Е. В. Бурлаченко

Обобщенная биномиальная формула Абеля и полиномы Эйлера

1

В [1, стр. 147] рассматриваются равенства Абеля

$$(p+s+n)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p(p+m)^{m-1} (s+n-m)^{n-m},$$

$$(p+s)(p+s+n)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p(p+m)^{m-1} s(s+n-m)^{n-m-1}$$

в связи с рядами Лагранжа. Эту точку зрения можно расширить.

Применительно к формальным степенным рядам, равенства Абеля принимают вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p+s+n)^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p+n)^{n-1}}{n!} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s+n)^n}{n!} x^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p+s)(p+s+n)^{n-1}}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p(p+n)^{n-1}}{n!} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(s+n)^{n-1}}{n!} x^n .$$

Договоримся не делать разницы между формальным степенным рядом и последовательностью его коэффициентов. Составим таблицу, k-й строкой которой является ряд

$$e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} x^n :$$

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 3 & \frac{3^2}{2} & \frac{3^3}{3!} & \frac{3^4}{4!} & \cdot \\
2 & 1 & 2 & \frac{2^2}{2} & \frac{2^3}{3!} & \frac{2^4}{4!} & \cdot \\
1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3!} & \frac{1}{4!} & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & \frac{2^2}{2!} & -\frac{2^3}{3!} & \frac{2^4}{4!} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
\qquad \left\{e^x\right\}_0.
$$

Составим таблицу $\left\{e^x\right\}_1$, k-й строкой которой является k-я восходящая диагональ таблицы $\left\{e^x\right\}_0$:

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 4 & \frac{5^2}{2} & \frac{6^3}{3!} & \frac{7^4}{4!} & \cdot \\
2 & 1 & 3 & \frac{4^2}{2} & \frac{5^3}{3!} & \frac{6^4}{4!} & \cdot \\
1 & 1 & 2 & \frac{3^2}{2} & \frac{4^3}{3!} & \frac{5^4}{4!} & \cdot \\
k=0 & 1 & 1 & \frac{2^2}{2} & \frac{3^3}{3!} & \frac{4^4}{4!} & \cdot \\
-1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{2^3}{3!} & \frac{3^4}{4!} & \cdot \\
-2 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{3!} & \frac{2^4}{4!} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
\qquad \left\{e^x\right\}_1
$$

Пользуясь правилами разложения степенного ряда в ряд Лагранжа, а так же последовательностью полиномов Абеля как биномиальной последовательностью, можно показать, что k-я строка таблицы $\left\{e^x\right\}_1$ является произведением рядов

$$b(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n,\ 0^0=1,$$

и

$$a^k(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+n)^{n-1}}{n!}x^n\right)^k=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k(k+n)^{n-1}}{n!}x^n,\ \frac{0}{0}=1,$$

причем

$$b(x)=1+x(\log a(x))',\quad \log a(x)=xa(x),$$

$$e^{xa(x)}=a(x),\quad a\left(xe^{-x}\right)=e^x.$$

Из таблицы $\left\{e^x\right\}_1$ непосредственно видно, что

$$b(x)a^k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k+n)^n}{n!}x^n.$$

Ясно, что в этом равенстве k можно заменить действительным числом.
Таким образом, первое равенство Абеля равносильно равенству

$$b(x)a^p(x)a^s(x)=b(x)a^{p+s}(x),$$

второе равенство равносильно равенству

$$a^p(x)a^s(x)=a^{p+s}(x).$$

Подстановка (композиция) $a\left(xe^{-x}\right)$ задается матрицей, n-м столбцом которой $(n=0,\ 1,\ \ldots)$ является ряд $x^n e^{-nx}$. Умножая каждый столбец этой матрицы на e^{sx}, получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ s & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{s^2}{2} & (s-1) & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{s^3}{3!} & \frac{(s-1)^2}{2} & (s-2) & 1 & 0 & \cdot \\ \frac{s^4}{4!} & \frac{(s-1)^3}{3!} & \frac{(s-2)^2}{2} & (s-3) & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что равенство

$$a^p\left(xe^{-x}\right)e^{sx} = e^{(p+s)x}$$

равносильно обобщенной биномиальной формуле Абеля

$$(p+s)^n = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}p(p+m\varphi)^{m-1}(s-m\varphi)^{n-m}$$

при $\varphi = 1$. Формула справедлива при любых значениях φ. Рассмотрим общий случай.

Таблицу, k-й строкой которой является ряд $e^{k\beta x}$, $\beta > 0$, обозначим $\left\{e^{\beta x}\right\}_0$; таблицу, k-й строкой которой является k-я восходящая диагональ таблицы $\left\{e^{\beta x}\right\}_0$, обозначим $\left\{e^{\beta x}\right\}_1$; таблицу, k-й строкой которой является k-я восходящая диагональ таблицы $\left\{e^{\beta x}\right\}_1$, обозначим $\left\{e^{\beta x}\right\}_2$, и т. д. Таблицу, k-й строкой которой является k-я нисходящая диагональ таблицы $\left\{e^{\beta x}\right\}_0$, обозначим $\left\{e^{\beta x}\right\}_{-1}$; таблицу, k-й строкой которой является k-я нисходящая диагональ таблицы $\left\{e^{\beta x}\right\}_{-1}$, обозначим $\left\{e^{\beta x}\right\}_{-2}$ и т. д. Опираясь на ряды Лагранжа и полиномы Абеля, можно показать, что k-я строка таблицы $\left\{e^{\beta x}\right\}_\nu$ (ν – целое число) является произведением рядов

$$_{(\nu\beta)}b(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n\nu\beta)^n}{n!}x^n$$

и

$$ {}_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+n\nu\beta)^{n-1}}{n!}x^n\right)^{k\beta}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{k\beta(k\beta+n\nu\beta)^{n-1}}{n!}x^n; $$

т.е.

