**Е. В. Бурлаченко**

# О ТЕНЕВОМ ИСЧИСЛЕНИИ



## 1. Классический теневой анализ. Последовательности Шеффера

Классический теневой анализ [1, стр.124-144], [2, стр.66-80], [3] изучает свойства последовательностей полиномов $s_n(x)$, производящие функции которых имеют вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n(\varphi)}{n!}x^n = b(x)e^{\varphi a(x)},\ b_0 \neq 0,\, a_0 = 0,\, a_1 \neq 0,$$

где

$$b(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n,\ \ a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

– формальные степенные ряды.

Между теневым анализом и алгеброй формальных степенных рядов существует следующее соответствие. Среди преобразований пространства степенных рядов выделим два вида преобразований. Преобразования первого вида задаются матрицей $[a(x)]$, $n$-м столбцом которой ($n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$) является ряд $x^n a(x)$ (договоримся не делать разницы между формальным степенным рядом и последовательностью его коэффициентов):

$$[a(x)]=\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Второй вид преобразований задается матрицей $\left\langle a(x)\right\rangle$, $n$-м столбцом которой является ряд $a(x)$ в степени $n$, т. е. $a^n(x)$. Например,

$$\left\langle \frac{1}{1-x}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdot \\ 0 & 1 & 3 & 6 & \cdot \\ 0 & 1 & 4 & 10 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \left\langle \frac{x}{1-x}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Первое преобразование соответствует умножению рядов, второе – подстановке (композиции):

$$[a(x)]b(x) = a(x)b(x),$$

$$\left\langle a(x)\right\rangle b(x) = b(a(x)).$$

Диагональную матрицу, диагональные элементы которой равны коэффициентам ряда $e^x$ обозначим $\left|e^x\right|$:

$$\left|e^x\right| a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n, \quad \left|e^x\right|^{-1} a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n x^n.$$

Последовательность строк матрицы

$$\left|e^x\right|^{-1} [b(x)] \left\langle a(x)\right\rangle \left|e^x\right|, \; b_0 \neq 0, \, a_0 = 0, \, a_1 \neq 0$$

называется последовательностью Шеффера; при $a(x) = x$ – последовательностью Аппеля, при $b(x) = 1$ – биномиальной последовательностью. Приведем примеры последовательностей Шеффера и соответствующих им матриц.

Полиномы Бернулли:

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} B_m x^{n-m}, \quad \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n,$$

$$\left|e^x\right|^{-1}\left[\frac{x}{e^x-1}\right]\left|e^x\right|, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(\varphi)}{n!}x^n=\frac{x}{e^x-1}e^{\varphi x}.$$

Полиномы Эйлера:

$$E_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}E_m\frac{1}{2^m}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{n-m}, \quad \frac{2}{e^x+e^{-x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}x^n,$$

$$\left|e^x\right|^{-1}\left[\frac{2}{e^x+1}\right]\left|e^x\right|, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n(\varphi)}{n!}x^n=\frac{2}{e^x+1}e^{\varphi x}.$$

Полиномы Эрмита:

$$H_n(x)=\sum_{m=0}^{[n/2]}(-1)^m\frac{n!}{m!(n-2m)!}(2x)^{n-2m},$$

где $[n/2]$ – целая часть от $n/2$,

$$\left|e^x\right|^{-1}\left[e^{-x^2}\right]\left\langle 2x\right\rangle\left|e^x\right|, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\varphi)}{n!}x^n=e^{-x^2}e^{2\varphi x}.$$

Полиномы Лаггера:

$$L_n(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\binom{n}{n-m}\frac{n!}{m!}x^m,$$

$$\left|e^x\right|^{-1}\left[\frac{1}{1-x}\right]\left\langle\frac{-x}{1-x}\right\rangle\left|e^x\right|, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(\varphi)}{n!}x^n=\frac{1}{1-x}e^{\frac{-\varphi x}{1-x}}.$$

Матрица $[b(x)]\langle a(x)\rangle$ называется теневой матрицей последовательности Шеффера. Основные положения теневого анализа соответствуют очевидным с точки зрения алгебры формальных степенных рядов свойствам матриц $[a(x)]$ и $\langle a(x)\rangle$:

$$[a(x)][b(x)]=[a(x)b(x)];$$

$$\langle a(x)\rangle\langle b(x)\rangle=\langle b(a(x))\rangle;$$

$$\langle a(x)\rangle[b(x)]=[b(a(x))]\langle a(x)\rangle;$$

$$[b(a(x))]=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\left[a^n(x)\right],\ a_0=0;$$

$$D[a(x)]=[a(x)]D+[a'(x)];$$

$$D\langle a(x)\rangle=[a'(x)]\langle a(x)\rangle D,$$

где $a'(x)=Da(x)$, $D$ – оператор дифференцирования, матрица которого транспонирована к матрице $\left|e^x\right|^{-1}[x]\left|e^x\right|$. Преобразование, матрица которого транспонирована к матрице $\left|e^x\right|^{-1}\left[e^{\varphi x}\right]\left|e^x\right|$, называется оператором сдвига на $\varphi$ или просто оператором сдвига, если $\varphi=1$. Особый интерес представляет равенство

$$\left|e^x\right|^{-1}\left[e^{\varphi x}\right]\left|e^x\right|=\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle;$$

т. е. матрица, транспонированная к матрице оператора сдвига, является произведением матриц умножения и подстановки.

Матрицу $B^{-1}AB$ назовем трансформацией матрицы $A$. Транспонированную к $A$ матрицу обозначим $A^*$, так что $(AB)^*=B^*A^*$. Посредством операций трансформирования и транспонирования свойства теневых матриц переводятся в свойства последовательностей Шеффера, – отсюда аналогия с тенью. Например, равенству

$$\langle a(x)\rangle\left[e^{\varphi x}\right]=\left[e^{\varphi a(x)}\right]\langle a(x)\rangle$$

соответствует равенство

$$s_n(x+\varphi)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}s_m(x)s_{n-m}(\varphi),$$

где $s_n(x)$ – $n$-я строка матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\langle a(x)\rangle\left|e^x\right|$. Равенству

$$\langle a(x)\rangle[\tilde{a}(x)]=[x]\langle a(x)\rangle,\ a(\tilde{a}(x))=x,$$

соответствует равенство

$$Ps_n(x) = ns_{n-1}(x),$$

где $P = \left|e^x\right|\left[\tilde{a}(x)\right]^*\left|e^x\right|^{-1}$ – базисный оператор последовательности $s_n(x)$.

Матрицы $\left[b(x)\right]$, $\left\langle a(x)\right\rangle$ обладают и более тонкими свойствами, также обусловленными алгеброй степенных рядов. Например, $(n-1)$-я строка матрицы $\left[a'(x)\right]\left\langle a(x)\right\rangle$ совпадает с $(n-1)$-й строкой матрицы $\left[(\tilde{a}(x))^{-n}\right]$, $a(\tilde{a}(x)) = x$. Следовательно, равенству

$$D\left\langle a(x)\right\rangle = \left[a'(x)\right]\left\langle a(x)\right\rangle D$$

в теневом анализе соответствует формула Стеффенсена [1, стр.134]

$$s_n(x) = xT^{-n}x^{n-1},$$

где $s_n(x)$ – $n$-я строка матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\left\langle a(x)\right\rangle\left|e^x\right|$, $T^{-n}x^{n-1}$ – $(n-1)$-я строка матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\left[(\tilde{a}(x))^{-n}\right]\left|e^x\right|$.

Заметим, что в теневом анализе нет устоявшейся терминологии. Последовательностью Шеффера может называться последовательность строк матрицы $\left[b(x)\right]\left\langle a(x)\right\rangle\left|e^x\right|$, так что даже классические полиномы у различных авторов выглядят по-разному. Теневой матрицей последовательности Шеффера может называться не матрица $\left[b(x)\right]\left\langle a(x)\right\rangle$, а обратная к ней, т.е

$$\left\langle\tilde{a}(x)\right\rangle\left[b^{-1}(x)\right] = \left[b^{-1}(\tilde{a}(x))\right]\left\langle\tilde{a}(x)\right\rangle,\ a(\tilde{a}(x)) = x.$$

На суть теории эти разногласия не влияют.

Множество теневых матриц также называют группой Риордана. При этом используют обозначение

$$\left[b(x)\right]\left\langle a(x)\right\rangle = (b(x), a(x)).$$

Теневое исчисление изначально развивалось самостоятельно, не опираясь на теневые матрицы. После выявления соответствия между теневым анализом и алгеброй формальных степенных рядов возникает вопрос – почему существуют два различных языка для описания одних и тех же феноменов? Такое расточительство в математике не может быть случайным. К тому же, при переводе с одного языка на другой то и дело наблюдаются удивительные «превращения», суть которых даже трудно сформулировать. Например, почему в результате трансформации $\left|e^x\right|^{-1}\left\langle\log(1+x)\right\rangle\left|e^x\right|$ строки матрицы $\left\langle\log(1+x)\right\rangle$ «превращаются» в полиномы $\prod_{m=0}^{n-1}(x-m)$, а в результате трансформации $\left|e^x\right|^{-1}\left\langle e^x-1\right\rangle\left|e^x\right|$ столбцы матрицы $\left\langle e^x-1\right\rangle$ «превращаются» в ряды $x^n\prod_{m=0}^{n}(1-mx)^{-1}$. Скорее, уместна аналогия не с двумя языками, а с двумя сторонами одного и того же явления. Под «явлением» же, вероятней всего, следует понимать структуру пространства формальных степенных рядов.

