ЕВГЕНИЙ БУРЛАЧЕНКО

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

Настоящие заметки посвящены изучению алгебры формальных степенных рядов. Формальный степенной ряд отождествляется с вектором в бесконечномерном пространстве. Оказывается, что представление векторов в виде степенных рядов находит отклик со стороны структуры векторного пространства. Алгебра формальных степенных рядов как бы погружается в свою естественную среду обитания. Освободившись от смысловых нагрузок, связанных с комбинаторикой и другими математическими дисциплинами, она демонстрирует свойства, присущие ей как организатору структуры бесконечномерного векторного пространства. Одним из организующих начал является аналогичная вращению операция, знакомая нам по разложению функции в ряд Лагранжа и образующая неразрывное единство с операциями логарифмирования и возведения в степень. Благодаря пониманию этого единства, факты, казавшиеся ранее разрозненными, начинают складываться в общую схему.

## Введение

Будем рассматривать формальный степенной ряд с действительными коэффициентами как последовательность этих коэффициентов, т.е. как элемент векторного пространства. Обозначим:

$$\begin{aligned} a_i &= (a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ \ldots), \\ 1 &= (1, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \ \ldots\ ), \\ x &= (0, \quad 1, \quad 0, \quad 0, \ \ldots\ ). \end{aligned}$$

Базис пространства, в котором координаты каждой последовательности (т.е. коэффициенты разложения по базисным векторам) совпадают с ее значениями, назовем основным. Каждой матрице $A$ поставим в соответствие преобразование, отоброжающее последовательность векторов основного базиса на последовательность столбцов матрицы $A$. Матрицу и соответствующее ей преобразование будем обозначать одним и тем же символом. Столбцы и строки матрицы пронумеруем целыми неотрицательными числами. Транспонированную к $A$ матрицу обозначим $A^*$. Образ вектора $a_i$ при преобразовании $A$ обозначим $A(a_i)$.

Целые неотрицательные числа будем обозначать буквами $n$, $m$, $p$, $r$, $i$, целые числа – буквой $k$, действительные числа – буквами $\alpha$, $\beta$, $\varphi$.

Произведением $a_i b_i$ назовем вектор $[a_i](b_i)$, где

$$
[a_i] = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},
$$

или, что то же самое, – вектор $[b_i](a_i)$, где

$$
[b_i] = \begin{pmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ b_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdot \\ b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \cdot \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.
$$

Матрицу вида $[a_i]$ ( $i$-й член $n$-го столбца матрицы равен $a_{i-n}$ и нулю при $n > i$) назовем матрицей умножения на вектор $a_i$.

Обратным к $a_i$ назовем вектор $a_i^{-1} = \dfrac{1}{a_i}$, определяемый уравнением

$$
[a_i](a_i^{-1}) = 1.
$$

Вектор

$$
a_i^n = [a_i](a_i^{n-1})
$$

назовем $n$-й степенью $a_i$. $n$-й вектор основного базиса представим как $n$-ю степень $x$. Каждый вектор запишется в виде

$$
a_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .
$$

$n$-й столбец матрицы $[a_i]$ принимает вид $x^n a_i$. Саму матрицу умножения можно представить в виде

$$
[a_i] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [x^n].
$$

Матрицу, $n$-й столбец которой является $n$-й степенью $a_i$, назовем матрицей степеней вектора $a_i$ и обозначим $\langle a_i \rangle$. Например,

$$\langle 1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \langle x \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \langle x^2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix};$$

$$\left\langle \frac{1}{1-x} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \cdot \\ 0 & 1 & 3 & 6 & \cdot \\ 0 & 1 & 4 & 10 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \left\langle \frac{x}{1-x} \right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\langle a_i \rangle \left( x^n b_i \right) = a_i^n \langle a_i \rangle (b_i),$$

то

$$\langle a_i \rangle [b_i] = [\langle a_i \rangle (b_i)] \langle a_i \rangle.$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\left\langle \frac{x}{1-x} \right\rangle [1+x] = \left[ \frac{1}{1-x} \right] \left\langle \frac{x}{1-x} \right\rangle.$$

Таким образом, матрица степеней отображает произведение векторов на произведение их образов:

$$\langle a_i \rangle (b_i c_i) = \langle a_i \rangle (b_i) \langle a_i \rangle (c_i),$$

так что

$$\langle a_i \rangle \langle b_i \rangle = \langle \langle a_i \rangle (b_i) \rangle.$$

Если рассматривать $a_i$ и $b_i$ как функции $a(x)$ и $b(x)$, то выражению

$\langle a_i \rangle (b_i)$ соответствует подстановка $b(a(x))$.

Обозначим:

$$e^{\beta x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n x^n}{n!}.$$

Убедимся, что векторы данного вида умножаются по правилу

$$e^{\beta x} e^{\alpha x} = e^{(\beta+\alpha)x}.$$

Так как

$$\left\langle e^x - 1 \right\rangle (1+x) = e^x,$$

то

$$\left\langle e^x - 1 \right\rangle^{-1} \left(e^x\right) = 1 + x.$$

Обозначим:

$$\left\langle e^x - 1 \right\rangle^{-1} \left(e^{\beta x}\right) = (1+x)^{\beta},$$

так что

$$(1+x)^{\beta} (1+x)^{\alpha} = (1+x)^{\beta+\alpha}.$$

Пусть $\varphi_{(n,\ m)}$ – элемент матрицы $\left\langle e^x - 1 \right\rangle^{-1}$, где $n$ – номер строки, $m$ – номер столбца. Тогда

$$(1+x)^{\beta} =$$

$$= \left( 1,\ \beta,\ \varphi_{(2,\ 1)}\beta + \frac{\beta^2}{2!},\ \varphi_{(3,\ 1)}\beta + \frac{\varphi_{(3,\ 2)}\beta^2}{2!} + \frac{\beta^3}{3!},\ \ldots \right) =$$

$$= \left( 1,\ \beta,\ \frac{\beta\left(\beta + \alpha_{(2,\ 1)}\right)}{2!},\ \frac{\beta\left(\beta + \alpha_{(3,\ 1)}\right)\left(\beta + \alpha_{(3,\ 2)}\right)}{3!},\ \ldots \right),$$

где $\alpha_{(n,\ m)}$ – комплексные числа. Так как все члены вектора $(1+x)^m$, начиная с $(m+1)$-го, равны нулю, то $\alpha_{(n,\ m)} = -m$. Таким образом,

$$(1+x)^{\beta} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \prod_{m=0}^{n-1} (\beta - m).$$

Вектор

$$\langle a_i - 1\rangle\left((1+x)^{\beta}\right) = a_i^{\beta},\; a_0 = 1,$$

назовем $\beta$-й степенью $a_i$. Так как

$$\langle b_i\rangle\langle a_i - 1\rangle = \langle\langle b_i\rangle(a_i) - 1\rangle,$$

то

$$\langle b_i\rangle\left(a_i^{\beta}\right) = (\langle b_i\rangle(a_i))^{\beta}.$$