$$ {}_{(\nu\beta)}a^{p}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p(p+n\nu\beta)^{n-1}}{n!}x^n, $$

где p – действительное число. Причем

$$ {}_{(\nu\beta)}b(x)=1+\nu\beta x\left(\log {}_{(\nu\beta)}a(x)\right)',\ \log {}_{(\nu\beta)}a(x)=x\,{}_{(\nu\beta)}a^{\nu\beta}(x), $$

$$ \exp x\,{}_{(\nu\beta)}a^{\nu\beta}(x)={}_{(\nu\beta)}a(x), \qquad {}_{(\nu\beta)}a\left(xe^{-\nu\beta x}\right)=e^x, $$

так что

$$ {}_{(\nu\beta)}a^{p}\left(xe^{-\nu\beta x}\right)e^{sx}=e^{(p+s)x}, $$

или

$$ (p+s)^n=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}p(p+m\nu\beta)^{n-1}(s-m\nu\beta)^{n-m}. $$

Таким образом, ряд ${}_{(\nu\beta)}a(x)$ является обобщением экспоненциального ряда.

Заметим, что подобным образом можно «обобщить» любой формальный степенной ряд $a(x)$, два первых коэффициента которого равны единице. Таблицу, k-й строкой которой является ряд $a^{k\beta}(x)$, $\beta>0$, обозначим $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_0$. Каждую строку таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_0$ заменим восходящей диагональю, имеющей со строкой общий нулевой член. Полученную таблицу обозначим $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_1$. С таблицей $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_1$ проделаем ту же операцию, и т. д. Каждую строку таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_0$ заменим нисходящей диагональю, имеющей со строкой общий нулевой член, результат обозначим $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_{-1}$. С таблицей $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_{-1}$ проделаем ту же операцию, и т. д. Оказывается, что k-я строка таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_{\nu}$ является произведением рядов ${}_{(\nu\beta)}b(x)$ и ${}_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)$, определяемых равенствами

$$ {}_{(\nu\beta)}b(x) = 1 + \nu\beta x\left(\log {}_{(\nu\beta)}a(x)\right)', $$

$$ a\left(x {}_{(\nu\beta)}a^{\nu\beta}(x)\right) = {}_{(\nu\beta)}a(x), \quad {}_{(\nu\beta)}a\left(x a^{-\nu\beta}(x)\right) = a(x), $$

$$ a(x) = {}_{(0)}a(x). $$

Это легко выводится из формулы разложения в ряд Лагранжа для произвольных формальных степенных рядов $f(x)$ и $\varphi(x)$

$$ \frac{f(x)}{1 - x(\log\varphi(x))'} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \varphi^{-n}(x) \frac{1}{n!}\left| D^n\left(f(x)\varphi^n(x)\right)\right|_{x=0} $$

(выражение $\frac{1}{n!}\left| D^n\left(f(x)\varphi^n(x)\right)\right|_{x=0}$ означает n-й коэффициент ряда $f(x)\varphi^n(x)$), если учесть, что k-я строка таблицы $\left\{a^{n\beta}(x)\right\}_1$ совпадает с nk-й строкой таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_n$, k-я строка таблицы $\left\{a^{n\beta}(x)\right\}_{-1}$ совпадает с nk-й строкой таблицы $\left\{a^{\beta}(x)\right\}_{-n}$.

В некоторых исключительных случаях ряды, полученные описанным способом, выражаются аналитически. Например, если $a(x) = 1 + x$, то

$$ {}_{(1)}a(x) = (1-x)^{-1}, \quad {}_{(2)}a(x) = \left(\frac{1 + (1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-1}, $$

$$ {}_{(-1)}a(x) = \frac{1 + (1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad {}_{(1/2)}a(x) = \left(\frac{x}{2} + \left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2. $$

Подстановка $e^{\log a(x)}$ задается матрицей, m-м столбцом которой является ряд $\log a(x)$ в степени m. Пусть $(n\ m)$ – элемент этой матрицы, где n – номер строки, m – номер столбца. Обозначим

$$ u_0(x) = 1, \quad \frac{u_n(x)}{n!} = \frac{x\tilde{u}_n(x)}{n!} = \sum_{m=0}^{n} \frac{(n\ m)}{m!} x^m. $$

Последовательность полиномов $u_n(x)$ является биномиальной последовательностью, – назовем ее биномиальной последовательностью ряда $a(x)$. Так как

$$e^{p\log a(x)} = a^p(x),$$

то

$$a^p(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p\tilde{u}_n(p)}{n!} x^n .$$

Покажем, что

$$_{(\nu\beta)}a^p(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p\tilde{u}_n(p + n\nu\beta)}{n!} x^n .$$

n-й коэффициент ряда $_{(\nu\beta)}b(x)\,_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)$ обозначим $_{(\nu\beta)}ba_n^{k\beta}$, n-й коэффициент ряда $_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)$ обозначим $_{(\nu\beta)}a_n^{k\beta}$. Так как

$$_{(\nu\beta)}b(x)\,_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x) = \left(1 + \nu\beta x \frac{_{(\nu\beta)}a'(x)}{_{(\nu\beta)}a(x)}\right)\,_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x) =$$

$$=_{(\nu\beta)} a^{k\beta}(x) + \frac{\nu\beta x}{k\beta}\left(_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x)\right)',$$

то

$$_{(\nu\beta)}ba_n^{k\beta} = {}_{(\nu\beta)}a_n^{k\beta} + \frac{n\nu\beta}{k\beta}\,_{(\nu\beta)}a_n^{k\beta} = \frac{k\beta + n\nu\beta}{k\beta}\,_{(\nu\beta)}a_n^{k\beta};$$

так как

$$_{(\nu\beta)}ba_n^{k\beta} = a_n^{(k+n\nu)\beta},$$

то

$$_{(\nu\beta)}a_n^{k\beta} = \frac{k\beta}{k\beta + n\nu\beta} a_n^{k\beta + n\nu\beta},$$