## 2. Обобщенные ряды Лагранжа

Для ряда

$$a(x),\ a_0=1,\ a_1=1,$$

составим таблицу $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_0$, $k$-й строкой которой ($k$ – целое число) является ряд

$$a^{k\beta}(x),\ \beta>0.$$

Каждую строку таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_0$ заменим восходящей диагональю, имеющей со строкой общий нулевой член. Полученную таблицу обозначим $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_1$. С таблицей $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_1$ проделаем ту же операцию, результат обозначим $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_2$. С таблицей $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_2$ проделаем ту же операцию, и т. д. Каждую строку таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_0$ заменим нисходящей диагональю, имеющей со строкой общий нулевой член, результат обозначим $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_{-1}$. С таблицей $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_{-1}$ проделаем ту же операцию, и т. д.

Оказывается, что $k$-я строка таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_{\nu}$ является произведением рядов ${}_{(\nu\beta)}b(x)$ и ${}_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)$, определяемых равенствами

$$ {}_{(\nu\beta)}b(x) = 1 + \nu\beta x\left(\log {}_{(\nu\beta)}a(x)\right)', $$

$$ a\left(x\,{}_{(\nu\beta)}a^{\nu\beta}(x)\right) = {}_{(\nu\beta)}a(x), \quad {}_{(\nu\beta)}a\left(x a^{-\nu\beta}(x)\right) = a(x), $$

$$ a(x) = {}_{(0)}a(x). $$

Это можно вывести из формулы разложения в ряд Лагранжа для произвольных формальных степенных рядов $f(x)$ и $\varphi(x)$

$$ \frac{f(x)}{1 - x\left(\log\varphi(x)\right)'} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \varphi^{-n}(x) \frac{1}{n!}\left|D^n\left(f(x)\varphi^n(x)\right)\right|_{x=0} $$

(выражение $\frac{1}{n!}\left|D^n\left(f(x)\varphi^n(x)\right)\right|_{x=0}$ означает $n$-й коэффициент ряда $f(x)\varphi^n(x)$), если учесть, что $k$-я строка таблицы $\left\{a^{n\beta}(x)\right\}_1$ совпадает с $nk$-й строкой таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_n$, $k$-я строка таблицы $\left\{a^{n\beta}(x)\right\}_{-1}$ совпадает с $nk$-й строкой таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_{-n}$.

В некоторых исключительных случаях ряды, полученные описанным способом, выражаются аналитически. Например, если $a(x) = 1 + x$, то

$$ {}_{(1)}a(x) = (1 - x)^{-1}, \quad {}_{(2)}a(x) = \left(\frac{1 + (1 - 4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-1}, $$

$$ {}_{(-1)}a(x) = \frac{1 + (1 + 4x)^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad {}_{(1/2)}a(x) = \left(\frac{x}{2} + \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2. $$

Подстановка $e^{\log a(x)}$ задается матрицей $\langle\log a(x)\rangle$. Пусть $(n\ m)$ – элемент этой матрицы, где $n$ – номер строки, $m$ – номер столбца. Обозначим

$$u_0(x)=1, \quad \frac{u_n(x)}{n!}=\frac{x\tilde{u}_n(x)}{n!}=\sum_{m=0}^{n}\frac{(n\ m)}{m!}x^m.$$

Последовательность полиномов $u_n(x)$ является биномиальной последовательностью, – назовем ее биномиальной последовательностью ряда $a(x)$. Так как

$$e^{\varphi \log a(x)}=a^{\varphi}(x),$$

то

$$a^{\varphi}(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi\tilde{u}_n(\varphi)}{n!}x^n.$$

Покажем, что

$$_{(v\beta)}a^{\varphi}(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi\tilde{u}_n(\varphi+nv\beta)}{n!}x^n.$$

$n$-й коэффициент ряда $_{(v\beta)}b(x)\,_{(v\beta)}a^{k\beta}(x)$ обозначим $_{(v\beta)}ba_n^{k\beta}$, $n$-й коэффициент ряда $_{(v\beta)}a^{k\beta}(x)$ обозначим $_{(v\beta)}a_n^{k\beta}$. Так как

$$_{(v\beta)}b(x)\,_{(v\beta)}a^{k\beta}(x)=\left(1+v\beta x\frac{_{(v\beta)}a'(x)}{_{(v\beta)}a(x)}\right)\,_{(v\beta)}a^{k\beta}(x)=$$

$$=_{(v\beta)}a^{k\beta}(x)+\frac{v\beta x}{k\beta}\left(_{(v\beta)}a^{k\beta}(x)\right)',$$

то

$$_{(v\beta)}ba_n^{k\beta}=\,_{(v\beta)}a_n^{k\beta}+\frac{nv\beta}{k\beta}\,_{(v\beta)}a_n^{k\beta}=\frac{k\beta+nv\beta}{k\beta}\,_{(v\beta)}a_n^{k\beta};$$

так как

$$_{(v\beta)}ba_n^{k\beta}=a_n^{(k+nv)\beta},$$

то

$$_{(v\beta)}a_n^{k\beta}=\frac{k\beta}{k\beta+nv\beta}a_n^{k\beta+nv\beta},$$

или

$$_{(v\beta)}a^{k\beta}(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k\beta\tilde{u}_n(k\beta+nv\beta)}{n!}x^n.$$

Последнее равенство означает, что биномиальная последовательность ряда ${}_{(\nu\beta)}a(x)$ имеет вид

$$ {}_{(\nu\beta)}u_n(x) = x\tilde{u}_n(x+n\nu\beta) = x(x+n\nu\beta)^{-1}u_n(x+n\nu\beta). $$

Отметим еще одно свойство рассматриваемых рядов. Подстановки $a\left(x_{(\nu\beta)}a^{\nu\beta}(x)\right)$ и ${}_{(\nu\beta)}a\left(xa^{-\nu\beta}(x)\right)$ взаимообратные. Пусть обратной к $e^{\log a(x)}$ является подстановка

$$ a(q(x)) = e^x. $$

Так как

$$ \exp\left(\log a\left(x_{(\nu\beta)}a^{\nu\beta}(x)\right)\right) = \exp\left(\log{}_{(\nu\beta)}a(x)\right) = {}_{(\nu\beta)}a(x), $$

то

$$ {}_{(\nu\beta)}a\left(q(x)a^{-\nu\beta}(q(x))\right) = {}_{(\nu\beta)}a\left(q(x)e^{-\nu\beta x}\right) = e^x, $$

или

$$ \left\langle \log{}_{(\nu\beta)}a(x)\right\rangle^{-1} = \left\langle q(x)e^{-\nu\beta x}\right\rangle. $$

Например,

$$ a(x) = (1+2x)^{\frac{1}{2}}, \quad {}_{(1)}a(x) = x + \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}, $$

$$ a\left(\frac{e^{2x}-1}{2}\right) = e^x, \quad {}_{(1)}a\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = e^x. $$

$n$-й столбец матрицы

$$ \left|e^x\right|^{-1}\left\langle q(x)e^{-\nu\beta x}\right\rangle\left|e^x\right| $$

обозначим

$$ {}_{(\nu\beta)}q_n(x), \quad {}_{(0)}q_n(x) = q_n(x). $$

${}_{(\nu\beta)}q_n(x)$ совпадает с $n$-м столбцом матрицы

$$ \left|e^x\right|^{-1}\left[e^{-n\nu\beta}\right]\left\langle q(x)\right\rangle\left|e^x\right|. $$

Учитывая равенство

$$ \left|e^x\right|^{-1}\left[e^{\varphi x}\right]\left|e^x\right| = \left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle, $$

выводим

$$_{(\nu\beta)}q_n(x) = (1+n\nu\beta)^{-1} q_n\left(\frac{x}{1+n\nu\beta}\right).$$

## 3. Неклассический теневой анализ. Последовательности Боаса-Бака

### 3.1. Обобщенные биномиальные коэффициенты

Неклассический (обобщенный) теневой анализ [4], [5] изучает свойства последовательностей полиномов $s_n(x)$, производящие функции которых имеют вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n s_n(\varphi) x^n = b(x) c(\varphi a(x)),$$

$$c_n \neq 0,\ b_0 \neq 0,\ a_0 = 0,\ a_1 \neq 0,$$

где $c(x)$, $b(x)$, $a(x)$ – формальные степенные ряды. Диагональную матрицу, диагональные элементы которой равны коэффициентам ряда $c(x)$, обозначим $|c(x)|$:

$$|c(x)| a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n x^n,\ |c(x)|^{-1} a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{c_n} x^n.$$

Последовательность строк матрицы

$$|c(x)|^{-1} [b(x)] \langle a(x) \rangle |c(x)|$$

называется последовательностью Боаса-Бака. Приведем примеры последовательностей Боаса-Бака и соответствующих им матриц.

