Е. В. Бурлаченко

Обобщенное золотое сечение и обобщенный биномиальный ряд

В [1] золотое сечение $\varPhi$ обобщается следующим образом:

$$ {}_{(p)}\varPhi = 1 + {}_{(p)}\varPhi^{-p}, \quad p = 0, 1, 2, \ldots; $$

$$ {}_{(p)}\varPhi^{p+1} - {}_{(p)}\varPhi^{p} - 1 = 0; $$

$$ {}_{(0)}\varPhi = 2, \quad {}_{(1)}\varPhi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; $$

$$ {}_{(p)}\varPhi^{n} = {}_{(p)}\varPhi^{n-1} + {}_{(p)}\varPhi^{n-p-1}. $$

За счет рассмотрения величин, обратных к ${}_{(p)}\varPhi$, область значений индекса, стоящего в скобках, можно расширить до множества целых чисел:

$$ {}_{(-p)}\varPhi = {}_{(p-1)}\varPhi^{-1}; $$

$$ {}_{(-p)}\varPhi^{p} + {}_{(-p)}\varPhi - 1 = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots; $$

$$ {}_{(-1)}\varPhi = \frac{1}{2}, \quad {}_{(-2)}\varPhi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}; $$

$$ {}_{(-p)}\varPhi^{n} = {}_{(-p)}\varPhi^{n-1} - {}_{(-p)}\varPhi^{n+p-1}. $$

Покажем, что аналогичным образом обобщается биномиальный ряд, и, следовательно, сопоставляемые объекты – обобщенное золотое сечение и обобщенный биномиальный ряд – имеют общие корни. Представим бесконечную таблицу, строки которой пронумерованы целыми числами, а столбцы – целыми неотрицательными числами; все члены нулевого столбца равны единице, все члены нулевой строки, начиная с первого, равны нулю:

$$\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-2 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-3 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Остальные элементы таблицы находим по правилам:

$$_{(p)}a_n^k = {}_{(p)}a_n^{k-1} + {}_{(p)}a_{n-1}^{k+p-1},$$

$$_{(p)}a_n^k = {}_{(p)}a_n^{k+1} - {}_{(p)}a_{n-1}^{k+p},$$

где p – фиксированное целое число, $_{(p)}a_n^k$ – n-й член k-й строки таблицы. Полученную таблицу обозначим $\left\{{}_{(p)}a(x)\right\}$:

$\left\{{}_{(0)}a(x)\right\}$:

$$\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 6 & -10 & 15 & \cdot \\
-4 & 1 & -4 & 10 & -20 & 35 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},$$

$\left\{{}_{(1)}a(x)\right\}$:

$$\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4 & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & \cdot \\
-4 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},$$

$$\left\{{}_{(2)}a(x)\right\}:\qquad\qquad \left\{{}_{(3)}a(x)\right\}:$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4 & 1 & 4 & 14 & 48 & 165 & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 9 & 28 & 90 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & 5 & 14 & 42 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 2 & 5 & 14 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -5 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & -1 & -2 & -5 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 0 & -1 & -3 & \cdot \\
-4 & 1 & -4 & 2 & 0 & -1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},\qquad
\begin{array}{r|rrrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4 & 1 & 4 & 18 & 88 & 455 & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 12 & 55 & 273 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & 7 & 30 & 143 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 3 & 12 & 55 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & -2 & -7 & -30 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & -3 & -10 & -42 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & -3 & -10 & -42 & \cdot \\
-4 & 1 & -4 & -2 & -8 & -35 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},$$

$$\left\{{}_{(-1)}a(x)\right\}:\qquad\qquad \left\{{}_{(-2)}a(x)\right\}:$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 0 & 1 & -3 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & -1 & 2 & -5 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & -1 & 2 & -5 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & 2 & -5 & 14 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & 5 & -14 & 42 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 9 & -28 & 90 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},\qquad
\begin{array}{r|rrrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 3 & -3 & 10 & -42 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & -3 & 10 & -42 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & -2 & 7 & -30 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & 3 & -12 & 55 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & 7 & -30 & 143 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 12 & -55 & 273 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}.$$