или

$$_{(\nu\beta)}a^{k\beta}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k\beta\tilde{u}_n(k\beta + n\nu\beta)}{n!} x^n .$$

Последнее равенство означает, что биномиальная последовательность ряда $_{(\nu\beta)}a(x)$ имеет вид

$$ {}_{(\nu\beta)}u_n(x) = x\tilde{u}_n(x+n\nu\beta). $$

Например, $a(x)=1+x$:

$$ {}_{(\nu\beta)}u_0(x)=1,\quad {}_{(\nu\beta)}u_1(x)=x,\quad u_n(x)=x\prod_{m=1}^{n-1}(x-m), $$

$$ {}_{(1)}u_n(x)=x\prod_{m=1}^{n-1}(x+n-m)=x\prod_{m=1}^{n-1}(x+m), $$

$$ {}_{(2)}u_n(x)=x\prod_{m=1}^{n-1}(x+2n-m)=x\prod_{m=1}^{n-1}(x+n+m), $$

$$ {}_{(-1)}u_n(x)=x\prod_{m=1}^{n-1}(x-n-m), $$

$$ {}_{(1/2)}u_n(x)=x\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+\frac{n}{2}-m\right), $$

$$ {}_{(1/2)}u_{2n}(x)=\prod_{m=0}^{n-1}\left(x^2-m^2\right),\quad {}_{(1/2)}u_{2n+1}(x)=x\prod_{m=0}^{n-1}\left(x^2-\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\right). $$

Отметим еще одно свойство рассматриваемых рядов. Подстановки $a\left(x_{(\nu\beta)}a^{\nu\beta}(x)\right)$ и ${}_{(\nu\beta)}a\left(xa^{-\nu\beta}(x)\right)$ взаимообратны. Пусть обратной к $e^{\log a(x)}$ является подстановка

$$ a(q(x))=e^x. $$

Так как

$$ \exp\left(\log a\left(x_{(\nu\beta)}a^{\nu\beta}(x)\right)\right)=\exp\left(\log {}_{(\nu\beta)}a(x)\right)={}_{(\nu\beta)}a(x), $$

то

$$ {}_{(\nu\beta)}a\left(q(x)a^{-\nu\beta}(q(x))\right)={}_{(\nu\beta)}a\left(q(x)e^{-\nu\beta x}\right)=e^x. $$

Например,

$$a(x)=(1+2x)^{\frac{1}{2}}, \quad {}_{(1)}a(x)=x+\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$a\left(\frac{e^{2x}-1}{2}\right)=e^x, \quad {}_{(1)}a\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)=e^x.$$

Таким образом, уникальность ряда ${}_{(\nu\beta)}a(x)$, $a(x)=e^x$, заключается в равенстве

$$\log{}_{(\nu\beta)}a(x)=x_{(\nu\beta)}a^{\nu\beta}(x).$$

В свою очередь, уникальность ряда ${}_{(\nu\beta)}a(x)$, $a(x)=1+x$, заключается в равенстве

$${}_{(\nu\beta)}a(x)-1=x_{(\nu\beta)}a^{\nu\beta}(x).$$

2

n-й член k-й строки таблицы $\{a(x)\}_0$, где $a(x)$ – ряд, два первых коэффициента которого равны единице, обозначим a_n^k. Рассмотрим в качестве элементов таблицы $\{a(x)\}_0$ не строки, а столбцы. Обозначим

$${}^n a(x)=\sum_{m=1}^{\infty}a_n^m x^{m-1}, \quad {}^n\widehat{a}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}a_n^{-m}x^{m-1}, \quad n>0.$$

Если $u_n(x)$ – биномиальная последовательность ряда $a(x)$, то

$${}^n a(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{u_n(m)}{n!}x^{m-1}, \quad {}^n\widehat{a}(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{u_n(-m)}{n!}x^{m-1}.$$

Полиномы

$$A_n(x)=(1-x)^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty}m^n x^m$$

называются полиномами Эйлера [2, стр. 49]. Сумма коэффициентов полинома $A_n(x)$ равна $n!$.Например,

$$A_1(x)=x, \quad A_2(x)=x+x^2, \quad A_3(x)=x+4x^2+x^3,$$

$$A_4(x) = x + 11x^2 + 11x^3 + x^4.$$

Обозначим $A_n(x) = x\varphi_n(x)$, $u_n(x) = \sum_{p=1}^{n} u_p x^p$ (по определению $u_0 = 0$, $u_n = 1$). Тогда

$$^n a(x) = \frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{\infty} x^{m-1}\sum_{p=1}^{n} u_p m^p = \frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty} u_p m^p x^{m-1} =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{n}\frac{u_p\varphi_p(x)}{(1-x)^{p+1}} = \frac{\frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{n} u_p (1-x)^{n-p}\varphi_p(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{a_n(x)}{(1-x)^{n+1}},$$

$$^n \widehat{a}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{n}\sum_{m=1}^{\infty} u_p(-m)^p x^{m-1} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n!}\sum_{p=1}^{n}(-1)^p u_p (1-x)^{n-p}\varphi_p(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{\widehat{a}_n(x)}{(1-x)^{n+1}},$$

где $a_n(x)$, $\widehat{a}_n(x)$ – полиномы степени $< n$.