Полиномы Лежандра (для упрощения записи производящей функции опустим обратную диагональную матрицу ):

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m},$$

$$\left[\frac{1}{\left(1+x^2\right)^{1/2}}\right]\left\langle\frac{x}{1+x^2}\right\rangle\left|\frac{1}{\left(1-2x\right)^{1/2}}\right|,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(\varphi)x^n = \frac{1}{\left(1-2\varphi x+x^2\right)^{1/2}}.$$

Полиномы Чебышева первого и второго рода ( $c(x)=(1-x)^{-1}$, $|c(x)|$ – единичная матрица, и ее можно опустить):

$$T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{m=1}^{n}\left(x-\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]\left\langle\frac{2x}{1+x^2}\right\rangle,\quad 2\sum_{n=0}^{\infty} T_n(\varphi)x^n = \frac{1-x^2}{1-2\varphi x+x^2};$$

$$U_n(x) = 2^n\prod_{m=1}^{n}\left(x-\cos\frac{m}{n+1}\pi\right),$$

$$\left[\frac{1}{1+x^2}\right]\left\langle\frac{2x}{1+x^2}\right\rangle,\quad \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\varphi)x^n = \frac{1}{1-2\varphi x+x^2}.$$

С последовательностями Боаса-Бака тесно связано одно из самых известных обобщений биномиальных коэффициентов [6, стр.106]. Для коэффициентов ряда $b(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $b_0=0$, $b_n\neq 0$ при $n>0$, обозначим:

$$b_0! = 1,\ b_n! = \prod_{m=1}^{n} b_m,$$

$$\binom{n}{m}_b = \frac{b_n!}{b_m!b_{n-m}!};\ \binom{n}{m}_b = 0,\ m>n.$$

Тогда

$$\binom{n}{m}_b = \binom{n-1}{m-1}_b + \frac{b_n-b_m}{b_{n-m}}\binom{n-1}{m}_b.$$

Обозначим

$$c(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\tilde{c}_n}x^n,\quad \frac{1}{\tilde{c}_n}=c_n.$$

Рассмотрим трансформацию

$$|c(x)|^{-1}[c(x)]|c(x)|=\begin{pmatrix}
\frac{\tilde{c}_0}{\tilde{c}_0\tilde{c}_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
\frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_0\tilde{c}_1} & \frac{\tilde{c}_1}{\tilde{c}_1\tilde{c}_0} & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
\frac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_0\tilde{c}_2} & \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_1\tilde{c}_1} & \frac{\tilde{c}_2}{\tilde{c}_2\tilde{c}_0} & 0 & 0 & \cdot\\
\frac{\tilde{c}_3}{\tilde{c}_0\tilde{c}_3} & \frac{\tilde{c}_3}{\tilde{c}_1\tilde{c}_2} & \frac{\tilde{c}_3}{\tilde{c}_2\tilde{c}_1} & \frac{\tilde{c}_3}{\tilde{c}_3\tilde{c}_0} & 0 & \cdot\\
\frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_0\tilde{c}_4} & \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_1\tilde{c}_3} & \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_2\tilde{c}_2} & \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_3\tilde{c}_1} & \frac{\tilde{c}_4}{\tilde{c}_4\tilde{c}_0} & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}.$$

Первый столбец матрицы обозначим $b(x)$. Элемент матрицы, стоящий на пересечении $n$-й строки и $m$-го столбца обозначим $(n\ m)$. Если $c_0=1$, то

$$\tilde{c}_n=\tilde{c}_1^n b_n!,\quad (n\ m)=\binom{n}{m}_b.$$

Оператор

$$|c(x)|[c(x)]^*|c(x)|^{-1}=E_{c(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n D_{c(x)}^n,$$

где

$$D_{c(x)}=|c(x)|[x]^*|c(x)|^{-1},$$

обобщает оператор сдвига, оператор $D_{c(x)}$ обобщает оператор дифференцирования. Ряд $c(x)$ является собственной функцией оператора $D_{c(x)}$ с собственным значением единица:

$$D_{c(x)}c(x)=c(x).$$

Оператор $D_{c(x)}$ связан с операторами $[x]$, $D$ равенством

$$D_{c(x)}=[x]^*\sum_{n=1}^{\infty}d_n[x^n]D^n,$$

где $[x]^*[x^n]=[x^{n-1}]$, $[x^n]D^n$ – диагональная матрица, диагональные элементы которой равны коэффициентам ряда $\dfrac{n!x^n}{(1-x)^{n+1}}$. Следовательно, коэффициенты $d_n$ в разложении $D_{c(x)}$ равны коэффициентам ряда

$$|e^x|\left[\frac{1}{1+x}\right]\left\langle\frac{x}{1+x}\right\rangle b(x),$$

где $b(x)$ – первый столбец матрицы $|c(x)^{-1}|[c(x)]|c(x)|$(из симметрии биномиальных коэффициентов вытекает, что отличные от нуля элементы матрицы $D_{c(x)}$ равны соответствующим коэффициентам ряда $b(x)$).

Матрицу $|c(x)|$ назовем базисом теневой матрицы. Существует особый класс базисов, к рассмотрению которых мы приступаем.

## 3. 2. Классический базис

Классический базис, $c(x)=e^x$, выделяется тем, что в нем наиболее отчетливо проявляется структура, задаваемая рядами Лагранжа.

Как мы выяснили, с каждым рядом

$$a(x),\ a_0=1,\ a^{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{\varphi}x^n$$

посредством преобразований Лагранжа связано множество рядов

$$_{(\beta)}a(x),\ \ _{(0)}a(x)=a(x),$$

таких, что

$$\left(1+x\beta\left(\log{}_{(\beta)}a(x)\right)'\right){}_{(\beta)}a^{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{\varphi+\beta n}x^n;$$

$$ {}_{(\beta)}a^{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi}{\varphi+\beta n}a_n^{\varphi+\beta n}x^n\ , $$

$$ a\left(x_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right)={}_{(\beta)}a(x),\ \ {}_{(\beta)}a\left(xa^{-\beta}(x)\right)=a(x); $$

$$ \left\langle x_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right\rangle^{-1}=\left\langle xa^{-\beta}(x)\right\rangle, $$

$$ \left(\left[1+x\beta\left(\log_{(\beta)}a(x)\right)'\right]\left\langle x_{(\beta)}a^{\beta}(x)\right\rangle\right)^{-1}=\left[1-x\beta\left(\log a(x)\right)'\right]\left\langle xa^{-\beta}(x)\right\rangle. $$

(Ранее на ряд ${}_{(\beta)}a(x)$, кроме условия ${}_{(\beta)}a_0=1$, накладывалось дополнительное условие ${}_{(\beta)}a_1=1$, что придавало рассматриваемой конструкции упорядоченность и наглядность. Практически же этим условием можно пренебречь, – вышеприведенные равенства не изменятся. Допускается даже случай ${}_{(\beta)}a_1=0$, но тогда матрица $\left\langle\log_{(\beta)}a(x)\right\rangle$ не будет иметь обратной.)

$n$-ю строку матрицы

$$ \left|e^x\right|^{-1}\left\langle\log_{(\beta)}a(x)\right\rangle\left|e^x\right| $$

обозначим

$$ {}_{(\beta)}u_n(x),\ \ {}_{(0)}u_n(x)=u_n(x); $$

$n$-й столбец обратной матрицы

$$ \left|e^x\right|^{-1}\left\langle\log_{(\beta)}a(x)\right\rangle^{-1}\left|e^x\right|=\left|e^x\right|^{-1}\left\langle q(x)e^{-\beta x}\right\rangle\left|e^x\right|, $$

где

$$ \left\langle\log a(x)\right\rangle^{-1}=\left\langle q(x)\right\rangle, $$

обозначим

$$ {}_{(\beta)}q_n(x),\ \ {}_{(0)}q_n(x)=q_n(x). $$

Тогда

$$ {}_{(\beta)}u_n(x)=x(x+\beta n)^{-1}u_n(x+\beta n), $$

$$ {}_{(\beta)}q_n(x)=(1+\beta nx)^{-1}q_n\left(\frac{x}{1+\beta nx}\right), $$

$$ {}_{(\beta)}a^{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{{}_{(\beta)}u_n(\varphi)}{n!}x^n, $$

$$ \sum_{n=0}^{\infty}{}_{(\beta)}u_n(\varphi)_{(\beta)}\,q_n(x)=(1-\varphi x)^{-1}. $$