Первой строке таблицы $\left\{{}_{(p)}a(x)\right\}$ поставим в соответствие производящую функцию ${}_{(p)}a(x)$:

$${}_{(p)}a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}{}_{(p)}a_n^1x^n.$$

Можно показать [2, стр. 148], [3, стр. 228], что k-й строке таблицы соответствует k-я степень ${}_{(p)}a(x)$:

$$ {}_{(p)}a^k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{(p)}a_n^k x^n , $$

причем,

$$ {}_{(p)}a_0^k = 1, \quad {}_{(p)}a_1^k = k, \quad {}_{(p)}a_n^k = \frac{k}{n!}\prod_{m=1}^{n-1}(k+pn-m). $$

Так как

$$ \frac{1}{n!}\prod_{m=1}^{n-1}(1+pn-m) = \frac{p}{(n-1)!}\prod_{m=1}^{n-2}(p+p(n-1)-m), $$

то

$$ {}_{(p)}a(x) - 1 = x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\prod_{m=1}^{n-1}(1+pn-m) = $$

$$ = x + px^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{px^{n+1}}{n!}\prod_{m=1}^{n-1}(p+pn-m) = x\,{}_{(p)}a^p(x). $$

Таким образом, ряд ${}_{(p)}a(x)$ является решением уравнения

$$ {}_{(p)}a^{-p+1}(x) - {}_{(p)}a^{-p}(x) - x = 0. $$

Отсюда находим:

$$ {}_{(0)}a(x) = 1 + x, \quad {}_{(1)}a(x) = (1-x)^{-1}, $$

$$ {}_{(2)}a(x) = \left(\frac{1+(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-1}, \quad {}_{(-1)}a(x) = \frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}. $$

Отметим равенство

$$ {}_{(p)}a(-x) = {}_{(1-p)}a^{-1}(x). $$

Вопрос о роли расходящихся рядов в математике остается открытым [4]. Эйлер различал понятия суммы и значения ряда. Он считал, что каждый степенной ряд имеет свое значение, определяемое алгебраическими методами. Например, пусть

$$x=\frac{y}{1-y},\quad y=\frac{x}{1+x}.$$

Для степенного ряда $xa(x)$ произведем подстановку

$$\frac{y}{1-y}a\left(\frac{y}{1-y}\right)=yb(y).$$

Значение ряда $xa(x)$ при $x=1$ должно совпадать со значением ряда $yb(y)$ при $y=\frac{1}{2}$. Если $a(x)=(1+x)^{-1}$, то $yb(y)=y$. Следовательно, ряд $(1+x)^{-1}$ при $x=1$ имеет своим значением $\frac{1}{2}$.

Аналогичным образом можно прийти к выводу, что ряд ${}_{(p)}a(x)$ при $p\le 0$, $x=1$, и при $p>0$, $x=-1$, имеет своим значением ${}_{(-p)}\varPhi$.

Можно показать [5], что между рядами ${}_{(p)}a(x)$ существует более тесная связь, чем это видно из обобщающих формул. Таблицу $\{{}_{(0)}a(x)\}$ переобозначим на $\{{}_{(0)}a(x)\}_0$. Каждую строку таблицы $\{{}_{(0)}a(x)\}_0$ заменим восходящей диагональю, имеющей со строкой общий нулевой член, полученную таблицу обозначим $\{{}_{(0)}a(x)\}_1$; с таблицей $\{{}_{(0)}a(x)\}_1$ проделаем ту же операцию, результат обозначим $\{{}_{(0)}a(x)\}_2$; С таблицей $\{{}_{(0)}a(x)\}_2$ проделаем ту же операцию, и т. д. Например,

$$\{{}_{(0)}a(x)\}_1:\qquad\qquad \{{}_{(0)}a(x)\}_2:$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
3 & 1 & 4 & 10 & 20 & \cdot\\
2 & 1 & 3 & 6 & 10 & \cdot\\
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot\\
k=0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot\\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
-2 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdot\\
-3 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},\qquad
\begin{array}{r|rrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
3 & 1 & 5 & 21 & 84 & \cdot\\
2 & 1 & 4 & 15 & 56 & \cdot\\
1 & 1 & 3 & 10 & 35 & \cdot\\
k=0 & 1 & 2 & 6 & 20 & \cdot\\
-1 & 1 & 1 & 3 & 10 & \cdot\\
-2 & 1 & 0 & 1 & 4 & \cdot\\
-3 & 1 & -1 & 0 & 1 & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},$$