Матрицу, p-м столбцом которой ($p = 0, 1, \ldots$) является полином

$$\frac{1}{n!}(1-x)^{n-1-p}\varphi_{p+1}(x), \ p < n,$$

обозначим U_n. Например,

$$U_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, U_3 = \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, U_4 = \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & -1 & -3 & 11 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы выяснили, что

$$U_n\tilde{u}_n(x) = a_n(x), \quad U_n\tilde{u}_n(-x) = -\widehat{a}_n(x),$$

где

$$x\tilde{u}_n(x) = u_n(x).$$

Матрицу, которая получается из единичной матрицы размерности $n \times n$ перестановкой столбцов в обратном порядке, обозначим $\widehat{I}_n$:

$$\widehat{I}_n \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^p = \sum_{p=0}^{n-1} a_{n-1-p} x^p .$$

Так как

$$\widehat{I}_n \varphi_n(x) = \varphi_n(x), \quad \widehat{I}_n (1-x)^{n-1} = (-1)^{n-1} (1-x)^{n-1},$$

то

$$\widehat{I}_n (1-x)^{n-1-p} \varphi_{p+1}(x) = (-1)^{n-1-p} (1-x)^{n-1-p} \varphi_{p+1}(x).$$

Таким образом, умножение нечетных столбцов матрицы U_n на -1 равносильно перестановке строк в обратном порядке с умножением на $(-1)^{n-1}$:

$$U_n \tilde{u}_n(-x) = (-1)^{n-1} \widehat{I}_n U_n \tilde{u}_n(x),$$

$$\widehat{a}_n(x) = (-1)^n \widehat{I}_n a_n(x).$$

Например, если $a(x) = 1 + x$, то

$$a_n(x) = x^{n-1}, \quad \widehat{a}_n(x) = (-1)^n;$$

если $a(x) = (1-x)^{-1}$, то

$$a_n(x) = 1, \quad \widehat{a}_n(x) = (-1)^n x^{n-1}.$$

Рассмотрим равенство

$$\frac{x^p}{(1-x)^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_3^{(p)}(m)}{3!} x^{m-1}, \quad p = 0, 1, 2.$$

Так как

$$\widehat{I}_3 1 = x^2, \quad \widehat{I}_3 x = x, \quad \widehat{I}_3 x^2 = 1,$$

то $u_3^{(0)}(m)$ должно равняться нулю при подстановках $m = 0,\ -1,\ -2$; $u_3^{(1)}(m)$ должно равняться нулю при подстановках $m = 1,\ 0\ \ -1$; $u_3^{(2)}(m)$ должно равняться нулю при подстановках $m = 2,\ \ 1,\ \ 0$. Следовательно,

$$\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} x^{m-1},$$

$$\frac{x}{(1-x)^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m-1)m(m+1)}{3!} x^{m=1},$$

$$\frac{x^2}{(1-x)^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m-2)(m-1)m}{3!} x^{m-1}.$$

Обобщая, выводим

$$\frac{x^p}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_n^{(p)}(m)}{n!} x^{m-1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{m-1}}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} (m - p + i), \ \ p < n.$$

Если

$$a_n(x) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^p,$$

то

$$\frac{a_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p x^p}{(1-x)^{n+1}} = \sum_{m=1}^{\infty} x^{m-1} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{a_p u_n^{(p)}(m)}{n!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u_n(m)}{n!} x^{m-1},$$

где $u_n(x)$ – полином биномиальной последовательности ряда $a(x)$.

Таким образом, матрица, p-м столбцом которой является полином

$$\frac{1}{x} \prod_{i=0}^{n-1} (x - p + i), \ \ p < n,$$

обратная к U_n:

$$U_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad U_3^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad U_4^{-1}=\begin{pmatrix}6 & -2 & 2 & -6\\ 11 & -1 & -1 & 11\\ 6 & 2 & -2 & -6\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Заметим, что если полином имеет вид

$$(1-x)^m a_{n-m}(x),\ m<n,$$

то

$$U_n^{-1}(1-x)^m a_{n-m}(x)=\frac{n!}{(n-m)!}U_{n-m}^{-1}a_{n-m}(x).$$

В этом случае матрица, задающая подстановку $e^{\log a(x)}$, является вырожденной ($a_0=1$, $a_1=0$, a_n – коэффициенты ряда $a(x)$).

n-й столбец верхней половины таблицы $\left\{{}_{(\nu\beta)}a(x)\right\}_0$ обозначим $\dfrac{{}_{(\nu\beta)}a_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$. Оператор сдвига $E^{n\nu\beta}$ (т.е. матрица, m-м столбцом которой является полином $(x+n\nu\beta)^m$) отображает $\tilde{u}_n(x)$ на $\tilde{u}_n(x+n\nu\beta)$. Обозначим

$$U_nE^nU_n^{-1}=A_n.$$

Например,

$$A_2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad A_3=\begin{pmatrix}5 & \frac{5}{2} & 1\\ -6 & -2 & 0\\ 2 & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}14 & 7 & 3 & 1\\ -28 & -\frac{35}{3} & -\frac{10}{3} & 0\\ 20 & \frac{22}{3} & \frac{5}{3} & 0\\ -5 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A_na_n(x)={}_{(1)}a_n(x).$$

Матрицу, n-м столбцом которой является $(-x)^n$ обозначим $\langle -x\rangle$:

$$\langle -x\rangle a(x)=a(-x).$$

Мы выяснили, что

$$U_n\langle -x\rangle U_n^{-1}=(-1)^{n-1}\widehat{I}_n.$$

Так как

$$\langle -x\rangle E^n\langle -x\rangle = E^{-n},$$

то

$$\widehat{I}_n A_n \widehat{I}_n = A_n^{-1}.$$

Таким образом, матрица A_n^{-1} получается из A_n перестановкой в обратном порядке строк и столбцов:

$$A_2^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\quad A_3^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 2\\ 0 & -2 & -6\\ 1 & \frac{5}{2} & 5\end{pmatrix},\quad A_4^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -5\\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{22}{3} & 20\\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{35}{3} & -28\\ 1 & 3 & 7 & 14\end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$A_n^{\nu\beta}=U_n E^{n\nu\beta} U_n^{-1},$$

$$\log A_n = U_n n D U_n^{-1},$$

где D – оператор дифференцирования. Так как

$$E^{n\nu\beta}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(n\nu\beta D)^m}{m!},$$