Применительно к экспоненциальному и биномиальному ряду:

$$ a(x)=e^x, $$

$$ \left|e^x\right|^{-1}\left\langle \log_{(\beta)}a(x)\right\rangle^{-1}\left|e^x\right|=\left|e^x\right|^{-1}\left\langle xe^{-\beta x}\right\rangle\left|e^x\right|, $$

$$ u_n(x)=x^n,\ {}_{(\beta)}u_n(x)=x(x+\beta n)^{n-1}, $$

$$ q_n(x)=x^n,\quad {}_{(\beta)}q_n(x)=x^n(1+\beta nx)^{-n-1}. $$

$$ a(x)=1+x, $$

$$ \left|e^x\right|^{-1}\left\langle \log_{(\beta)}a(x)\right\rangle^{-1}\left|e^x\right|=\left|e^x\right|^{-1}\left\langle \left(e^x-1\right)e^{-\beta x}\right\rangle\left|e^x\right|, $$

$$ {}_{(\beta)}u_0(x)=1,\ \ {}_{(\beta)}u_1(x)=x $$

$$ u_n(x)=x\prod_{m=1}^{n-1}(x-m),\ {}_{(\beta)}u_n(x)=x\prod_{m=1}^{n-1}(x+\beta n-m) $$

$$ q_n(x)=x^n\prod_{m=0}^{n}(1-mx)^{-1},\quad {}_{(\beta)}q_n(x)=x^n\prod_{m=0}^{n}(1+(\beta n-m)x)^{-1}, $$

Обобщенный экспоненциальный ряд

$$ a(x)=e^x, $$

$$ {}_{(\beta)}a^{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi(\varphi+\beta n)^{n-1}}{n!}x^n, $$

является предельным случаем обобщенного биномиального ряда

$$ a(x)=1+x, $$

$$ {}_{(\nu\beta)}a^{\nu\varphi}(x/\nu)=1+\varphi x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n\nu\varphi}{\nu^n n!}\prod_{m=1}^{n-1}(\nu\varphi+\nu\beta n-m) $$

при $\nu\to\infty$ [7, стр.399].

## 3. 3. Единичный базис. Роль полиномов Чебышева

### 3. 3. 1

Если $c(x)=(1-x)^{-1}$, то $|c(x)|$ – единичная матрица, и предметом изучения являются матрицы

$$ [b(x)]\langle xa(x)\rangle,\ a_0=1. $$

Классический и единичный базис связаны равенством

$$ \left|e^x\right|^{-1}\left[e^{\varphi x}\right]\left|e^x\right|=\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle. $$

В этой связи определенную роль играют полиномы Чебышева.

$n$-й строкой матрицы

$$ \left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+x^2}\right\rangle=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 2 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 5 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ -2 & 0 & 9 & 0 & -6 & 0 & 1 & \cdot \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} $$

является полином

$$\prod_{m=1}^{n}\left(x-2\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$n$-й строкой матрицы

$$\left[\frac{1}{1+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+x^2}\right\rangle=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ -1 & 0 & 6 & 0 & -5 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

является полином

$$\prod_{m=1}^{n}\left(x-2\cos\frac{m}{n+1}\pi\right).$$

Следовательно, $n$-й строкой матрицы

$$\left[\frac{1-\beta x^2}{1-\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}\right\rangle=\left[\frac{1-\beta x^2}{1+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle$$

является полином

$$c_{n,\varphi,\beta}(x)=\prod_{m=1}^{n}\left(x+\varphi-2\sqrt{\beta}\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$n$-й строкой матрицы

$$\left[\frac{1}{1-\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}\right\rangle=\left[\frac{1}{1+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle$$

является полином

$$s_{n,\varphi,\beta}(x)=\prod_{m=1}^{n}\left(x+\varphi-2\sqrt{\beta}\cos\frac{m}{n+1}\pi\right).$$

Обозначим

$$a^n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m^n x^m,\quad {}_{(-1)}a^n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}{}_{(-1)}a_m^n x^m,$$

где

$$ {}_{(-1)}a\left(xa(x)\right)=a(x),\quad a\left(x_{(-1)}a^{-1}(x)\right)={}_{(-1)}a(x), $$

$$ \left\langle xa(x)\right\rangle^{-1}=\left\langle x_{(-1)}a^{-1}(x)\right\rangle. $$

Тогда

$$ \left(1+x(\log a(x))'\right)a^n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}{}_{(-1)}a_m^{n+m}x^m, $$

$$ \left(1-x\left(\log{}_{(-1)}a(x)\right)'\right){}_{(-1)}a^n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}a_m^{n-m}x^m. $$

Отсюда видно, что $n$-я строка матрицы

$$ \left[1+x(\log a(x))'\right]\left\langle xa(x)\right\rangle=\begin{pmatrix} {}_{(-1)}a_0^0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ {}_{(-1)}a_1^1 & {}_{(-1)}a_0^1 & 0 & 0 & \cdot \\ {}_{(-1)}a_2^2 & {}_{(-1)}a_1^2 & {}_{(-1)}a_0^2 & 0 & \cdot \\ {}_{(-1)}a_3^3 & {}_{(-1)}a_2^3 & {}_{(-1)}a_1^3 & {}_{(-1)}a_0^3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} $$

совпадает с $n$-й строкой матрицы

$$ \left[{}_{(-1)}a^n(x)\right], $$

$n$-я строка матрицы

$$ [a(x)]\left\langle xa(x)\right\rangle=\begin{pmatrix} a_0^1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_1^1 & a_0^2 & 0 & 0 & \cdot \\ a_2^1 & a_1^2 & a_0^3 & 0 & \cdot \\ a_3^1 & a_2^2 & a_1^3 & a_0^4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} $$

совпадает с $n$-й строкой матрицы

$$ \left[\left(1-x\left(\log{}_{(-1)}a(x)\right)'\right){}_{(-1)}a^{n+1}(x)\right]. $$

Если

$$ a(x)=\left(1-\varphi x+\beta x^2\right)^{-1}, $$

то

$$1+x(\log a(x))'=\frac{1-\beta x^2}{1-\varphi x+\beta x^2},$$

$$_{(-1)}a(x)=\frac{1+\varphi x+\left(1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

$$1-x\left(\log{}_{(-1)}a(x)\right)'=\left(1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Отсюда выводим:

$$_{(-1)}a^n(x)=\frac{\hat{c}_{n,\varphi,\beta}(x)+\hat{s}_{n-1,\varphi,\beta}(x)\left(1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

$$\beta^n x^{2n}{}_{(-1)}a^{-n}(x)=\frac{\hat{c}_{n,\varphi,\beta}(x)-\hat{s}_{n-1,\varphi,\beta}(x)\left(1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

где

$$\hat{c}_{0,\varphi,\beta}(x)=2,\quad \hat{s}_{-1,\varphi,\beta}(x)=0,$$

$$\hat{c}_{n,\varphi,\beta}(x)=\hat{I}_n c_{n,\varphi,\beta}(x),\ \ \hat{s}_{n,\varphi,\beta}(x)=\hat{I}_n s_{n,\varphi,\beta}(x),$$

$\hat{I}_n$ – оператор, переставляющий в обратном порядке коэффициенты полинома степени $n$ (матрица $\hat{I}_n$ получается из единичной матрицы размерности $(n+1)\times(n+1)$ перестановкой столбцов в обратном порядке):

$$\hat{I}_n\sum_{m=0}^{n}a_m x^m=\sum_{m=0}^{n}a_{n-m}x^m,$$

$$\hat{I}_n\prod_{m=1}^{n}(x+\varphi_m)=\prod_{m=1}^{n}\varphi_m\left(x+\frac{1}{\varphi_m}\right),\ \varphi_m\neq 0.$$

Отметим равенства

$$\left[\frac{1-x}{(1+x)^2}\right]\left\langle\frac{x}{(1+x)^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1-2x}\right]\left\langle\frac{x}{1-2x}\right\rangle=\left[\frac{1-x}{1+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+x^2}\right\rangle,$$

$$\left[\frac{1}{1+x}\right]\left\langle\frac{x}{(1+x)^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1-2x}\right]\left\langle\frac{x}{1-2x}\right\rangle=\left[\frac{1+x}{1+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+x^2}\right\rangle,$$

аналогичные равенствам

$$\left[\frac{1-x}{1+x}\right]\left\langle\frac{x}{(1+x)^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1-2x}\right]\left\langle\frac{x}{1-2x}\right\rangle=\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+x^2}\right\rangle,$$

$$\left[\frac{1}{(1+x)^2}\right]\left\langle\frac{x}{(1+x)^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1-2x}\right]\left\langle\frac{x}{1-2x}\right\rangle=\left[\frac{1}{1+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+x^2}\right\rangle.$$

$n$-й строкой матрицы

$$\left[\frac{1-x}{(1+x)^2}\right]\left\langle\frac{x}{(1+x)^2}\right\rangle=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -3 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 5 & -5 & 1 & 0 & \cdot \\ -7 & 14 & -7 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

является полином

$$\prod_{m=1}^{n}\left(x-4\cos^2\frac{2m-1}{2(2n+1)}\pi\right),$$

$n$-й строкой матрицы

$$\left[\frac{1}{1+x}\right]\left\langle\frac{x}{(1+x)^2}\right\rangle=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & -3 & 1 & 0 & \cdot \\ -1 & 6 & -5 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

является полином

$$\prod_{m=1}^{n}\left(x-4\cos^2\frac{m}{2n+1}\pi\right);$$

так как $2\cos^2\varphi - 1 = \cos 2\varphi$, то $n$-й строкой матрицы

$$\left[\frac{1-x}{1+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+x^2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 3 & 3 & -4 & -1 & 1 & 0 & \cdot \\ -1 & -3 & 6 & 4 & -5 & -1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