Пусть

$$\langle xa_i\rangle^{-1} = \langle xb_i\rangle.$$

Так как

$$\langle xa_i\rangle(x) = xa_i,\;\; \langle xa_i\rangle(xb_i) = x,$$

то

$$\langle xa_i\rangle(b_i) = a_i^{-1}.$$

Получаем правило: если

$$\langle xa_i\rangle(b_i) = a_i,$$

то

$$\langle xa_i\rangle^{-1} = \langle xb_i^{-1}\rangle.$$

Среди матриц степеней особое место занимает матрица $\langle x+\beta\rangle$: транспонированную к ней матрицу можно рассматривать одновременно как произведение матрицы степеней и матрицы умножения и как трансформацию матрицы умножения:

$$\langle x+\beta\rangle^{*} = \left[\frac{1}{1-\beta x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\beta x}\right\rangle,$$

$$\langle x+\beta\rangle^{*} = \left|e^{x}\right|^{-1}\left[e^{\beta x}\right]\left|e^{x}\right|,$$

где $\left|e^{x}\right|$ – диагональная матрица, диагональные элементы которой равны значениям вектора $e^{x}$:

$$\left|e^{x}\right|(a_i) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n!}.$$

Например,

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]\left\langle\frac{x}{1-x}\right\rangle=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdot\\1&1&0&0&\cdot\\1&2&1&0&\cdot\\1&3&3&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&\cdot\\0&0&2&0&\cdot\\0&0&0&6&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdot\\1&1&0&0&\cdot\\\frac{1}{2}&1&1&0&\cdot\\\frac{1}{6}&\frac{1}{2}&1&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&\cdot\\0&0&\frac{1}{2}&0&\cdot\\0&0&0&\frac{1}{6}&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Первый столбец матрицы $\left\langle e^x-1\right\rangle^{-1}$обозначим $\log(1+x)$. Вектор $\left\langle a_i-1\right\rangle(\log(1+x))$, $a_0=1$, назовем логарифмом вектора $a_i$ и обозначим $\log a_i$; вектор $\left\langle xa_i\right\rangle\left(e^x\right)$, где $a_0$ произвольно, назовем экспонентой вектора $xa_i$ и обозначим $e^{xa_i}$. Так как

$$\left\langle xa_i\right\rangle\left\langle e^x-1\right\rangle\left\langle\log(1+x)\right\rangle=$$
$$=\left\langle e^{xa_i}-1\right\rangle\left\langle\log(1+x)\right\rangle=\left\langle\log e^{xa_i}\right\rangle=\left\langle xa_i\right\rangle,$$

то

$$\log e^{xa_i}=xa_i.$$

Так как

$$\left\langle a_i-1\right\rangle\left\langle\log(1+x)\right\rangle\left\langle e^x-1\right\rangle=$$
$$=\left\langle\log a_i\right\rangle\left\langle e^x-1\right\rangle=\left\langle e^{\log a_i}-1\right\rangle=\left\langle a_i-1\right\rangle,$$

то

$$e^{\log a_i}=a_i.$$

Так как

$$\left\langle\log a_i\right\rangle\left(e^{\beta x}\right)=\left\langle\beta\log a_i\right\rangle\left(e^x\right)=a_i^{\beta},$$

то

$$\log a_i^{\beta}=\beta\log a_i.$$

Пусть $D$ и $D^{-1}$ – преобразования, соответствующие дифференцированию и интегрированию в алгебре формальных степенных рядов:

$$D = \left|e^x\right|\left[x\right]^*\left|e^x\right|^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

$$D^{-1} = \left|e^x\right|\left[x\right]\left|e^x\right|^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \cdot \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Обозначим:

$$D(a_i) = (a_i)',\ \ D^{-1}(a_i) = \int a_i\,.$$

Убедимся, что

$$D[a_i] = [a_i]D + \left[(a_i)'\right],$$

или

$$(a_i b_i)' = a_i(b_i)' + (a_i)'\,b_i:$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot \\ 2a_2 & 2a_1 & 2a_0 & 0 & \cdot \\ 3a_3 & 3a_2 & 3a_1 & 3a_0 & \cdot \\ 4a_4 & 4a_3 & 4a_2 & 4a_1 & \cdot \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_1 & 2a_0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_2 & 2a_1 & 3a_0 & \cdot \\ 0 & a_3 & 2a_2 & 3a_1 & \cdot \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 2a_2 & a_1 & 0 & 0 & \cdot \\ 3a_3 & 2a_2 & a_1 & 0 & \cdot \\ 4a_4 & 3a_3 & 2a_2 & a_1 & \cdot \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\left(a_i^n\right)' = n a_i^{n-1}(a_i)',$$

$$D\langle a_i\rangle = \left[(a_i)'\right]\langle a_i\rangle D,$$

или

$$(\langle a_i\rangle(b_i))' = (a_i)'\langle a_i\rangle\left((b_i)'\right).$$

Так как

$$\left(e^x\right)' = e^x,$$

то

$$\left(\langle \log a_i \rangle \left(e^x\right)\right)' = (\log a_i)' \langle \log a_i \rangle \left(e^x\right),$$

$$(\log a_i)' = \frac{(a_i)'}{a_i}.$$

Отсюда находим:

$$\log(1+x) = \int (1+x)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

## 1. Биномиальная форма записи степенного ряда

### 1.1

Рассмотрим множество векторов $b_i a_i^k$, где $k$ принимает все целочисленные значения, $a_0 = 1$, $a_n = 0$, $0 < n < m$, $a_m > 0$ (т.е. первый отличный от нуля член $a_i - 1$ положителен), $b_i$ – произвольный вектор. Таблицу, $k$-й строкой которой является $b_i a_i^k$, обозначим $\{b_i \mid a_i\}_0$:

$$\{b_i \mid a_i\}_0:$$

$$\begin{array}{r|ccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2 & b_0^{(2)} & b_1^{(2)} & b_2^{(2)} & \cdot \\
1 & b_0^{(1)} & b_1^{(1)} & b_2^{(1)} & \cdot \\
k=0 & b_0^{(0)} & b_1^{(0)} & b_2^{(0)} & \cdot \\
-1 & b_0^{(-1)} & b_1^{(-1)} & b_2^{(-1)} & \cdot \\
-2 & b_0^{(-2)} & b_1^{(-2)} & b_2^{(-2)} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},$$

где $b_i^{(k)} = b_i a_i^k$. Каждую строку таблицы заменим восходящей диагональю, имеющей со строкой общий нулевой член. Полученную таблицу обозначим $\{b_i \mid a_i\}_1$. С таблицей $\{b_i \mid a_i\}_1$ проделаем ту же операцию, результат обозначим $\{b_i \mid a_i\}_2$. С таблицей $\{b_i \mid a_i\}_2$ проделаем ту же операцию, и т. д. Например:

$$\{b_i \mid a_i\}_1: \qquad\qquad \{b_i \mid a_i\}_2:$$

$$\begin{array}{r|cccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2 & b_0^{(2)} & b_1^{(3)} & b_2^{(4)} & \cdot \\
1 & b_0^{(1)} & b_1^{(2)} & b_2^{(3)} & \cdot \\
k=0 & b_0^{(0)} & b_1^{(1)} & b_2^{(2)} & \cdot \\
-1 & b_0^{(-1)} & b_1^{(0)} & b_2^{(1)} & \cdot \\
-2 & b_0^{(-2)} & b_1^{(-1)} & b_2^{(0)} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}, \qquad
\begin{array}{r|cccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2 & b_0^{(2)} & b_1^{(4)} & b_2^{(6)} & \cdot \\
1 & b_0^{(1)} & b_1^{(3)} & b_2^{(5)} & \cdot \\
k=0 & b_0^{(0)} & b_1^{(2)} & b_2^{(4)} & \cdot \\
-1 & b_0^{(-1)} & b_1^{(1)} & b_2^{(3)} & \cdot \\
-2 & b_0^{(-2)} & b_1^{(0)} & b_2^{(2)} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}.$$