то

$$A_n^{\nu\beta}=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(\nu\beta)^m}{m!}(\log A_n)^m.$$

Например (I_n – единичная матрица размерности $n\times n$),

$$A_2^{\nu\beta}=I_2+\nu\beta\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},$$

$$A_3^{\nu\beta} = I_3 + \nu\beta \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} + \frac{(\nu\beta)^2}{2!} 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4^{\nu\beta} = I_4 + \nu\beta \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 13 & 3 & -1 & 1 \\ -18 & 4 & 8 & -6 \\ 6 & -8 & -4 & 18 \\ -1 & 1 & -3 & -13 \end{pmatrix} + \frac{(\nu\beta)^2}{2!} \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 & -3 \\ -21 & -9 & 3 & 15 \\ 15 & 3 & -9 & -21 \\ -3 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{(\nu\beta)^3}{3!} 16 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая особое отношение преобразования $A_n^{\nu\beta}$ к полиномам $(1-x)^m$, представим его в общем виде:

$$A_n^{\nu\beta} (1-x)^m a_{n-m}(x) = (1-x)^m A_{n-m}^{\frac{n\nu\beta}{n-m}} a_{n-m}(x) =$$

$$= (1-x)^m_{(n\nu\beta/n-m)} a_{n-m}(x), \quad m < n.$$

Так как каждый столбец матрицы U_n, кроме последнего, содержит множитель $1-x$, то каждый столбец матрицы $(\log A_n)^m$, $m > 0$, также содержит множитель $1-x$ и сумма его членов равна нулю. Следовательно, сумма членов каждого столбца матрицы $A_n^{\nu\beta}$ равна единице.

Таким образом, преобразование $A_n^{\nu\beta}$ сохраняет сумму коэффициентов полинома $a_n(x)$.

n-й столбец верхней половины таблицы $\{a^\beta(x)\}_0$ обозначим $\frac{a_n^{(\beta)}(x)}{(1-x)^{n+1}}$, $a_n(x) = a_n^{(1)}(x)$. Биномиальная последовательность ряда $a^\beta(x)$ связана с $u_n(x)$ подстановкой $u_n(\beta x)$, так что

$$U_n \beta \tilde{u}_n(\beta x) = a_n^{(\beta)}(x).$$

Сумма членов последнего столбца матрицы U_n равна единице, n-й коэффициент полинома $u_n(\beta x)$ равен β^n. Следовательно, сумма коэффициентов полинома $a_n^{(\beta)}(x)$ равна β^n.

Диагональную матрицу, n-м столбцом которой является $(\beta x)^n$, обозначим $\langle \beta x \rangle$. Тогда

$$U_n \beta \langle \beta x \rangle U_n^{-1} a_n(x) = a_n^{(\beta)}(x).$$

Обозначим

$$W_{(n,\,\beta)} = U_n \beta \langle \beta x \rangle U_n^{-1}.$$

Сумма членов каждого столбца матрицы $W_{(n,\,\beta)}$ равна β^n. Особый интерес представляет случай натуральных значений β. Обозначим

$$\frac{1-x^m}{1-x} = \sum_{n=0}^{m-1} x^n = w_m(x).$$

Ряд $\dfrac{a_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$ раскладывается на составляющие по правилу

$$\frac{a_n(x)}{(1-x)^{n+1}} = \frac{w_m^{n+1}(x) a_n(x)}{\left(1-x^m\right)^{n+1}} = \sum_{p=0}^{m-1} \frac{x^p h_p\left(x^m\right)}{\left(1-x^m\right)^{n+1}}.$$

Для определения полиномов $h_p\left(x^m\right)$ введем операторы $[p]$, $|m|$:

$$[p] a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p} x^n, \quad |m| a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^{nm},$$

где

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Тогда

$$h_p\left(x^m\right) = |m| [p] w_m^{n+1}(x) a_n(x).$$

Например,

$$\frac{1}{(1-x)^3}=\frac{w_2^3(x)}{\left(1-x^2\right)^3}=\frac{1+3x^2}{\left(1-x^2\right)^3}+\frac{x\left(3+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

Введем операторы $\left\langle x^m \right\rangle$, $\left\langle x^m \right\rangle^*$:

$$\left\langle x^m \right\rangle a(x)=a\left(x^m\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nm}, \quad \left\langle x^m \right\rangle^* a(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n.$$

p-й коэффициент ряда $\dfrac{a_n^{(m)}(x)}{(1-x)^{n+1}}$ равен $(mp+m-1)$-му коэффициенту ряда $\dfrac{a_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$, следовательно,

$$\left\langle x^m \right\rangle \frac{a_n^{(m)}(x)}{(1-x)^{n+1}}=\frac{h_{m-1}\left(x^m\right)}{\left(1-x^m\right)^{n+1}},$$

$$a_n^{(m)}(x)=\left\langle x^m \right\rangle^* h_{m-1}\left(x^m\right)=\left\langle x^m \right\rangle^* |m|[m-1] w_m^{n+1}(x) a_n(x).$$

Таким образом,

$$W_{(n,\ m)}=\left\langle x^m \right\rangle^* |m|[m-1]\left[w_m^{n+1}(x)\right] I_n,$$

где $\left[w_m^{n+1}(x)\right]$ – оператор умножения на $w_m^{n+1}(x)$, т. е. матрица, p-м столбцом которой является $x^p w_m^{n+1}(x)$. Например,

$$W_{(2,\ 2)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\3&1\\3&3\\1&3\\0&1\end{pmatrix}.$$