является полином

$$p_n(x) = \prod_{m=1}^{n}\left(x - 2\cos\frac{2m-1}{2n+1}\pi\right),$$

$n$-й строкой матрицы

$$\left[\frac{1+x}{1+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+x^2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & -2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 3 & -3 & -4 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ -1 & 3 & 6 & -4 & -5 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

является полином

$$\tilde{p}_n(x) = \prod_{m=1}^{n}\left(x - 2\cos\frac{2m}{2n+1}\pi\right),$$

причем

$$\tilde{p}_n(x) = (-1)^n p_n(-x).$$

Оператору сдвига $E^{\varphi}$ соответствует подстановка $\langle x+\varphi\rangle$. Преобразование $\langle\varphi - x\rangle$ является отражением:

$$\langle\varphi - x\rangle\langle\varphi - x\rangle = \langle x\rangle.$$

Каждый полином $a(x)$ раскладывается в сумму полиномов $a_1(x)$, $a_2(x)$, таких, что

$$\langle\varphi - x\rangle a_1(x) = a_1(x), \quad \langle\varphi - x\rangle a_2(x) = -a_2(x).$$

Так как
$$\langle x+\varphi\rangle=\langle -x\rangle\langle \varphi-x\rangle,$$
то
$$\langle x+\varphi\rangle a_1(x)=a_1(-x),\ \langle x+\varphi\rangle a_2(x)=-a_2(-x).$$

Соответственно, каждый ряд $b(x)$ раскладывается в сумму рядов $b_1(x)$, $b_2(x)$, таких, что
$$\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle b_1(x)=b_1(-x),$$
$$\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle b_2(x)=-b_2(-x).$$

Последовательность строк матрицы $A$:
$$A\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle=\langle -x\rangle A\langle -x\rangle,$$

назовем собственным базисом преобразования $\langle x+\varphi\rangle$; последовательность столбцов матрицы $B$:
$$\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle B=\langle -x\rangle B\langle -x\rangle,$$
назовем собственным базисом преобразования $\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle$. Полиномы $a_1(x)$, $a_2(x)$ раскладываются в комбинацию соответственно четных и нечетных строк матрицы $A$; ряды $b_1(x)$, $b_2(x)$ раскладываются в комбинацию соответственно четных и нечетных столбцов матрицы $B$.

Пусть $a(x)$ – четная строка матрицы $A$, $b(x)$ – нечетный столбец матрицы $B$. Скалярным произведением $a(x)$ и $b(x)$ назовем число
$$(a(x),\ b(x))=\sum_{n=0}^{\infty}a_nb_n.$$

Равенство скалярного произведения нулю назовем ортогональностью. Так как $\langle x+\varphi\rangle$ и $\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle$ – сопряженные преобразования, то

$$(a(x),\ b(x))=(a(-x),-b(-x))=0.$$

Таким образом, каждая четная строка матрицы $A$ ортогональна каждому нечетному столбцу матрицы $B$; соответственно, каждая нечетная строка матрицы $A$ ортогональна каждому четному столбцу матрицы $B$.

Отметим, что

$$\left[\frac{1-x^2}{1-\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1+2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1+2\varphi x}\right\rangle=$$

$$=\left[\frac{1-x^2}{1+\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x+\beta x^2}\right\rangle=\langle -x\rangle\left[\frac{1-x^2}{1-\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}\right\rangle\langle -x\rangle,$$

$$\left[\frac{1}{1-\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1+2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1+2\varphi x}\right\rangle=$$

$$=\left[\frac{1}{1+\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x+\beta x^2}\right\rangle=\langle -x\rangle\left[\frac{1}{1-\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2}\right\rangle\langle -x\rangle.$$

Соответственно,

$$\left[\frac{1}{1-2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-2\varphi x}\right\rangle\left[1-x\left(\log_{(-1)}a(x)\right)'\right]\left\langle x_{(-1)}a^{-1}(x)\right\rangle=$$

$$=\langle -x\rangle\left[1-x\left(\log_{(-1)}a(x)\right)'\right]\left\langle x_{(-1)}a^{-1}(x)\right\rangle\langle -x\rangle,$$

$$\left[\frac{1}{1-2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-2\varphi x}\right\rangle\left[{}_{(-1)}a^{-1}(x)\right]\left\langle x_{(-1)}a^{-1}(x)\right\rangle=$$

$$=\langle -x\rangle\left[{}_{(-1)}a^{-1}(x)\right]\left\langle x_{(-1)}a^{-1}(x)\right\rangle\langle -x\rangle,$$

где

$${}_{(-1)}a(x)=\frac{1+\varphi x+\left(1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

$$1-x\left(\log_{(-1)} a(x)\right)' = \left(1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

**3. 3. 2**

Сопоставляя матрицы

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1+x^2}{1-x^2}\right]\left\langle\frac{2x}{1-x^2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & \cdot \\ 0 & 5 & 0 & 20 & 0 & 16 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\left[\frac{1-x}{1-2x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2x}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 2 & 1 & 0 & \cdot \\ 4 & 3 & 0 & \cdot \\ 8 & 8 & 1 & \cdot \\ 16 & 20 & 5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

заключаем, что $n$-й строкой матрицы $\left[\frac{1-x}{1-2x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2x}\right\rangle$, $n>0$, является полином

$$d_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\sec^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right),\ d_n=1,\ d_n=n,$$

где первое значение $d_n$ берется при четном $n$, второе – при нечетном $n$; сопоставляя матрицы

$$\left[\frac{1}{1-x^2}\right]\left\langle\frac{2x}{1-x^2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 12 & 0 & 16 & 0 & \cdot \\ 0 & 6 & 0 & 32 & 0 & 32 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\left[\frac{x}{1-2x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2x}\right\rangle=\begin{pmatrix}0&0&0&\cdot\\1&0&0&\cdot\\2&0&0&\cdot\\4&1&0&\cdot\\8&4&0&\cdot\\16&12&1&\cdot\\32&32&6&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

заключаем, что $n$-й строкой матрицы $\left[\frac{x}{1-2x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2x}\right\rangle$ является полином

$$l_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(x+\sec^2\frac{m}{n}\pi\right),\ l_n=n,\ l_n=1.$$

Следовательно, $n$-й строкой матрицы

$$\left[\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right\rangle=$$

$$=\left[\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x}\right\rangle\left[\frac{1}{1+\beta x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x}\right\rangle$$

является полином

$$t_{n,\varphi,\beta}(x)=p_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\frac{\varphi^2-\beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}{\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}\right),\ p_n=1,\ p_n=n\varphi;$$

$n$-й строкой матрицы

$$\left[\frac{x}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right\rangle=$$

$$=\left[\frac{x}{1-2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x}\right\rangle\left[\frac{1}{1+\beta x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x}\right\rangle,$$

является полином

$$u_{n,\varphi,\beta}(x)=r_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(x+\frac{\varphi^2-\beta\cos^2\frac{m}{n}\pi}{\cos^2\frac{m}{n}\pi}\right),\ r_n=n\varphi,\ r_n=1.$$

Последовательность столбцов матрицы

$$\left[\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right\rangle$$

совпадает с последовательностью четных столбцов матрицы

$$\left[\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{\left(1-2\varphi x+\beta x^2\right)^{1/2}}\right\rangle,$$

последовательность столбцов матрицы

$$\left[\frac{x}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right\rangle$$

совпадает с последовательностью нечетных столбцов матрицы

$$\left[\frac{1}{\left(1-2\varphi x+\beta x^2\right)^{1/2}}\right]\left\langle\frac{x}{\left(1-2\varphi x+\beta x^2\right)^{1/2}}\right\rangle.$$

Обозначим

$$a(x)=\left(1-2\varphi x+\beta x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$1+x(\log a(x))'=\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2},$$

$${}_{(-1)}a(x)=\varphi x+\left(1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$${}_{(-1)}a^{-1}(x)=\frac{\varphi x-\left(1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\beta x^2-1},$$

$$1-x\left(\log_{(-1)}a(x)\right)'=\left(1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2\right)^{-\frac{1}{2}}{}_{(-1)}a^{-1}(x).$$

Отсюда, учитывая алгоритм разложения в бином Ньютона выражения

$$\left(\varphi x+\left(1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^n,$$

выводим:

$${}_{(-1)}a^n(x)=\hat{t}_{n,\varphi,\beta}(x)+\hat{u}_{n,\varphi,\beta}(x)\left(1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(\beta x^2-1\right)^n{}_{(-1)}a^{-n}(x)=\hat{t}_{n,\varphi,\beta}(x)-\hat{u}_{n,\varphi,\beta}(x)\left(1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$\hat{t}_{n,\varphi,\beta}(x)=\hat{I}_n t_{n,\varphi,\beta}\left(x^2\right)=$$

$$=p_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\frac{\varphi^2-\beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}{\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}\right)\prod_{m=1}^{n}\left(x+\frac{i\cos\frac{2m-1}{2n}\pi}{\sqrt{\varphi^2-\beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}}\right),$$