Каждую строку таблицы $\{b_i \mid a_i\}_0$ заменим нисходящей диагональю, имеющей со строкой общий нулевой член. Полученную таблицу обозначим $\{b_i \mid a_i\}_{-1}$. С таблицей $\{b_i \mid a_i\}_{-1}$ проделаем ту же операцию, и т. д. Например:

$$\{b_i \mid a_i\}_{-1}: \qquad\qquad \{b_i \mid a_i\}_{-2}:$$

$$\begin{array}{r|cccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2 & b_0^{(2)} & b_1^{(1)} & b_2^{(0)} & \cdot \\
1 & b_0^{(1)} & b_1^{(0)} & b_2^{(-1)} & \cdot \\
k=0 & b_0^{(0)} & b_1^{(-1)} & b_2^{(-2)} & \cdot \\
-1 & b_0^{(-1)} & b_1^{(-2)} & b_2^{(-3)} & \cdot \\
-2 & b_0^{(-2)} & b_1^{(-3)} & b_2^{(-4)} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}, \qquad
\begin{array}{r|cccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2 & b_0^{(2)} & b_1^{(0)} & b_2^{(-2)} & \cdot \\
1 & b_0^{(1)} & b_1^{(-1)} & b_2^{(-3)} & \cdot \\
k=0 & b_0^{(0)} & b_1^{(-2)} & b_2^{(-4)} & \cdot \\
-1 & b_0^{(-1)} & b_1^{(-3)} & b_2^{(-5)} & \cdot \\
-2 & b_0^{(-2)} & b_1^{(-4)} & b_2^{(-6)} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Преобразование, отображающее каждую строку таблицы $\{b_i \mid a_i\}_0$ на одноименную строку таблицы $\{b_i \mid a_i\}_k$ , назовем $k$-м поворотом таблицы

$\{b_i \mid a_i\}_0$ и обозначим $\{a_i\}_{0|k}$ , имея в виду, что для всех $b_i$ преобразование одно и то же.

Пусть $f(x)$ и $a(x)$ – формальные степенные ряды, $a_0 = 1$, $a_n = 0$, $0 < n < m$, $a_m > 0$, где $a_i$ – коэффициенты ряда $a(x)$. $f(x)$ раскладывается в ряд Лагранжа по правилам [1, с.147]:

$$\frac{f(x)}{1 - x(\log a(x))'} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n a^{-n}(x) \frac{1}{n!} \Big| D^n \big( f(x) a^n(x) \big) \Big|_{x=0} ,$$

$$\frac{f(x)}{1 + x(\log a(x))'} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n a^{n}(x) \frac{1}{n!} \Big| D^n \big( f(x) a^{-n}(x) \big) \Big|_{x=0} .$$

Если $f(x)$ – нулевая строка таблицы $\{f(x) \mid a(x)\}_0$, то выражения $\frac{1}{n!} \Big| D^n \big( f(x) a^n(x) \big) \Big|_{x=0}$ и $\frac{1}{n!} \Big| D^n \big( f(x) a^{-n}(x) \big) \Big|_{x=0}$ означают соответственно $n$-й член нулевой восходящей диагонали и $n$-й член нулевой нисходящей диагонали таблицы $\{f(x) \mid a(x)\}_0$. Перейдем к нашим обозначениям: $f(x) = b_i$, $a(x) = a_i$. $k$-ю восходящую и $k$-ю нисходящую диагонали таблицы $\{b_i \mid a_i\}_0$ обозначим соответственно ${}_{(1)}b_i^{(k)}$ и ${}_{(-1)}b_i^{(k)}$. Тогда

$$b_i = \Big[ 1 - x(\log a_i)' \Big] \big\langle x a_i^{-1} \big\rangle \big( {}_{(1)}b_i^{(0)} \big),$$

$$b_i = \Big[ 1 + x(\log a_i)' \Big] \big\langle x a_i \big\rangle \big( {}_{(-1)}b_i^{(0)} \big).$$

Замана $b_i$ на $b_i a_i^k$ дает:

$$b_i a_i^k = \Big[ 1 - x(\log a_i)' \Big] \big\langle x a_i^{-1} \big\rangle \big( {}_{(1)}b_i^{(k)} \big),$$

$$b_i a_i^k = \Big[ 1 + x(\log a_i)' \Big] \big\langle x a_i \big\rangle \big( {}_{(-1)}b_i^{(k)} \big).$$

Матрица степеней отображает произведение векторов на произведение их образов. Следовательно,

$$ {}_{(1)}b_i^{(k)} = {}_{(1)}b_i^{(0)} \left( {}_{(1)}a_i \right)^k, \quad {}_{(-1)}b_i^{(k)} = {}_{(-1)}b_i^{(0)} \left( {}_{(-1)}a_i \right)^k, $$

где ${}_{(1)}a_i$, ${}_{(-1)}a_i$ – определенные векторы. Обобщая, выводим:

$$ \{b_i \mid a_i\}_k = \left\{ {}_{(k)}b_i \mid {}_{(k)}a_i \right\}_0, $$

$$ \{a_i\}_{0|1} = \left[ 1 + x\left(\log {}_{(1)}a_i\right)' \right] \left\langle x_{(1)}a_i \right\rangle, $$

$$ \{a_i\}_{0|-1} = \left[ 1 - x\left(\log {}_{(-1)}a_i\right)' \right] \left\langle x\left( {}_{(-1)}a_i \right)^{-1} \right\rangle. $$

По определению $k$-я строка таблицы $\left\{b_i \mid a_i^n\right\}_1$ совпадает с $nk$-й строкой таблицы $\left\{b_i \mid a_i\right\}_n = \left\{ {}_{(n)}b_i \mid {}_{(n)}a_i \right\}_0$, $k$-я строка таблицы $\left\{b_i \mid a_i^n\right\}_{-1}$ совпадает с $nk$-й строкой таблицы $\left\{b_i \mid a_i\right\}_{-n} = \left\{ {}_{(-n)}b_i \mid {}_{(-n)}a_i \right\}_0$, так что

$$ \left\{b_i \mid a_i^n\right\}_1 = \left\{ {}_{(n)}b_i \mid \left( {}_{(n)}a_i \right)^n \right\}_0, $$

$$ \left\{b_i \mid a_i^n\right\}_{-1} = \left\{ {}_{(-n)}b_i \mid \left( {}_{(-n)}a_i \right)^n \right\}_0, $$

$$ \{a_i\}_{0|n} = \left\{a_i^n\right\}_{0|1} = \left[ 1 + nx\left(\log {}_{(n)}a_i\right)' \right] \left\langle x\left( {}_{(n)}a_i \right)^n \right\rangle. $$

$$ \{a_i\}_{0|-n} = \left\{a_i^n\right\}_{0|-1} = \left[ 1 - nx\left(\log {}_{(-n)}a_i\right)' \right] \left\langle x\left( {}_{(-n)}a_i \right)^{-n} \right\rangle, $$

где ${}_{(k)}a_i$ определяется уравнениями

$$ {}_{(k)}a_i = \left\langle x\left( {}_{(k)}a_i \right)^k \right\rangle (a_i), \quad a_i = \left\langle x a_i^{-k} \right\rangle \left( {}_{(k)}a_i \right). $$

Чтобы подчеркнуть элементарность рассматриваемой конструкции, опишем ее, не ссылаясь на ряды Лагранжа.