Убедимся, что $W_{(n,\ m)}$ – квадратная матрица размерности $n\times n$:

$$w_2^2(x) = (1,\ 2,\ 1),$$
$$w_2^3(x) = (1,\ 3,\ 3,\ 1),$$
$$w_2^3(x) = (1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1).$$

$$W_{(1,\ 2)} = (2), \quad W_{(2,\ 2)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad W_{(3,\ 2)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$w_3^2(x) = (1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1),$$
$$w_3^3(x) = (1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 6,\ 3,\ 1),$$
$$w_3^4(x) = (1,\ 4,\ 10,\ 16,\ 19,\ 16,\ 10,\ 4,\ 1).$$

$$W_{(1,\ 3)} = (3), \quad W_{(2,\ 3)} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad W_{(3,\ 3)} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 16 & 19 & 16 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$w_4^2(x) = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1),$$
$$w_4^3(x) = (1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 12,\ 12,\ 10,\ 6,\ 3,\ 1),$$
$$w_4^4(x) = (1,4,10,20,31,40,44,40,31,20,10,4,1).$$

$$W_{(1,\ 4)} = (4), \quad W_{(2,\ 4)} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad W_{(3,\ 4)} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 4 \\ 40 & 44 & 40 \\ 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

$$w_2^5(x) = (1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1),$$
$$w_3^5(x) = (1,\ 5,\ 15,\ 30,\ 45,\ 51,\ 45,\ 30,\ 15,\ 5,\ 1).$$

$$W_{(4,\ 2)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad W_{(4,\ 3)} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 1 & 0 \\ 51 & 45 & 30 & 15 \\ 15 & 30 & 45 & 51 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

Отметим равенства

$$W_{(n,\ m)}\widehat{I}_n=\widehat{I}_nW_{(n,\ m)},\quad W_{(n,\ m)}W_{(n,\ p)}=W_{(n,\ mp)},$$

$$W_{(n,\ m)}(1-x)^p\,a_{n-p}(x)=(1-x)^p\,W_{(n-p,\ m)}a_{n-p}(x),\ \ p<n.$$

3

Для полноты картины рассмотрим связь полиномов $a_n(x),\ u_n(x)$ с разбиениями натуральных чисел.

Пусть

$$a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

– степенной ряд с произвольными коэффициентами. Матрицу, m-м столбцом которой является ряд $a^m(x)$, обозначим $\langle a(x)\rangle$, транспонированную матрицу обозначим $\langle a(x)\rangle^*$. Можно показать [1, стр. 186], что n-й столбец матрицы $\langle a(x)\rangle^*$, $n>0$, имеет вид:

$$\begin{array}{r|lllll}
m=0 & 0 & & & & \\
1 & a_0^0\alpha_{(n,\ 1)} & & & & \\
2 & 2a_0^1\alpha_{(n,\ 1)}\ + & a_0^0\alpha_{(n,\ 2)} & & & \\
3 & 3a_0^2\alpha_{(n,\ 1)}\ + & 3a_0^1\alpha_{(n,\ 2)}\ + & a_0^0\alpha_{(n,\ 3)} & & \\
4 & 4a_0^3\alpha_{(n,\ 1)}\ + & 6a_0^2\alpha_{(n,\ 2)}+ & 4a_0^1\alpha_{(n,\ 3)}\ + & & a_0^0\alpha_{(n,\ 4)} \\
. & . & . & . & & . \\
m>n & ma_0^{m-1}\alpha_{(n,\ 1)}+ & \cdots & + & & \dfrac{m!}{n!(m-n)!}a_0^{m-n}\alpha_{(n,\ n)}
\end{array}$$

где

$$\alpha_{(n,\ m)}=\sum\frac{m!}{m_1!m_2!\ldots m_n!}\,a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n},\ \ m\le n,$$

выражению $\prod_{p=1}^{n}a_p^{m_p}$ соответствует разбиение $n=\sum_{p=1}^{n}pm_p$, $\sum_{p=1}^{n}m_p=m$ и суммирование ведется по всем разбиениям числа n на m слагаемых. Коэффициент при $\alpha_{(n,\ m)}$ в $(m+p)$-й строке таблицы равен

$\dfrac{(m+p)!}{m!p!}a_0^p$.

Связь с разбиениями объясняется следующим образом. Рассматривая последовательность произведений различных рядов:

$$a(x),\ a(x)b(x),\ a(x)b(x)c(x),\ \ldots,$$

а затем отождествляя их, приходим к выводу, что множеству слагаемых в разложении n-го члена m-й строки матрицы $\langle a(x)\rangle^*$ соответствует множество размещений n неразличимых предметов по m неразличимым ячейкам: выражение $a_0^{m_0}a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n}$ означает, что в соответствующем слагаемому размещении m_p ячеек содержат одинаковое число предметов, равное p. Коэффициент при $a_0^{m_0}a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots a_n^{m_n}$ равен $\dfrac{m!}{m_0!m_1!\ldots m_n!}$.

Множество размещений n неразличимых предметов по m неразличимым ячейкам можно разбить на подмножества размещений с одинаковым числом пустых ячеек, равным p. Каждому такому подмножеству соответствует множество разбиений числа n на $m-p$ слагаемых. При $m<n$ число подмножеств равно m, при $m\ge n$ число подмножеств равно n.

Если $a_0=0$, n-я строка матрицы $\langle a(x)\rangle=\langle a(x)-a_0\rangle$ принимает вид (имеет место равенство $0^0=1$)

$$v_n(x)=x\tilde{v}_n(x)=\sum_{m=1}^{n}\alpha_{(n,\ m)}x^m:$$

$$\langle a(x)-a_0\rangle=$$

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_2 & a_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_3 & 2a_1a_2 & a_1^3 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_4 & 2a_1a_3+a_2^2 & 3a_1^2a_2 & a_1^4 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_5 & 2a_1a_4+2a_2a_3 & 3a_1^2a_3+3a_1a_2^2 & 4a_1^3a_2 & a_1^5 & 0 & \cdot\\
0 & a_6 & 2a_1a_5+2a_2a_4+a_3^2 & 3a_1^2a_4+6a_1a_2a_3+a_2^3 & 4a_1^3a_3+6a_1^2a_2^2 & 5a_1^4a_2 & a_1^6 & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}$$