$i=\sqrt{-1}$, множитель $\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sec^2\frac{2m-1}{2n}\pi$ равен $2^{n-1}$, если $n$ четно, и $\frac{2^{n-1}}{n}$, если $n$ нечетно; если один из сомножителей (в случае $\hat{t}_{n,0,0}(x)$ – любой из сомножителей) множителя $\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\varphi^2-\beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right)$ равен нулю, он заменяется на $\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi$ с соответствующим значением $m$; соответствующий нулевому множителю полином

$$x^2+\frac{\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}{\varphi^2-\beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}$$

заменяется на единицу;

$$\hat{u}_{n,\varphi,\beta}(x) = \hat{I}_{n-1} u_{n,\varphi,\beta}(x^2) =$$

$$= r_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left( \frac{\varphi^2 - \beta\cos^2 \frac{m}{n}\pi}{\cos^2 \frac{m}{n}\pi} \right) \prod_{m=1}^{n-1} \left( x + \frac{i\cos \frac{m}{n}\pi}{\sqrt{\varphi^2 - \beta\cos^2 \frac{m}{n}\pi}} \right),$$

множитель $\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sec^2 \frac{m}{n}\pi$ равен $\frac{2^{n-1}}{n}$, если $n$ четно, и $2^{n-1}$, если $n$ нечетно; если один из сомножителей (в случае $\hat{u}_{n,0,0}(x)$ – любой из сомножителей) множителя $\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left( \varphi^2 - \beta\cos^2 \frac{m}{n}\pi \right)$ равен нулю, он заменяется на $\cos^2 \frac{m}{n}\pi$ с соответствующим значением $m$; соответствующий нулевому множителю полином

$$x^2 + \frac{\cos^2 \frac{m}{n}\pi}{\varphi^2 - \beta\cos^2 \frac{m}{n}\pi}$$

заменяется на единицу.

Учтем равенства

$$\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sin^2 \frac{2m-1}{2n}\pi = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \sin^2 \frac{m}{n}\pi = \frac{n}{2^{n-1}},$$

и отметим, что

$$\hat{t}_{n,1,1}(x) = \frac{(x+1)^n + (x-1)^n}{2}, \quad \hat{u}_{n,1,1}(x) = \frac{(x+1)^n - (x-1)^n}{2};$$

$$\hat{t}_{2n,0,-1}(x) = \left(1 + x^2\right)^n, \quad \hat{u}_{2n,0,-1}(x) = 0,$$

$$\hat{t}_{2n+1,0.-1}(x) = 0, \quad \hat{u}_{2n+1,0,-1}(x) = \left(1 + x^2\right)^n,$$

$$\hat{t}_{2n,0,0}(x)=1, \qquad \hat{u}_{2n,0,0}(x)=0,$$

$$\hat{t}_{2n+1,0,0}(x)=0, \qquad \hat{u}_{2n+1,0,0}(x)=1.$$

Полиномы $\hat{t}_{n,1,1}(x)$, $\hat{u}_{n,1,1}(x)$ связаны с полиномами

$$x^n+1=\frac{x^{2n}-1}{x^n-1}, \;\; x^n-1$$

последовательностью преобразований:

$$\frac{1}{2}\hat{I}_n\langle 2x\rangle\hat{I}_n\left\langle x-\frac{1}{2}\right\rangle\hat{I}_n\langle x+1\rangle\left(x^n\pm 1\right)=\hat{t}_{n,1,1}(x), \;\; \hat{u}_{n,1,1}(x).$$

Подобная цепочка преобразований связывает $\hat{t}_{n,1,1}(x)$ с $\hat{t}_{n,\varphi,\beta}(x)$ и $\hat{u}_{n,1,1}(x)$ с $\hat{u}_{n,\varphi,\beta}(x)$.

Отметим, что

$$\left[\frac{1}{1+2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1+2\varphi x}\right\rangle\left[\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{\left(1-2\varphi x+\beta x^2\right)^{1/2}}\right\rangle=$$

$$=\left[\frac{1+\varphi x}{1+2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{\left(1+2\varphi x+\beta x^2\right)^{1/2}}\right\rangle=$$

$$=\langle -x\rangle\left[\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{\left(1-2\varphi x+\beta x^2\right)^{1/2}}\right\rangle\langle -x\rangle;$$

$$\left[\frac{1}{1+2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1+2\varphi x}\right\rangle\left[\frac{1}{\left(1-2\varphi x+\beta x^2\right)^{1/2}}\right]\left\langle\frac{x}{\left(1-2\varphi x+\beta x^2\right)^{1/2}}\right\rangle=$$

$$=\left[\frac{1}{\left(1+2\varphi x+\beta x^2\right)^{1/2}}\right]\left\langle\frac{x}{\left(1+2\varphi+\beta x^2\right)^{1/2}}\right\rangle=$$

$$=\langle -x\rangle\left[\frac{1}{\left(1-2\varphi x+\beta x^2\right)^{1/2}}\right]\left\langle\frac{x}{\left(1-2\varphi x+\beta x^2\right)^{1/2}}\right\rangle\langle -x\rangle.$$

Соответственно,

$$\left[1-x\left(\log_{(-1)}a(x)\right)'\right]\left\langle x_{(-1)}a^{-1}(x)\right\rangle\left[\frac{1}{1-2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-2\varphi x}\right\rangle=$$

$$=\langle -x\rangle\left[1-x\left(\log_{(-1)}a(x)\right)'\right]\left\langle x_{(-1)}a^{-1}(x)\right\rangle\langle -x\rangle;$$

$$\left[{}_{(-1)}a^{-1}(x)\right]\left\langle x_{(-1)}a^{-1}(x)\right\rangle\left[\frac{1}{1-2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-2\varphi x}\right\rangle=$$

$$=\langle -x\rangle\left[{}_{(-1)}a^{-1}(x)\right]\left\langle x_{(-1)}a^{-1}(x)\right\rangle\langle -x\rangle.$$

Если

$$a(x)=(1+x)^{-\frac{1}{2}},$$

то

$${}_{(-1)}a^{-1}(x)=\frac{x}{2}+\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$1-x\left(\log_{(-1)}a(x)\right)'=\frac{x}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}+1.$$

Переобозначим

$$b(x)=\frac{x}{2}+\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}},\quad {}_{(-1)}b(x)=(1+x)^{\frac{1}{2}}$$

и воспользуемся правилами: $n$-я строка матрицы

$$\left[1+x\left(\log b(x)\right)'\right]\left\langle xb(x)\right\rangle$$

совпадает с $n$-й строкой матрицы

$$\left[{}_{(-1)}b^{n}(x)\right],$$

$n$-я строка матрицы

$$[b(x)]\langle xb(x)\rangle$$

совпадает с $n$-й строкой матрицы

$$\left[\left(1-x\left(\log_{(-1)}b(x)\right)'\right)_{(-1)}b^{n+1}(x)\right].$$

Отсюда видно, что $2n$-й строкой матрицы $\left[1+x(\log b(x))'\right]\langle xb(x)\rangle$ является полином

$$x^n(1+x)^n,$$

т.е. $n$-й столбец матрицы

$$\langle x(1+x)\rangle.$$

Так как

$$1-x\left(\log(1+x)^{\frac{1}{2}}\right)'=\left(1+\frac{x}{2}\right)(1+x)^{-1},$$

то $(2n+1)$-й строкой матрицы $[b(x)]\langle xb(x)\rangle$ является полином

$$\left(\frac{1}{2}+x\right)x^n(1+x)^n,$$

т.е. $n$-й столбец матрицы

$$\left[\frac{1}{2}+x\right]\langle x(1+x)\rangle.$$

### 3.3.3

$n$-ю строку матрицы

$$[1+2x]\langle x(1+x)\rangle=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&\cdot\\2&1&0&0&0&0&\cdot\\0&3&1&0&0&0&\cdot\\0&2&4&1&0&0&\cdot\\0&0&5&5&1&0&\cdot\\0&0&2&9&6&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

обозначим $c_n(x)$, $n$-ю строку матрицы

$$\langle x(1+x)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

обозначим $s_n(x)$. Тогда

$$\hat{c}_n(x) = \hat{I}_n c_n(x) = p_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \left( x + \frac{1}{4}\sec^2 \frac{2m-1}{2(n+1)}\pi \right),$$

$$p_n = n+1,\ p_n = 2;$$

$$\hat{s}_n(x) = \hat{I}_n s_n(x) = r_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left( x + \frac{1}{4}\sec^2 \frac{m}{n+1}\pi \right),$$

$$r_n = 1,\ r_n = \frac{n+1}{2}.$$

Если

$$a(x) = 1 + x,$$

то

$$_{(-1)}a(x) = \frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

$$\left(xa(x)\right)' = 1 + 2x, \quad \left(x_{(-1)}a^{-1}(x)\right)' = (1+4x)^{-\frac{1}{2}},$$

$$_{(-1)}a^n(x) = \frac{\hat{c}_{n-1}(x) + \hat{s}_{n-1}(x)(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

$$(-x)^n\, _{(-1)}a^{-n}(x) = \frac{\hat{c}_{n-1}(x) - \hat{s}_{n-1}(x)(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