**1.2**

Представим таблицу, нулевая строка которой совпадает с вектором $b_i$, все члены нулевого столбца равны $b_0$. Остальные элементы не определены. Отталкиваясь от этих начальных условий, составим таблицу $\left\{c_i^{(0)} \mid a_i\right\}_1$, где $c_i^{(k)}$ – $k$-я нисходящая диагональ составляемой таблицы, $a_i$ – определенный вектор (по определению $a_0 = 1$).

Умножая вектор $c_i^{(1)}$, два первых члена которого известны, на $a_i^k$, где $k$ последовательно принимает все значения, получаем первый столбец составляемой таблицы. Умножая $c_i^{(2)}$, три первых члена которого известны, на $a_i^k$, получаем второй столбец составляемой таблицы, и т. д. Таким образом действительно получаем таблицу, нисходящие диагонали которой связаны равенством

$$c_i^{(k)} = c_i^{(0)} a_i^k .$$

Аналогичным образом, отталкиваясь от тех же начальных условий, можно составить таблицу $\left\{d_i^{(0)} \mid a_i\right\}_{-1}$, где $d_i^{(k)}$ – $k$-я восходящая диагональ составляемой таблицы. Например, при $a_i = 1 + x$:

$$\left\{c_i^{(0)} \mid 1 + x\right\}_1 :$$

$$
\begin{array}{r|lllll}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & b_0 & 3b_0 + b_1 & 6b_0 + 3b_1 + b_2 & 10b_0 + 6b_1 + 3b_2 + b_3 & \cdot \\
2 & b_0 & 2b_0 + b_1 & 3b_0 + 2b_1 + b_2 & 4b_0 + 3b_1 + 2b_2 + b_3 & \cdot \\
1 & b_0 & b_0 + b_1 & b_0 + b_1 + b_2 & b_0 + b_1 + b_2 + b_3 & \cdot \\
k = 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdot \\
-1 & b_0 & -b_0 + b_1 & -b_1 + b_2 & -b_2 + b_3 & \cdot \\
-2 & b_0 & -2b_0 + b_1 & b_0 - 2b_1 + b_2 & b_1 - 2b_2 + b_3 & \cdot \\
-3 & b_0 & -3b_0 + b_1 & 3b_0 - 3b_1 + b_2 & -b_0 + 3b_1 - 3b_2 + b_3 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

$$\left\{ d_i^{(0)} \,|\, 1 + x \right\}_{-1}:$$

$$
\begin{array}{r|lllll}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & b_0 & 3b_0 + b_1 & 3b_1 + b_2 & b_0 + 3b_2 + b_3 & \cdot \\
2 & b_0 & 2b_0 + b_1 & -b_0 + 2b_1 + b_2 & 2b_0 - b_1 + 2b_2 + b_3 & \cdot \\
1 & b_0 & b_0 + b_1 & -b_0 + b_1 + b_2 & 2b_0 - b_1 + b_2 + b_3 & \cdot \\
k = 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \cdot \\
-1 & b_0 & -b_0 + b_1 & 2b_0 - b_1 + b_2 & -5b_0 + 2b_1 - b_2 + b_3 & \cdot \\
-2 & b_0 & -2b_0 + b_1 & 5b_0 - 2b_1 + b_2 & -14b_0 + 5b_1 - 2b_2 + b_3 & \cdot \\
-3 & b_0 & -3b_0 + b_1 & 9b_0 - 3b_1 + b_2 & -28b_0 + 9b_1 - 3b_2 + b_3 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

При замене нулевой строки таблицы $\left\{ c_i^{(0)} \,|\, a_i \right\}_1$ на $x^n b_i$, должна получиться таблица, $(n+m)$-й столбец которой совпадает с $m$-м столбцом таблицы $\left\{ c_i^{(0)} \,|\, a_i \right\}_1$. Тем самым доказывается, что коэффициент при $b_0$ в разложении $n$-го члена $k$-й строки таблицы $\left\{ c_i^{(0)} \,|\, a_i \right\}_1$ по членам нулевой строки равен коэффициенту при $b_m$ в разложении $(n+m)$-го члена. Следовательно, $k$-я строка таблицы имеет вид $b_i \left( {}_{(1)}a_i \right)^k$, где $\left( {}_{(1)}a_i \right)^k$ –

определенный вектор. При замене нулевой строки на $\dfrac{b_i}{\left({}_{(1)}a_i\right)^k}$ должна получиться таблица, $(k+s)$-я строка которой ($s$ – целое число) совпадает с $s$-й строкой таблицы $\left\{c_i^{(0)} \mid a_i\right\}_1$. Тем самым доказывается, что $\left({}_{(1)}a_i\right)^k$ – это $k$-я степень ${}_{(1)}a_i$.

Аналогичные рассуждения применимы и к таблице $\left\{d_i^{(0)} \mid a_i\right\}_{-1}$.

Таким образом,

$$\left\{c_i^{(0)} \mid a_i\right\}_1 = \left\{b_i \mid {}_{(1)}a_i\right\}_0, \quad \left\{d_i^{(0)} \mid a_i\right\}_{-1} = \left\{b_i \mid {}_{(-1)}a_i\right\}_0.$$

Другими словами, если строки таблицы связаны равенством $b_i^{(k)} = b_i^{(0)} a_i^k$, то ее восходящие диагонали связаны равенством ${}_{(1)}b_i^{(k)} = {}_{(1)}b_i^{(0)}\left({}_{(1)}a_i\right)^k$, нисходящие диагонали связаны равенством ${}_{(-1)}b_i^{(k)} = {}_{(-1)}b_i^{(0)}\left({}_{(-1)}a_i\right)^k$.

Обобщая, выводим:

$$\left\{b_i \mid a_i\right\}_k = \left\{{}_{(k)}b_i \mid {}_{(k)}a_i\right\}_0,$$

где ${}_{(k)}b_i$, ${}_{(k)}a_i$ – определенные векторы.