Если

$$\log a(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n,$$

то биномиальная последовательность ряда $a(x)$ имеет вид

$$u_n(x)=n!\sum_{m=1}^{n}\frac{\delta_{(n,\ m)}}{m!}x^m,$$

где

$$\delta_{(n,\ m)}=\sum\frac{m!}{m_1!m_2!\ldots m_n!}\ b_1^{m_1}b_2^{m_2}\ldots\ b_n^{m_n},\ \ m\le n,$$

и суммирование ведется по всем разбиениям числа n на m слагаемых. В свою очередь, как видно из подстановки

$$\log\left(1+\left(a(x)-1\right)\right)=\log a(x),$$

$$b_n=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\frac{\alpha_{(n,\ m)}}{m}.$$

Рассматривая матрицу $\left\langle a(x)\right\rangle^*$, мы выявили следующее преобразование n-го столбца верхней половины таблицы $\left\{a(x)\right\}_0$:

$$^{n}a(x)=\sum_{m=1}^{n}\frac{\alpha_{(n,\ m)}x^{m-1}}{(1-x)^{m+1}}=\frac{\sum_{m=1}^{n}\alpha_{(n,\ m)}x^{m-1}(1-x)^{n-m}}{(1-x)^{n+1}}=\frac{a_n(x)}{(1-x)^{n+1}}.$$

Обозначим:

$$\widehat{I}_n E\widehat{I}_n=V_n,\ \ \widehat{I}_n E^{-1}\widehat{I}_n=V_n^{-1}.$$

Например,

$$V_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix},\ \ V_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\ \ V_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\3&1&0&0\\3&2&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}.$$

$$V_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix},\quad V_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix},\quad V_4^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\3&-2&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$V_n^{-1}\tilde{v}_n(x)=a_n(x).$$

Например,

$$a(x)=\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1},\quad a(x)-1=x\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1},$$

$$\tilde{v}_n(x)=\left(\frac{1}{2}+x\right)^{n-1},$$

$$a_n(x)=\widehat{I}_nE^{-1}\widehat{I}_n\left(\frac{1}{2}+x\right)^{n-1}=\widehat{I}_nE^{-1}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}(1+x)^{n-1},$$

$${}^{n}a(x)=(1-x)^{-2}\,\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{n-1},$$

$$u_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\prod_{m=0}^{n-1}(x-p+m).$$

Еще пример:

$$a(x)=\left(\frac{x}{2}+\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{1/2}\right)^2,$$

$$a(x)-1=xa^{1/2}(x)=x\left(\frac{x}{2}+\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{1/2}\right),$$

$$\left\{a^{1/2}(x)\right\}_0:$$

$$
\begin{array}{r|ccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4 & 1 & 2 & \frac{4}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{7}{64} & \cdot \\
3 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{8} & \frac{1}{2} & \frac{15}{128} & 0 & \cdot \\
2 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{128} & \cdot \\
1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{128} & 0 & \cdot \\
k = \quad 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{128} & 0 & \cdot \\
-2 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{128} & \cdot \\
-3 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{15}{128} & 0 & \cdot \\
-4 & 1 & -2 & \frac{4}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{64} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

k-й нисходящей диагональю таблицы является ряд

$$\left(1-\frac{x}{2}\left(\log(1+x)\right)'\right)(1+x)^{\frac{k}{2}}=\left(1+\frac{x}{2}\right)(1+x)^{-1}(1+x)^{\frac{k}{2}}.$$

Следовательно, $2n$-й строкой матрицы $\left\langle xa^{1/2}(x)\right\rangle$, $n>0$, является полином

$$\widehat{I}_{2n+1}\left(1+\frac{x}{2}\right)(1+x)^{n-1}=x^n\left(\frac{1}{2}+x\right)(1+x)^{n-1}.$$

Отсюда

$$a_{2n}(x)=\widehat{I}_{2n}E^{-1}\widehat{I}_{2n}x^{n-1}\left(\frac{1}{2}+x\right)(1+x)^{n-1}=$$

$$=\widehat{I}_{2n}E^{-1}\left(1+\frac{x}{2}\right)(1+x)^{n-1}=\widehat{I}_{2n}\frac{1}{2}(1+x)x^{n-1}=\frac{1}{2}(1+x)x^{n-1}.$$

Действительно,

$$\frac{1}{2}\prod_{m=0}^{2n-1}(x-n+1+m)+\frac{1}{2}\prod_{m=0}^{2n-1}(x-n+m)=\prod_{m=0}^{n-1}\left(x^2-m^2\right).$$

Если $a(x)=1+x+x^2$ или $a(x)=1+x\left(1-x^2\right)^{-1}$:

$$\langle a(x)-1\rangle=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&0&\cdot\\0&1&1&0&0&\cdot\\0&0&2&1&0&\cdot\\0&0&1&3&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},\ \langle a(x)-1\rangle=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&0&0&\cdot\\0&0&1&0&0&0&\cdot\\0&1&0&1&0&0&\cdot\\0&0&2&0&1&0&\cdot\\0&1&0&3&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},$$

то полиномы $\tilde{v}_n(x)$ определенным образом связаны с полиномами Чебышева и выражаются общей формулой. В первом случае

$$\tilde{v}_n(x)=x^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\prod_{m=1}^{[n/2]}\left(x+4\cos^2\frac{m}{n+1}\pi\right),\ n>1,$$

где $[m/2]$ – целая часть от $m/2$; во втором случае

$$\tilde{v}_n(x)=\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+2i\cos\frac{m}{n}\pi\right),\ n>1,\ i=\sqrt{-1}.$$

Отсюда легко получить общую формулу полиномов $a_n(x)$.