где

$$\hat{c}_{-1}(x) = 2, \quad \hat{s}_{-1}(x) = 0.$$

Отметим равенства

$$\langle x-1\rangle\langle x(1+x)\rangle=\langle x(x-1)\rangle=\langle -x\rangle\langle x(1+x)\rangle,$$

$$\langle x-1\rangle[1+2x]\langle x(1+x)\rangle=[2x-1]\langle x(x-1)\rangle=$$

$$=-\langle -x\rangle[1+2x]\langle x(1+x)\rangle.$$

Матрицы

$$\langle x(x+1)\rangle,\ [1+2x]\langle x(1+x)\rangle,$$

кроме двухсторонних обратных матриц:

$$\left\langle\frac{(1+4x)^{\frac{1}{2}}-1}{2}\right\rangle,\quad \left[(1+4x)^{-\frac{1}{2}}\right]\left\langle\frac{(1+4x)^{\frac{1}{2}}-1}{2}\right\rangle,$$

имеют левосторонние обратные:

$$\left\langle\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right\rangle\langle -x\rangle,\quad -\left[(1+4x)^{-\frac{1}{2}}\right]\left\langle\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right\rangle\langle -x\rangle.$$

### 3.3.4

Равенство

$$|e^x|^{-1}[e^{\varphi x}]|e^x|=\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle.$$

является примером неоднозначного представления последовательностей Боаса-Бака. В данном случае, применительно к $s_n(x)=(x+\varphi)^n$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}s_n(\beta)x^n=(1-(\beta+\varphi)x)^{-1},\ \ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{s_n(\beta)}{n!}x^n=e^{(\beta+\varphi)x}.$$

Эта неоднозначность проявиться и в любом другом базисе. Например, полиномы Лагерра $L_n(x)$ можно рассматривать как строки матрицы

$$|e^x|^{-2}[e^x]\langle -x\rangle|e^x|^2:$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n(\beta)}{(n!)^2}x^n = e^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n}{(n!)^2}x^n .$$

Второй пример связан с рядами Лагранжа. Если

$$a^{\varphi}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{\varphi}x^n,\ a_0=1,$$

то

$$\left(1+x(\log a(x))'\right)a^{\varphi}(x)=(xa(x))'\,a^{\varphi-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi+n}{\varphi}a_n^{\varphi}x^n .$$

Обозначим

$$b(\varphi,x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi}{\varphi+n}x^n .$$

Тогда

$$|b(\varphi,x)|^{-1}\left[a^{\varphi}(x)\right]\langle xa(x)\rangle|b(\varphi,x)|=\left[(xa(x))'\,a^{\varphi-1}(x)\right]\langle xa(x)\rangle .$$

В частности,

$$\left|\frac{\log(1-x)^{-1}}{x}\right|^{-1}[a(x)]\langle xa(x)\rangle\left|\frac{\log(1-x)^{-1}}{x}\right|=\left[(xa(x))'\right]\langle xa(x)\rangle .$$

Применительно к классическому базису:

$$|e^x|^{-1}\left[(xa(x))'\right]\langle xa(x)\rangle|e^x|=\left|\frac{e^x-1}{x}\right|^{-1}[a(x)]\langle xa(x)\rangle\left|\frac{e^x-1}{x}\right| .$$

В [4] вопрос об альтернативных представлениях последовательностей Боаса-Бака решается с общей точки зрения.

## 4. Гауссов базис

Гауссов базис связан с классическим и единичным базисом следующим обобщением.

Пусть первым столбцом матрицы $\left|c(x)\right|^{-1}\left[c(x)\right]\left|c(x)\right|$ является ряд

$$b(x)=\frac{x}{(1-x)(1-qx)}=\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n,\quad b_n=\sum_{m=0}^{n-1}q^m,\ q\neq -1.$$

При $q=0$ получаем матрицу $\left[(1-x)^{-1}\right]$; при $q=1$ получаем матрицу $\left|e^x\right|^{-1}\left[e^x\right]\left|e^x\right|$; в остальных случаях получаем матрицу

$$G_{(q)}=\left|g(q,x)\right|^{-1}\left[g(q,x)\right]\left|g(q,x)\right|,$$

$$g(q,\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(q-1)^n}{(q^n-1)!}x^n,$$

где

$$(q^n-1)!=\prod_{m=1}^{n}(q^m-1),\ (q^0-1)!=1.$$

Элементы матрицы $G_{(q)}$ равны коэффициентам Гаусса:

$$\binom{n}{m}_q=\frac{(q^n-1)!}{(q^m-1)!(q^{n-m}-1)!}=\binom{n-1}{m-1}_q+q^m\binom{n-1}{m}_q.$$

$n$-м столбцом матрицы $G_{(q)}$ является ряд

$$x^n\prod_{m=0}^{n}(1-q^m x)^{-1};$$

$n$-й строкой обратной матрицы,

$$G_{(q)}^{-1}=\left|g(q,x)\right|^{-1}\left[g^{-1}(q,x)\right]\left|g(q,x)\right|,$$

является полином

$$\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}_q (-1)^m q^{\frac{m(m-1)}{2}} x^{n-m} = \prod_{m=0}^{n-1}\left(x-q^m\right).$$

Отметим аналогию с экспоненциальным рядом:

$$g^{-1}(q,x)=\sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{(q-1)^n}{(q^n-1)!}(-x)^n =$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(q^{-1}-1\right)^n}{\left(q^{-n}-1\right)!}(-x)^n = g\left(q^{-1},-x\right).$$

Обозначим:

$$g(0,x)=(1-x)^{-1}, \quad g(1,x)=e^x.$$

Так как

$$\left|e^x\right|\left[\frac{1}{1+x}\right]\left\langle\frac{x}{1+x}\right\rangle\frac{x}{(1-x)(1-qx)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q-1)^{n-1}}{n!}x^n=\int e^{(q-1)x},$$

то

$$D_{g(q,x)}=[x]^*\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(q-1)^{n-1}}{n!}\left[x^n\right]D^n.$$

В [6] рассматриваются нижние треугольные матрицы $A$ и $B=A^{-1}$, обобщающие матрицы, элементами которых являются числа Стерлинга второго и первого рода. $n$-м столбцом матрицы $A$ является ряд

$$a_n(x)=\prod_{m=0}^{n}(1-c_m x)^{-1},$$

где $c_m$ – коэффициенты произвольного ряда $c(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$, $n$-й строкой обратной матрицы является полином

$$b_0(x)=1, \quad b_n(x)=\prod_{m=0}^{n-1}(x-c_m).$$

Для классических чисел Стерлинга:

$$c(x)=x(1-x)^{-2},$$

$$A=\left|e^x\right|^{-1}\left\langle e^x-1\right\rangle\left|e^x\right|,\quad B=\left|e^x\right|^{-1}\left\langle\log(1+x)\right\rangle\left|e^x\right|,$$

$$a_n(x)=x^n\prod_{m=0}^{n}(1-mx)^{-1},\quad b_n(x)=\prod_{m=0}^{n-1}(x-m);$$

или

$$c(x)=(1-x)^{-2},$$

$$A=\left|e^x\right|^{-1}\left[e^x\right]\left\langle e^x-1\right\rangle\left|e^x\right|,\ B=\left|e^x\right|^{-1}\left[(1+x)^{-1}\right]\left\langle\log(1+x)\right\rangle\left|e^x\right|,$$

$$a_n(x)=x^n\prod_{m=1}^{n+1}(1-mx)^{-1},\quad b_n(x)=\prod_{m=1}^{n}(x-m).$$

Матрицы

$$A=B=\langle x\rangle;$$

$$A=\left[(1-\beta x)^{-1}\right],\ B=[1-\beta x];$$

$$A=\left|e^x\right|^{-1}\left[e^{\beta x}\right]\left|e^x\right|,\ B=\left|e^x\right|^{-1}\left[e^{-\beta x}\right]\left|e^x\right|;$$

$$A=\left|g(q,x)\right|^{-1}\left[g(q,\beta x)\right]\left|g(q,x)\right|,$$

$$B=\left|g(q,x)\right|^{-1}\left[g^{-1}(q,\beta x)\right]\left|g(q,x)\right|$$

задаются общим рядом-параметром для обобщенных чисел Стерлинга:

$$c(x)=\beta(1-qx)^{-1},$$

$$a_n(x)=x^n\prod_{m=0}^{n}\left(1-\beta q^m x\right)^{-1},\quad b_n(x)=\prod_{m=0}^{n-1}\left(x-\beta q^m\right).$$

При $c(x)=(1+x)^{-1}$ получаем матрицы

$$G_{(-1)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\1&1&0&0&0&0&0&\cdot\\1&0&1&0&0&0&0&\cdot\\1&1&1&1&0&0&0&\cdot\\1&0&2&0&1&0&0&\cdot\\1&1&2&2&1&1&0&\cdot\\1&0&3&0&3&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},\ G_{(-1)}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\-1&1&0&0&0&0&0&\cdot\\-1&0&1&0&0&0&0&\cdot\\1&-1&-1&1&0&0&0&\cdot\\1&0&-2&0&1&0&0&\cdot\\-1&1&2&-2&-1&1&0&\cdot\\-1&0&3&0&-3&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Матрицу, элементы которой равны произведению одноименных элементов матриц $[a(x)]$ и $G_{(-1)}$ обозначим $[a(x)]_G$. Матрицы $[a(x)]_G$ задают алгебру, не изоморфную алгебре матриц $[a(x)]$. Умножение на $\left[x^{2n+1}\right]_G$ аннулирует все ряды, четные коэффициенты которых равны нулю.