Каждую строку таблицы $\left\{{}_{(0)}a(x)\right\}_0$ заменим нисходящей диагональю, имеющей со строкой общий нулевой член, полученную таблицу обозначим $\left\{{}_{(0)}a(x)\right\}_{-1}$; с таблицей $\left\{{}_{(0)}a(x)\right\}_{-1}$ проделаем ту же операцию, и т. д. Например,

$$\left\{{}_{(0)}a(x)\right\}_{-1}: \qquad\qquad \left\{{}_{(0)}a(x)\right\}_{-2}:$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 2 & 0 & 0 & \cdot \\
2 & 1 & 1 & 0 & -1 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & 1 & -4 & \cdot \\
k=0 & 1 & -1 & 3 & -10 & \cdot \\
-1 & 1 & -2 & 6 & -20 & \cdot \\
-2 & 1 & -3 & 10 & -35 & \cdot \\
-3 & 1 & -4 & 15 & -56 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}, \qquad
\begin{array}{r|rrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 1 & 1 & -10 & \cdot \\
2 & 1 & 0 & 3 & -20 & \cdot \\
1 & 1 & -1 & 6 & -35 & \cdot \\
k=0 & 1 & -2 & 10 & -56 & \cdot \\
-1 & 1 & -3 & 15 & -84 & \cdot \\
-2 & 1 & -4 & 21 & -120 & \cdot \\
-3 & 1 & -5 & 28 & -165 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}.$$

Оказывается, что k-й строке таблицы $\left\{{}_{(0)}a(x)\right\}_p$ соответствует ряд

$${}_{(p)}b(x)\,{}_{(p)}a^k(x),$$

где

$${}_{(p)}b(x) = 1 + px\left(\log{}_{(p)}a(x)\right)',$$

$$\left(\log{}_{(p)}a(x)\right)' = \frac{\left({}_{(p)}a(x)\right)'}{{}_{(p)}a(x)},$$

штрих означает производную. Ряды также связаны взаимно обратными отношениями

$${}_{(0)}a\left(x\,{}_{(p)}a^p(x)\right) = {}_{(p)}a(x), \qquad {}_{(p)}a\left(x\,{}_{(0)}a^{-p}(x)\right) = {}_{(0)}a(x),$$

где при соответствующей нормировке нулевое значение принимает индекс любого из рядов ${}_{(p)}a(x)$.

Аналогичным образом обобщается экспоненциальный ряд:

$$ {}_{(p)}e^{k}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k(k+np)^{n-1}}{n!}x^{n},\quad {}_{(0)}e^{k}(x)=e^{kx}; $$

$$ {}_{(0)}e\left(x\,{}_{(p)}e^{p}(x)\right)={}_{(p)}e^{p}(x),\qquad {}_{(p)}e\left(x\,{}_{(0)}e^{-p}(x)\right)={}_{(0)}e(x); $$

$$ \log_{(p)}e(x)=x\,{}_{(p)}e^{p}(x); $$

$$ {}_{(p)}e(-x)={}_{(-p)}e^{-1}(x); $$

$\left\{e^{x}\right\}_{1}$:

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 4 & \frac{5^2}{2} & \frac{6^3}{3!} & \cdot \\
2 & 1 & 3 & \frac{4^2}{2} & \frac{5^3}{3!} & \cdot \\
1 & 1 & 2 & \frac{3^2}{2} & \frac{4^3}{3!} & \cdot \\
k=0 & 1 & 1 & \frac{2^2}{2} & \frac{3^3}{3!} & \cdot \\
-1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2^3}{3!} & \cdot \\
-2 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3!} & \cdot \\
-3 & 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

$\left\{e^{x}\right\}_{-1}$:

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & \cdot \\
2 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{3!} & \cdot \\
1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2^3}{3!} & \cdot \\
k=0 & 1 & -1 & \frac{2^2}{2} & -\frac{3^3}{3!} & \cdot \\
-1 & 1 & -2 & \frac{3^2}{2} & -\frac{4^3}{3!} & \cdot \\
-2 & 1 & -3 & \frac{4^2}{2} & -\frac{5^3}{3!} & \cdot \\
-3 & 1 & -4 & \frac{5^2}{2} & -\frac{6^3}{3!} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

k-й строке таблицы $\left\{e^{x}\right\}_{p}$ соответствует ряд

$$ \left(1+px\left(\log_{(p)}e(x)\right)'\right){}_{(p)}e^{k}(x). $$

Ряд ${}_{(p)}e^{k}(x)$ является предельным случаем ряда

$$ {}_{(vp)}a^{vk}\left(x/v\right)=1+kx+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n vk}{v^n n!}\prod_{m=1}^{n-1}\left(vk+vpn-m\right) $$

при $v\to\infty$ [3, стр. 399]. Подчеркивая эту связь, обозначим:

$$ {}_{(p)}\widehat{\Phi}=\exp{}_{(p)}\widehat{\Phi}^{-p},\quad p=0,1,2,\ldots; $$

$$ {}_{(p)}\widehat{\Phi}^2-{}_{(p)}\widehat{\Phi}2\mathrm{sh}\,{}_{(p)}\widehat{\Phi}^{-p}-1=0; $$

$$ {}_{(p)}\widehat{\widehat{\Phi}}=\exp\left(\exp\left(-p\exp\left(-p\exp\left(\ldots\right)\right)\right)\right); $$

$$ {}_{(-p)}\widehat{\Phi}={}_{(p)}\widehat{\Phi}^{-1}=\exp\left(-{}_{(-p)}\widehat{\Phi}^{p}\right),\quad p=1,2,\ldots $$

$$ {}_{(-p)}\widehat{\Phi}^2+{}_{(-p)}\widehat{\Phi}2\mathrm{sh}\,{}_{(-p)}\widehat{\Phi}^{p}-1=0; $$

$$ {}_{(-p)}\widehat{\widehat{\Phi}}=\exp\left(-\exp\left(-p\exp\left(-p\exp\left(\ldots\right)\right)\right)\right). $$

Числа ${}_{(p)}\Phi$ и ${}_{(p)}\widehat{\Phi}$, $p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, равны абсциссам точек пересечения графика функции $y=x^{-p}$, $x>0$, с графиками функций соответственно $y=x-1$ и $y=\ln x$.

Числа ${}_{(-p)}\Phi$ и ${}_{(-p)}\widehat{\Phi}$, $p=1,\ 2,\ \ldots$, равны абсциссам точек пересечения графика функции $y=-x^{p}$, $x\geq 0$, с графиками функций соответственно $y=x-1$ и $y=\ln x$.

Число ${}_{(0)}\widehat{\Phi}^{-1}=e^{-1}$ приходится рассматривать как отдельный случай. Оно равно абсциссе точки пересечения графика функции $y=-x^0=-1$ с графиком функции $y=\ln x$.

Интересно, что график функции $y=x-1$ является касательной к графику функции $y=\ln x$ в точке $x=1,\ y=0$.

Симметричная относительно оси $y=x$ картина получается для графиков обратных функций: $y=x^{-1/p}$, $y=-x^{1/p}$ (функции $y=1$, $y=-1$, переходят в прямые $x=1$, $x=-1$), $y=x+1$, $y=e^x$.

Равенство

$$_{(p)}e(x) = \exp x_{(p)}e^{p}(x)$$

означает, что ряд $_{(p)}e(x)$ при $p \le 0,\ x = 1$, и при $p > 0,\ x = -1$, имеет своим значением $_{(-p)}\widehat{\Phi}$.

1. Стахов А. П. Коды золотой пропорции. М.: Радио и связь, 1984
2. Дж. Риордан. Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982
3. Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. Конкретная математика. М.: Мир, 1998
4. Харди Г. Расходящиеся ряды. М.: ИЛ, 1951
5. Бурлаченко Е. В. Обобщенная биномиальная формула Абеля и полиномы Эйлера. http://www.314159.ru