Обозначим: $\left\{1 \mid a_i\right\}_0 = \left\{a_i\right\}_0$. Например:

$$\left\{1+x\right\}_0:$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 3 & 1 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & 3 & -4 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 6 & -10 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},$$

$\left\{1+x\right\}_1$: $\left\{1+x\right\}_2$:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 4 & 10 & 20 & \cdot \\
2 & 1 & 3 & 6 & 10 & \cdot \\
1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot \\
k=0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-2 & 1 & -1 & 0 & 0 & \cdot \\
-3 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}, \qquad
\begin{array}{r|rrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 5 & 21 & 84 & \cdot \\
2 & 1 & 4 & 15 & 56 & \cdot \\
1 & 1 & 3 & 10 & 35 & \cdot \\
k=0 & 1 & 2 & 6 & 20 & \cdot \\
-1 & 1 & 1 & 3 & 10 & \cdot \\
-2 & 1 & 0 & 1 & 4 & \cdot \\
-3 & 1 & -1 & 0 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},$$

$$\{1+x\}_{-1}: \qquad\qquad \{1+x\}_{-2}:$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 2 & 0 & 0 & \cdot \\
2 & 1 & 1 & 0 & -1 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & 1 & -4 & \cdot \\
k=0 & 1 & -1 & 3 & -10 & \cdot \\
-1 & 1 & -2 & 6 & -20 & \cdot \\
-2 & 1 & -3 & 10 & -35 & \cdot \\
-3 & 1 & -4 & 15 & -56 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}, \qquad
\begin{array}{r|rrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 1 & 1 & -10 & \cdot \\
2 & 1 & 0 & 3 & -20 & \cdot \\
1 & 1 & -1 & 6 & -35 & \cdot \\
k=0 & 1 & -2 & 10 & -56 & \cdot \\
-1 & 1 & -3 & 15 & -84 & \cdot \\
-2 & 1 & -4 & 21 & -120 & \cdot \\
-3 & 1 & -5 & 28 & -165 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}.$$

$n$-й член $k$-й строки таблицы $\{a_i\}_s = \{{}_{(s)}b_i \mid {}_{(s)}a_i\}_0$ обозначим $\left({}_{(s)}b_i\right)_n^k$. Тогда $a_n^k = \left({}_{(s)}b_i\right)_n^{k-sn}$. Если $a_i = 1+x$, то $a_n^k = a_n^{k-1} + a_{n-1}^{k-1}$, $\left({}_{(s)}b_i\right)_n^k = \left({}_{(s)}b_i\right)_n^{k-1} + \left({}_{(s)}b_i\right)_{n-1}^{k-1+s}$. $n$-й член $k$-й строки таблицы $\left\{{}_{(s)}a_i\right\}_0$ обозначим $\left({}_{(s)}a_i\right)_n^k$. Так как нулевая строка и нулевой столбец таблицы $\left\{{}_{(m)}(1+x)\right\}_0$ известны, остальные элементы таблицы находим по правилам:

$$\left({}_{(m)}a_i\right)_n^k = \left({}_{(m)}a_i\right)_n^{k-1} + \left({}_{(m)}a_i\right)_{n-1}^{k-1+m},$$

$$\left({}_{(m)}a_i\right)_n^k=\left({}_{(m)}a_i\right)_n^{k+1}-\left({}_{(m)}a_i\right)_{n-1}^{k+m}.$$

Например,

$$\left\{{}_{(1)}(1+x)\right\}_0:$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
. & . & . & . & . & . & . \\
4 & 1 & 4 & 10 & 20 & 35 & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 3 & -1 & 0 & \cdot \\
-4 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \cdot \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{array},$$

$$\left\{{}_{(2)}(1+x)\right\}_0: \qquad \left\{{}_{(3)}(1+x)\right\}_0:$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
. & . & . & . & . & . & . \\
4 & 1 & 4 & 14 & 48 & 165 & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 9 & 28 & 90 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & 5 & 14 & 42 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 2 & 5 & 14 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -5 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & -1 & -2 & -5 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 0 & -1 & -3 & \cdot \\
-4 & 1 & -4 & 2 & 0 & -1 & \cdot \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{array}, \quad
\begin{array}{r|rrrrrr}
. & . & . & . & . & . & . \\
4 & 1 & 4 & 18 & 88 & 455 & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 12 & 55 & 273 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & 7 & 30 & 143 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 3 & 12 & 55 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & -2 & -7 & -30 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & -3 & -10 & -42 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & -3 & -10 & -42 & \cdot \\
-4 & 1 & -4 & -2 & -8 & -35 & \cdot \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{array}.$$

Так как при $a_i=1+x$

$$a_i^k=\langle -x\rangle\left(\left({}_{(1)}a_i\right)^{-k}\right),$$

то

$$\left({}_{(-m)}a_i\right)^k = \langle -x\rangle\left(\left({}_{(m+1)}a_i\right)^{-k}\right).$$

Например,

$\left\{{}_{(-1)}(1+x)\right\}_0$:

$$\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 0 & 1 & -3 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & -1 & 2 & -5 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & -1 & 2 & -5 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & 2 & -5 & 14 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & 5 & -14 & 42 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 9 & -28 & 90 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},$$

$\left\{{}_{(-2)}(1+x)\right\}_0$:

$$\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 3 & -3 & 10 & -42 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & -3 & 10 & -42 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & -2 & 7 & -30 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & 3 & -12 & 55 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & 7 & -30 & 143 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 12 & -55 & 273 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}.$$

Преобразование $\left\{a_i\right\}_{0|1}$ отображает $k$-ю строку таблицы $\left\{a_i\right\}_0$ на $k$-ю восходящую диагональ, $n$-й член которой равен $a_n^{k+n}$. Следовательно, $n$-я строка матрицы $\left\{a_i\right\}_{0|1}$ совпадает с $n$-й строкой матрицы $\left[a_i^n\right]$, и, как видно из таблицы $\left\{a_i\right\}_0$, $n$-й столбец матрицы $\left\{a_i\right\}_{0|1}$ совпадает с умноженной на $x^n$ $n$-й восходящей диагональю таблицы $\left\{a_i\right\}_0$.

Таким образом,

$$\left\{a_i\right\}_{0|1} = \left[{}_{(1)}b_i\right]\left\langle x_{(1)}a_i\right\rangle,$$

где ${}_{(1)}b_i$ – нулевая восходящая диагональ таблицы $\left\{a_i\right\}_0 = \left\{{}_{(1)}b_i \mid {}_{(1)}a_i\right\}_{-1}$. Например,

$$\left\{1+x\right\}_{0|1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\left\{{}_{(1)}(1+x)\right\}_{0|1} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 10 & 6 & 3 & 1 & 0 & \cdot \\ 35 & 20 & 10 & 4 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 10 & 3 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ 35 & 10 & 3 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\left\{{}_{(2)}(1+x)\right\}_{0|1} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 28 & 9 & 3 & 1 & 0 & \cdot \\ 165 & 48 & 14 & 4 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 28 & 5 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ 165 & 28 & 5 & 1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 3 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 12 & 7 & 3 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Аналогично, $n$-я строка матрицы $\left\{a_i\right\}_{0|-1}$ совпадает с $n$-й строкой матрицы $\left[a_i^{-n}\right]$, $n$-й столбец совпадает с умноженной на $x^n$ минус $n$-й нисходящей диагональю таблицы $\left\{a_i\right\}_0$:

$$\left\{a_i\right\}_{0|-1} = \left[{}_{(-1)}b_i\right]\left\langle x\left({}_{(-1)}a_i\right)^{-1}\right\rangle,$$