Легко убедиться, что

$$[1+\varphi x]_G[1+\beta x]_G=[1+(\varphi+\beta)x]_G,$$

$$\left[\frac{1}{1+\varphi x^2}\right]_G\left[\frac{1}{1+\beta x^2}\right]_G=\left[\frac{1}{1+(\varphi+\beta)x^2}\right]_G,$$

$$[1+\varphi x]_G\left[\frac{1}{1+\beta x^2}\right]_G=\left[\frac{1+\varphi x}{1+\beta x^2}\right]_G.$$

Следовательно,

$$G_{(-1)}^{\varphi}=\left[\frac{1+\varphi x}{1-\varphi x^2}\right]_G.$$

$n$-м столбцом матрицы $G_{(-1)}^{\varphi}$ при четном $n$ является ряд

$$\frac{(1+\varphi x)x^n}{\left(1-\varphi x^2\right)\left(1-\varphi x^2\right)^{\frac{n}{2}}},$$

при нечетном $n$ – ряд

$$\frac{x^n}{\left(1-\varphi x^2\right)\left(1-\varphi x^2\right)^{\frac{n-1}{2}}};$$

$n$-ой строкой при четном $n$ является полином

$$\left(x^2+\varphi\right)^{\frac{n}{2}},$$

при нечетном $n$ – полином

$$\left(x+\varphi\right)\left(x^2+\varphi\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Диагональные матрицы, диагональные элементы которых равны коэффициентам рядов $\left(1-x^2\right)^{-1}$ и $x\left(1-x^2\right)^{-1}$ обозначим соответственно $\left|\frac{1}{1-x^2}\right|$ и $\left|\frac{x}{1-x^2}\right|$. Тогда

$$G^{\varphi}_{(-1)}=\left[\frac{1+\varphi x}{1-\varphi x^2}\right]\left\langle\frac{x}{\left(1-\varphi x^2\right)^{1/2}}\right\rangle\left|\frac{1}{1-x^2}\right|+$$

$$+\left[\frac{1}{\left(1-\varphi x^2\right)^{1/2}}\right]\left\langle\frac{x}{\left(1-\varphi x^2\right)^{1/2}}\right\rangle\left|\frac{x}{1-x^2}\right|,$$

$$E^{\varphi}_{g(-1,x)}=\left\langle\left(x^2+\varphi\right)^{1/2}\right\rangle\left|\frac{1}{1-x^2}\right|+$$

$$+\left[\frac{x+\varphi}{\left(x^2+\varphi\right)^{1/2}}\right]\left\langle\left(x^2+\varphi\right)^{1/2}\right\rangle\left|\frac{x}{1-x^2}\right|.$$

## 4. Квадратные матрицы. Обобщенные полиномы Эйлера

Расширим множество теневых матриц. Наряду с нижними треугольными матрицами

$$\left\langle xa(x)\right\rangle,\ a_0=1,$$

будем рассматривать квадратные матрицы

$$\left\langle a(x)\right\rangle,\ a_0=1.$$

Матрицу $\langle a(x)\rangle$ можно умножать справа на матрицу с конечными столбцами, слева – на матрицу с конечными строками. Равенства

$$\langle a(x)-1\rangle\langle 1+x\rangle=\langle a(x)\rangle,$$

$$\langle a(x)-1\rangle\left\langle \frac{1}{1+x}\right\rangle=\langle a^{-1}(x)\rangle,$$

$$\langle \log a(x)\rangle\langle e^{x}\rangle=\langle a(x)\rangle,$$

$$\langle \log a(x)\rangle\langle e^{x}-1\rangle=\langle a(x)-1\rangle$$

несут следующую информацию.

$n$-й строкой матрицы $\langle a(x)\rangle$ является ряд

$$\frac{a_n(x)}{(1-x)^{n+1}},$$

где $a_n(x)$ – полином степени $\le n$; $n$-й строкой матрицы $\langle a^{-1}(x)\rangle$ является ряд

$$\frac{\hat{a}_n(x)}{(1-x)^{n+1}},$$

где

$$\hat{a}_n(x)=(-x)^n\,\hat{I}_n a_n(x).$$

Если $a_1$ – первый коэффициент ряда $a(x)$, то сумма коэффициентов полинома $a_n(x)$ равна $(a_1)^n$. Случай $a_1=0$ не является исключением: каждый из полиномов $a_n(x)$, $n>0$, содержит множитель $(1-x)$ и, следовательно, сумма его коэффициентов равна нулю.

Если $a(x)=e^{x}$, то $a_n(x)=\frac{1}{n!}A_n(x)$, где $A_n(x)$– полиномы Эйлера:

$$\frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}m^n x^m.$$

В [8, р.4.3] полиномы $a_n(x)$ называются $f$ - полиномами Эйлера:

$$\frac{a_n(x)}{(1-x)^{n+1}}=\sum_{m=0}^{\infty} f(m)x^m,$$

где $a_n(x),\ f(x)$ – полиномы степени $\le n$. В нашем же случае определена последовательность полиномов $a_n(x)$:

$$\frac{a_n(x)}{(1-x)^{n+1}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{u_n(m)}{n!}x^m,$$

где $u_n(x)$ – биномиальная последовательность ряда $a(x)$.

При $n>0$, эйлеров полином $n$-й строки матрицы $\langle a(x)\rangle$ обозначим

$$a_n(x)=\sum_{m=1}^{n} a_m x^m;$$

$n$-ю строку матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\langle\log a(x)\rangle\left|e^x\right|$ обозначим

$$u_n(x)=\sum_{m=1}^{n} u_m x^m;$$

$n$-ю строку матрицы $\langle a(x)-1\rangle$ обозначим

$$v_n(x)=\sum_{m=1}^{n} v_m x^m.$$

Тогда:

$$a_n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{n} u_m(1-x)^{n-m}A_m(x),$$

$$u_n(x)=\sum_{m=1}^{n} a_m\prod_{p=1}^{n}(x-m+p);$$

$$a_n(x)=\sum_{m=1}^{n} v_m x^m(1-x)^{n-m},\quad v_n(x)=\sum_{m=1}^{n} a_m x^m(1+x)^{n-m};$$

$$u_n(x) = n!\sum_{m=1}^{n} v_m \frac{1}{m!}\prod_{p=0}^{m-1}(x-p) = n!\sum_{m=1}^{n} v_m \frac{1}{m!}\sum_{p=1}^{m} s(m,p)x^p,$$

$$v_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{n} u_m \sum_{p=1}^{m} p!S(m,p)x^p,$$

где $s(m,p)$, $S(m,p)$ – числа Стерлинга первого и второго рода.

Примеры:

$$a(x) = e^x,$$

$$a_n(x) = \frac{1}{n!}A_n(x), \quad v_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{n} m!S(n,m)x^m, \quad u_n(x) = x^n;$$

$$a(x) = 1+x,$$

$$a_n(x) = x^n, \quad v_n(x) = x^n, \quad u_n(x) = \prod_{m=0}^{n-1}(x-m);$$

$$a(x) = (1-x)^{-1},$$

$$a_n(x) = x, \quad v_n(x) = x(1+x)^{n-1}, \quad u_n(x) = \prod_{m=0}^{n-1}(x+m);$$

$$a(x) = \frac{1+x}{1-x},$$

$$a_n(x) = 2x(1+x)^{n-1}, \quad v_n(x) = 2^n x\left(\frac{1}{2}+x\right)^{n-1},$$

$$u_n(x) = 2\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}\prod_{p=1}^{n}(x-m+p) =$$

$$= n!\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}\frac{2^m}{m!}\prod_{p=0}^{m-1}(x-p).$$

1. М. Айгнер. Комбинаторная теория. Мир, 1982.
2. С. К. Ландо. Введение в дискретную математику. 2012.
3. А. В. Устинов. Полиномы Коробова и теневой анализ. Чебышевский сборник, 2003, №4.
4. В. М. Бухштабер, А. Н. Холодов. Структуры Боаса-Бака на последовательностях полиномов. Функциональный анализ и его приложения, 1989, т. 23, вып. 4.
5. В. М. Бухштабер, А. Н. Холодов. Группы формальных диффеоморфизмов суперпрямой… Изв. АН. СССР, сер. мат. 1989, т.53, №6.
6. М. Л. Платонов. Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. Наука, 1979.
7. Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Поташник. Конкретная математика. Мир, 1988.
8. Р. Стэнли. Перечислительная комбинаторика. Мир, 1990.