулевые матрицы, но и их произведения Адамара. Например,

$$ {}_{02}P\times{}_{03}P\times{}_{04}P\times\ \ldots=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdot\\1&1&0&0&0&\cdot\\1&0&1&0&0&\cdot\\1&0&0&1&0&\cdot\\1&0&0&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}, $$

$$ (a(x),1)_0=\begin{pmatrix}a_0&0&0&0&\cdot\\a_1&a_0&0&0&\cdot\\a_2&0&a_0&0&\cdot\\a_3&0&0&a_0&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},\ (1,a(x))_0=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdot\\0&a_0&0&0&\cdot\\0&0&a_0^2&0&\cdot\\0&0&0&a_0^3&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}. $$

Множество ненулевых обобщенных матриц Паскаля является группой относительно умножения Адамара:

$$ P_{c(x)}\times P_{f(x)}=P_{c(x)\times f(x)},\ c(x)\times f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nf_nx^n. $$

Матрицу $P_{c(x,\varphi)}$, $c(x,\varphi)=\left(\sum_{m=0}^{n-1}x^m\right)\left(1-\frac{x^n}{\varphi}\right)^{-1}$, $n>1$, обозначим ${}_{\varphi n}P$. Каждая обобщенная матрица Паскаля раскладывается в произведение Адамара матриц ${}_{\varphi n}P$. Множеству матриц ${}_{\varphi n}P$ поставим в соответствие множество одномерных векторных подпространств $e_n\log|\varphi|$, где e_n – базисный вектор, $\log|\varphi|$ – координаты натянутых на него векторов. Тогда множество обобщенных матриц Паскаля, элементами которых являются неотрицательные числа, отождествится с бесконечномерным векторным пространством. Нулевые матрицы можно рассматривать как бесконечно удаленные точки пространства.

[1] L. Shapiro, S. Getu, W. Woan, L. Woodson, The Riordan group, Discrete Appl. Math., 34 (1991) 229-339.
[2] R. Sprugnoli, Riordan arrays and combinatorial sums, Discrete Math.,132 (1994) 267-290.
[3] W, Wang, T. Wang, Generalized Riordan arrays, Discrete Math., 308 (2008) 6466-6500.
[4] H. W. Gould, T. X. He, Characterization of (c)-Riordan arrays, Gegenbauer-Humbert-type polynomial sequences, and (c)-Bell polynomials, J. Math. Res. Appl., 33 (5) (2013) 505-52.
[5] S. M. Roman, The Umbral Calculus, Academic Press, 1984.
[6] А. В. Устинов, Полиномы Коробова и теневой анализ, Чебышевский сборник, 2003, №4, 1-12.
[7] В. М. Бухштабер, А. Н. Холодов, Структуры Боаса-Бака на последовательностях полиномов. Функциональный анализ и его приложения, 1989, т. 23, вып. 4, 11-23.
[8] G. Fontene, Generalization d'une formule connue, Nouv. ann. math., 1915, 15 (4), p. 112.