где ${}_{(-1)}b_i$ – нулевая нисходящая диагональ таблицы $\left\{a_i\right\}_0 = \left\{{}_{(-1)}b_i \mid {}_{(-1)}a_i\right\}_1$. Например,

$$\left\{{}_{(2)}(1+x)\right\}_{0|-1} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 0 & \cdot \\ -1 & 0 & 2 & -4 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & \cdot \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\left\{{}_{(1)}(1+x)\right\}_{0|-1} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & -1 & 3 & -3 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\left\{1+x\right\}_{0|-1} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \cdot \\ 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \cdot \\ -10 & 6 & -3 & 1 & 0 \cdot \\ 35 & -20 & 10 & -4 & 1 \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\, \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \cdot \\ 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \cdot \\ -10 & 3 & -1 & 1 & 0 \cdot \\ 35 & -10 & 3 & -1 & 1 \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\, \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \cdot \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \cdot \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \cdot \\ 0 & -5 & 5 & -3 & 1 \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\, \cdot \end{pmatrix}.$$

Так как $\left\{a_i\right\}_{0|1}$ является матрицей поворота таблицы $\left\{x^n \mid a_i\right\}_0$:

$$\left\{a_i\right\}_{0|1}\left(x^n a_i^k\right) = {}_{(1)}b_i x^n \left({}_{(1)}a_i\right)^n \left({}_{(1)}a_i\right)^k,$$

где $x^n{}_{(1)}b_i\left({}_{(1)}a_i\right)^n$ – нулевая восходящая диагональ таблицы $\left\{x^n \mid a_i\right\}_0$, она также является матрицей поворота таблицы $\left\{b_i \mid a_i\right\}_0$, где $b_i$ – произвольный вектор. То же относится к матрице $\left\{a_i\right\}_{0|-1}$.

$k$-я строка таблицы $\left\{a_i^n\right\}_1$ совпадает с $nk$-й строкой таблицы $\left\{a_i\right\}_n = \left\{{}_{(n)}b_i \mid {}_{(n)}a_i\right\}_0$, так что

$$\left\{a_i^n\right\}_1 = \left\{{}_{(n)}b_i \mid \left({}_{(n)}a_i\right)^n\right\}_0,$$

$$_{(1)}a_i^n = \left({}_{(n)}a_i\right)^n,$$

$$\left\{a_i^n\right\}_{0|1} = \left[{}_{(n)}b_i\right]\left\langle x\left({}_{(n)}a_i\right)^n\right\rangle.$$

Так как

$$\left\{a_i^n\right\}_{0|1}\left(a_i^n\right) = {}_{(n)}b_i\left({}_{(n)}a_i\right)^n,$$

то

$$\left\{a_i^n\right\}_{0|1}\left(a_i^k\right) = {}_{(n)}b_i\left({}_{(n)}a_i\right)^k,$$

т.е

$$\left\{a_i^n\right\}_{0|1} = \left\{a_i\right\}_{0|n}.$$

Аналогично, $k$-я строка таблицы $\left\{a_i^n\right\}_{-1}$ совпадает с $nk$-й строкой таблицы $\left\{a_i\right\}_{-n} = \left\{{}_{(-n)}b_i \mid {}_{(-n)}a_i\right\}_0$, так что

$$\left\{a_i^n\right\}_{-1} = \left\{{}_{(-n)}b_i \mid \left({}_{(-n)}a_i\right)^n\right\}_0,$$

$$_{(-1)}a_i^n = \left({}_{(-n)}a_i\right)^n,$$

$$\left\{a_i^n\right\}_{0|-1} = \left[{}_{(-n)}b_i\right]\left\langle x\left({}_{(-n)}a_i\right)^{-n}\right\rangle = \left\{a_i\right\}_{0|-n}.$$

Переобозначим:

$$\left\{a_i\right\}_k = \left\{{}_{(0,\,k)}b_i \mid {}_{(k)}a_i\right\}_0.$$

Обозначим:

$$\left\{{}_{(k)}a_i\right\}_{-k} = \left\{{}_{(k,\,0)}b_i \mid a_i\right\}_0.$$

Тогда

$$\{a_i\}_{0|k} = \left[{}_{(0,\,k)}b_i\right]\left\langle x\left({}_{(k)}a_i\right)^k\right\rangle,$$

$$\{a_i\}_{0|k}^{-1} = \left\{{}_{(k)}a_i\right\}_{0|-k} = \left[{}_{(k,\,0)}b_i\right]\left\langle x a_i^{-k}\right\rangle.$$

**1.3**

Таким образом, ${}_{(k)}a_i$ является решением уравнения

$$\left\langle x\left({}_{(k)}a_i\right)^k\right\rangle(a_i) = {}_{(k)}a_i\,.$$

Обозначим: $a_i = 1 + x$. Тогда

$$\left\langle x\,{}_{(1)}a_i\right\rangle(1+x) = 1 + x\,{}_{(1)}a_i = {}_{(1)}a_i,$$

$${}_{(1)}a_i - x\,{}_{(1)}a_i - 1 = 0,$$

$${}_{(1)}(1+x) = (1-x)^{-1}.$$

Таким же образом находим ${}_{(2)}a_i$ и ${}_{(-1)}a_i$:

$$\left\langle x\left({}_{(2)}a_i\right)^2\right\rangle(1+x) = 1 + x\left({}_{(2)}a_i\right)^2 = {}_{(2)}a_i,$$

$$\left({}_{(2)}a_i\right)^{-2} - \left({}_{(2)}a_i\right)^{-1} + x = 0,$$

$${}_{(2)}(1+x) = \left(\frac{1+(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-1};$$

$$\left\langle x\left({}_{(-1)}a_i\right)^{-1}\right\rangle(1+x) = 1 + x\left({}_{(-1)}a_i\right)^{-1} = {}_{(-1)}a_i,$$

$$\left({}_{(-1)}a_i\right)^2 - {}_{(-1)}a_i - x = 0,$$

$$_{(-1)}(1+x)=\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\ .$$

Обозначим: $a_i=(1+2x)^{\frac{1}{2}}$. Тогда

$$\left\langle x_{(1)}a_i\right\rangle\left((1+2x)^{\frac{1}{2}}\right)=\left(1+2x_{(1)}a_i\right)^{\frac{1}{2}}={}_{(1)}a_i\,,$$

$$\left({}_{(1)}a_i\right)^2-2x_{(1)}a_i-1=0\,,$$

$$_{(1)}(1+2x)^{\frac{1}{2}}=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+x.$$

Обозначим: $a_i=(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$. Тогда

$$\left\langle x\left({}_{(-1)}a_i\right)^{-1}\right\rangle\left((1-2x)^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(1-2x\left({}_{(-1)}a_i\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}={}_{(-1)}a_i\,,$$

$$\left({}_{(-1)}a_i\right)^{-2}+2x\left({}_{(-1)}a_i\right)^{-1}-1=0,$$

$$\left({}_{(-1)}a_i\right)^{-1}=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}-x\,,$$

$$_{(-1)}(1-2x)^{-\frac{1}{2}}=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+x.$$