p-м столбцом матрицы $U_n^{-1}V_n^{-1}$, отображающей $\tilde{v}_n(x)$ на $\tilde{u}_n(x)$, является полином

$$U_n^{-1}(1-x)^{n-p-1}x^p=\frac{n!}{(p+1)!}\frac{1}{x}\prod_{m=0}^{p}(x-m)=$$

$$=\frac{n!}{(p+1)!}\sum_{m=1}^{p+1}s(p+1,\ m)x^{m-1},$$

где $s(p+1,\ m)$ – числа Стерлинга первого рода. Следовательно, p-м столбцом обратной матрицы является полином

$$\frac{1}{n!}\sum_{m=1}^{p+1} m!S(\,p+1,\ m\,)\,x^{m-1},$$

где $S(\,p+1,\ m\,)$ – числа Стерлинга второго рода. Например,

$$U_4^{-1}V_4^{-1}=4!\begin{pmatrix}1&-1&2&-6\\0&1&-3&11\\0&0&1&-6\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{3!}&0\\0&0&0&\frac{1}{4!}\end{pmatrix},$$

$$V_4U_4=\frac{1}{4!}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3!&0\\0&0&0&4!\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&3&7\\0&0&1&6\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем еще одно выражение биномиальной последовательности ряда $\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}$:

$$u_n(x)=\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p}\frac{1}{2^{n-1-p}}\frac{n!}{(p+1)!}\prod_{m=0}^{p}(x-m).$$

Оператор умножения на $a(x)$ обозначим $[a(x)]$, транспонированную матрицу обозначим $[a(x)]^*$. Диагональную матрицу $D[x]$ обозначим $\tilde{D}$:

$$\tilde{D}a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_nx^n\,.$$

Учитывая участие чисел Стерлинга в преобразовании $e^{\varphi\log(1+x)}=(1+x)^{\varphi}$, можно показать, что

$$V_nU_nE^{\varphi}U_n^{-1}V_n^{-1}=\tilde{D}\left[(1+x)^{\varphi}\right]^*\tilde{D}^{-1}I_n\,.$$

Например,

$$V_4U_4E^4U_4^{-1}V_4^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&4&6&4\\0&1&4&6\\0&0&1&4\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&0\\0&0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

Таким образом, преобразование $A_n^{\nu\beta}$ можно также представить в виде

$$A_n^{\nu\beta}=V_n^{-1}\tilde{D}\left[\left(1+x\right)^{n\nu\beta}\right]^*\tilde{D}^{-1}V_n.$$

И последний штрих. Диагональную матрицу, диагональные элементы которой равны коэффициентам ряда e^x, обозначим $\left|e^x\right|$:

$$\left|e^x\right|a(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n.$$

Тогда проявляется равенство

$$\left|e^x\right|^{-1}\left[e^{\varphi x}\right]\left|e^x\right|=\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle=\left\langle x+\varphi\right\rangle^*=\left(E^{\varphi}\right)^*.$$

n-й столбец матрицы

$$\left|e^x\right|^{-1}\left\langle\log_{(\nu\beta)}a(x)\right\rangle^{-1}\left|e^x\right|=\left|e^x\right|^{-1}\left\langle q(x)e^{-\nu\beta x}\right\rangle\left|e^x\right|,$$

где

$$\left\langle\log a(x)\right\rangle^{-1}=\left\langle q(x)\right\rangle,$$

обозначим ${}_{(\nu\beta)}q_n(x)$, ${}_{(0)}q_n(x)=q_n(x)$. Так как n-й столбец матрицы

$$\left|e^x\right|^{-1}\left[e^{-n\nu\beta x}\right]\left\langle q(x)\right\rangle\left|e^x\right|$$

совпадает с n-м столбцом матрицы

$$\left|e^x\right|^{-1}\left\langle q(x)e^{-\nu\beta x}\right\rangle\left|e^x\right|,$$

то

$${}_{(\nu\beta)}q_n(x)=\left(1+n\nu\beta x\right)^{-1}q_n\left(\frac{x}{1+n\nu\beta x}\right)$$

(сравним с аналогичным равенством для биномиальной последовательности, т.е. последовательности строк матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\left\langle\log_{(\nu\beta)} a(x)\right\rangle\left|e^x\right|$:

$$_{(\nu\beta)}u_n(x)=x(x+n\nu\beta)^{-1}u_n(x+n\nu\beta)\text{).}$$

Применительно к e^x и $1+x$:

$$a(x)=e^x,$$

$$\left|e^x\right|^{-1}\left\langle\log_{(\nu\beta)} a(x)\right\rangle^{-1}\left|e^x\right|=\left|e^x\right|^{-1}\left\langle xe^{-\nu\beta x}\right\rangle\left|e^x\right|,$$

$$q_n(x)=x^n,\quad {}_{(\nu\beta)}q_n(x)=x^n(1+n\nu\beta x)^{-(n+1)}.$$

$$a(x)=1+x,$$

$$\left|e^x\right|^{-1}\left\langle\log_{(\nu\beta)} a(x)\right\rangle^{-1}\left|e^x\right|=\left|e^x\right|^{-1}\left\langle\left(e^x-1\right)e^{-\nu\beta x}\right\rangle\left|e^x\right|,$$

$$q_n(x)=x^n\prod_{m=0}^{n}(1-mx)^{-1},\quad {}_{(\nu\beta)}q_n(x)=x^n\prod_{m=0}^{n}(1+(n\nu\beta-m)x)^{-1},$$

$$_{(1/2)}q_n(x)=x^n\prod_{m=0}^{n}\left(1+\left(\frac{n}{2}-m\right)x\right)^{-1},$$

$$_{(1/2)}q_{2n}(x)=x^{2n}\prod_{m=0}^{n}\left(1-m^2x^2\right)^{-1},$$

$$_{(1/2)}q_{2n+1}(x)=x^{2n+1}\prod_{m=0}^{n}\left(1-\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2x^2\right)^{-1}.$$

1. Дж. Риордан. Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982
2. Дж. Риордан. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963