Применительно к $e^x$: так как

$$\left\langle x\left({}_{(k)}e^x\right)^k\right\rangle\left(e^x\right)={}_{(k)}e^x,$$

то

$$\log{}_{(k)}e^x=x\left({}_{(k)}e^x\right)^k.$$

Пусть

$$\langle\log a_i\rangle^{-1}=\langle b_i\rangle.$$

Так как

$$\left\langle {}_{(k)}a_i - 1\right\rangle\left\langle \log(1+x)\right\rangle = \left\langle x\left({}_{(k)}a_i\right)^k\right\rangle\left\langle a_i - 1\right\rangle\left\langle \log(1+x)\right\rangle,$$

$$\left\langle x\left({}_{(k)}a_i\right)^k\right\rangle^{-1} = \left\langle x a_i^{-k}\right\rangle,$$

то

$$\left\langle \log {}_{(k)}a_i\right\rangle^{-1} = \left\langle \log a_i\right\rangle^{-1}\left\langle x a_i^{-k}\right\rangle = \left\langle b_i e^{-kx}\right\rangle.$$

Например,

$$\left\langle \log(1+2x)^{\frac{1}{2}}\right\rangle = \left\langle 2x\right\rangle\left\langle \log(1+x)\right\rangle\left\langle \frac{x}{2}\right\rangle,$$

$$\left\langle \log(1+2x)^{\frac{1}{2}}\right\rangle^{-1} = \left\langle 2x\right\rangle\left\langle e^x - 1\right\rangle\left\langle \frac{x}{2}\right\rangle = \left\langle \frac{e^{2x}-1}{2}\right\rangle,$$

$$\left\langle \log {}_{(1)}(1+2x)^{\frac{1}{2}}\right\rangle^{-1} = \left\langle \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right\rangle = \left\langle \mathrm{sh}x\right\rangle.$$

**1.4**

Пусть $a_i$, ${}_{(1)}a_i$ – векторы, связанные первым поворотом таблицы $\left\{a_i\right\}_0$ и минус первым поворотом таблицы $\left\{{}_{(1)}a_i\right\}_0$:

$$\left\{a_i\right\}_1 = \left\{{}_{(0,\,1)}b_i \mid {}_{(1)}a_i\right\}_0,$$

$$\left\{{}_{(1)}a_i\right\}_{-1} = \left\{{}_{(1,\,0)}b_i \mid a_i\right\}_0.$$

$k$-ю строку таблицы $\left\{a_i\right\}_0$, $k \neq 0$, умножим на $\frac{1}{k}$, нулевую восходящую диагональ умножим на $0$. Полученную таблицу обозначим $\frac{1}{k}\left.\right|^0 \left\{a_i\right\}_0$; $k$-ю строку таблицы $\left\{{}_{(1)}a_i\right\}_0$, $k \neq 0$, умножим на $\frac{1}{k}$, нулевую нисходящую диагональ умножим на $0$. Полученную таблицу обозначим $\frac{1}{k}\left.\right|_0 \left\{{}_{(1)}a_i\right\}_0$. Сформулируем основное свойство изучаемой структуры в виде утверждения: $k$-я восходящая диагональ таблицы $\frac{1}{k}\left.\right|^0 \left\{a_i\right\}_0$ совпадает с $k$-й строкой таблицы $\frac{1}{k}|_0 \left\{ {}_{(1)}a_i \right\}_0$, $k$-я строка таблицы $\frac{1}{k}|^0 \left\{ a_i \right\}_0$ совпадает с $k$-й нисходящей диагональю таблицы $\frac{1}{k}|_0 \left\{ {}_{(1)}a_i \right\}_0$. Например:

$\frac{1}{k}|^0 \left\{ 1+x \right\}_0$:

$$\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & \frac{1}{3} & \frac{3}{3} & \frac{3}{3} & 0 & 0 & \cdot \\
2 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
k=0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdot \\
-2 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{4}{2} & -\frac{5}{2} & \cdot \\
-3 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{3} & -\frac{6}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{15}{3} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},$$

$\frac{1}{k}|_0 \left\{ {}_{(1)}(1+x) \right\}_0$:

$$\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & \frac{1}{3} & \frac{3}{3} & \frac{6}{3} & \frac{10}{3} & \frac{15}{3} & \cdot \\
2 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\
k=0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-2 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-3 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{3} & -\frac{3}{3} & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},$$

$\frac{1}{k}|^0 \left\{ {}_{(1)}(1+x) \right\}_0$:

$\frac{1}{k}|_0 \left\{ {}_{(2)}(1+x) \right\}_0$:

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & \frac{1}{3} & \frac{3}{3} & \frac{6}{3} & 0 & \frac{15}{3} & \cdot \\
2 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & 0 & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdot \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\
k=0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-2 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdot \\
-3 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{3} & -\frac{3}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},
\qquad
\begin{array}{r|rrrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & \frac{1}{3} & \frac{3}{3} & \frac{9}{3} & \frac{28}{3} & \frac{90}{3} & \cdot \\
2 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{5}{2} & \frac{14}{2} & \frac{42}{2} & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 2 & 5 & 14 & \cdot \\
k=0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 5 & \cdot \\
-2 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & 0 & \frac{2}{2} & \frac{5}{2} & \cdot \\
-3 & -\frac{1}{3} & \frac{3}{3} & 0 & 0 & \frac{3}{3} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}.
$$

Рассмотрим вектор

$$a_i^{-n}\frac{(xa_i)'}{a_i} = a_i^{-n}\left(1 + x\frac{(a_i)'}{a_i}\right) = a_i^{-n} - \frac{x}{n}\left(a_i^{-n}\right)'.$$

Если вектор имеет вид $a_i - \frac{x}{n}(a_i)'$, его $n$-й член равен нулю. Умножая каждую строку таблицы $\{a_i\}_0$ на $\frac{(xa_i)'}{a_i} = 1 + x\left(\log a_i\right)'$, получаем таблицу, нулевой нисходящей диагональю которой является $1$:

$$\left\{1 + x\left(\log a_i\right)' \mid a_i\right\}_{-1} = \left\{{}_{(-1)}a_i\right\}_0.$$

Аналогично,

$$\left\{a_i\right\}_1 = \left\{1 + x\left(\log {}_{(1)}a_i\right)' \mid {}_{(1)}a_i\right\}_0.$$

Так как

$$a_i^n\left(1 - x\frac{(a_i)'}{a_i}\right) = a_i^n - \frac{x}{n}\left(a_i^n\right)',$$

то

$$\{1-x(\log a_i)' \mid a_i\}_1 = \{{}_{(1)}a_i\}_0,$$

$$\{a_i\}_{-1} = \{1-x(\log {}_{(-1)}a_i)' \mid {}_{(-1)}a_i\}_0.$$

Например,

$$\left\{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}+x\right\}_0 =$$

$$=\left\{\frac{1+x}{1+2x}\ \middle|(1+2x)^{\frac{1}{2}}\right\}_1 = \left\{\frac{1-x}{1-2x}\ \middle|(1-2x)^{-\frac{1}{2}}\right\}_{-1}:$$

$$\begin{array}{r r|c c c c c c c}
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & 4 & 1 & 4 & 8 & 10 & 8 & \frac{7}{2} & \cdot \\
 & 3 & 1 & 3 & \frac{9}{2} & 4 & \frac{15}{8} & 0 & \cdot \\
 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \cdot \\
 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \cdot \\
k= & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \cdot \\
 & -2 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 & \frac{1}{4} & \cdot \\
 & -3 & 1 & -3 & \frac{9}{2} & -4 & \frac{15}{8} & 0 & \cdot \\
 & -4 & 1 & -4 & 8 & -10 & 8 & -\frac{7}{2} & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Таким образом,

$${}_{(0,\,1)}b_i = 1 + x(\log_{(1)} a_i)',$$

$${}_{(0,\,-1)}b_i = 1 - x(\log_{(-1)} a_i)'.$$

Так как

$$\left\{a_i^n\right\}_1 = \left\{{}_{(0,\ n)}b_i \mid \left({}_{(n)}a_i\right)^n\right\}_0,$$

$$\left\{a_i^n\right\}_{-1} = \left\{{}_{(0,\ -n)}b_i \mid \left({}_{(-n)}a_i\right)^n\right\}_0,$$

то

$${}_{(0,\ k)}b_i = 1 + xk\left(\log {}_{(k)}a_i\right)'.$$

$n$-й член $k$-й строки таблицы $\left\{a_i\right\}_s = \left\{{}_{(0,\ s)}b_i \mid {}_{(s)}a_i\right\}_0$ обозначим $\left({}_{(s)}b_i\right)_n^k$, $n$-й член $k$-й строки таблицы $\left\{{}_{(s)}a_i\right\}_0$ обозначим $\left({}_{(s)}a_i\right)_n^k$, $\left({}_{(0)}a_i\right)_n^k = a_n^k$. Так как

$${}_{(0,\ s)}b_i\left({}_{(s)}a_i\right)^k = \left({}_{(s)}a_i\right)^k + \frac{xs}{k}\left(\left({}_{(s)}a_i\right)^k\right)',$$

то

$$\left({}_{(s)}b_i\right)_n^k = \left({}_{(s)}a_i\right)_n^k + \frac{sn}{k}\left({}_{(s)}a_i\right)_n^k = \frac{k+sn}{k}\left({}_{(s)}a_i\right)_n^k.$$

Так как

$$\left({}_{(s)}b_i\right)_n^k = a_n^{k+sn},$$

то

$$\left({}_{(s)}a_i\right)_n^k = \frac{k}{k+sn}a_n^{k+sn}, \quad a_n^k = \frac{k}{k-sn}\left({}_{(s)}a_i\right)_n^{k-sn}.$$

При $s = 1$ получаем доказательство утверждения о таблицах $\frac{1}{k}|^0\ \left\{a_i\right\}_0$ и $\frac{1}{k}|_0\ \left\{{}_{(1)}a_i\right\}_0$.

**1.5**

По определению логарифма и экспоненты

$$\left\langle \log a_i \right\rangle\left(e^{\beta x}\right) = a_i^{\beta}.$$

Отсюда вытекает, что если

$$\left(1,\ x,\ \frac{\varphi_{(2,\ 1)}x + x^2}{2!},\ \frac{\varphi_{(3,\ 1)}x + \varphi_{(3,\ 2)}x^2 + x^3}{3!},\ \ldots\right)$$

– последовательность строк матрицы $\langle \log a_i \rangle \left| e^x \right|$, то

$$a_i^\beta = \left(1,\ \beta,\ \frac{\varphi_{(2,\ 1)}\beta + \beta^2}{2!},\ \frac{\varphi_{(3,\ 1)}\beta + \varphi_{(3,\ 2)}\beta^2 + \beta^3}{3!},\ \ldots\right).$$

Соответствие $x \to \mathrm{x}$ между строками матрицы $\langle \log a_i \rangle \left| e^x \right|$, $a_1 = 1$, и значениями вектора $a_i^{\mathrm{x}}$, обобщая биномиальный ряд, назовем биномиальной формой записи вектора $a_i$ и обозначим

$$\mid a_i \mid^{\mathrm{x}} = \left(1,\ \mathrm{x},\ \frac{\mathrm{x}\left(\mathrm{x} + \alpha_{(2,\ 1)}\right)}{2!},\ \frac{\mathrm{x}\left(\mathrm{x} + \alpha_{(3,\ 1)}\right)\left(\mathrm{x} + \alpha_{(3,\ 2)}\right)}{3!},\ \ldots\right),$$

$$\mid a_i \mid_n^{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\mathrm{x} + \alpha_{(n,\ i)}\right).$$

В формуле общего члена подразумевается, что $\mid a_i \mid_0^{\mathrm{x}} = 1$, $\mid a_i \mid_1^{\mathrm{x}} = \mathrm{x}$. Коэффициенты $\alpha_{(n,\ i)}$ могут быть комплексными числами, необходимыми для представления вектора $\alpha + \beta x + x^2$ в виде

$$\left(x + \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2}\right)\left(x + \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha}}{2}\right).$$

Используя биномиальную форму записи вектора $1 + x$, составим таблицу $\left\{(1 + x)^\beta\right\}_0$ (по определению $\beta > 0$ ). Первый член $k$-ой строки таблицы равен $k\beta$, $n$-й член $k$-ой строки равен $\dfrac{k\beta}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(k\beta - i)$:

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 3\beta & \dfrac{3\beta(3\beta-1)}{2!} & \dfrac{3\beta(3\beta-1)(3\beta-2)}{3!} & \cdot \\
2 & 1 & 2\beta & \dfrac{2\beta(2\beta-1)}{2!} & \dfrac{2\beta(2\beta-1)(2\beta-2)}{3!} & \cdot \\
1 & 1 & \beta & \dfrac{\beta(\beta-1)}{2!} & \dfrac{\beta(\beta-1)(\beta-2)}{3!} & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -\beta & \dfrac{-\beta(-\beta-1)}{2!} & \dfrac{-\beta(-\beta-1)(-\beta-2)}{3!} & \cdot \\
-2 & 1 & -2\beta & \dfrac{-2\beta(-2\beta-1)}{2!} & \dfrac{-2\beta(-2\beta-1)(-2\beta-2)}{3!} & \cdot \\
-3 & 1 & -3\beta & \dfrac{-3\beta(-3\beta-1)}{2!} & \dfrac{-3\beta(-3\beta-1)(-3\beta-2)}{3!} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Множество строк с положительными номерами назовем верхней половиной таблицы, множество строк с отрицательными номерами – нижней половиной таблицы. Пользуясь равенством $\left({}_{(s)}a_i\right)_n^k = \dfrac{k}{k+sn} a_n^{k+sn}$ и подстановкой $(k+sn)\beta = k\beta + ns\beta$, выводим, что $n$-й член $k$-ой строки верхней половины таблицы $\left\{{}_{(s)}(1+x)^\beta\right\}_0$, $s>0$, равен $\dfrac{k\beta}{n!}\prod\limits_{i=1}^{n-1}(k\beta + ns\beta - i)$:

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 3\beta & \dfrac{2\beta(3\beta+2s\beta-1)}{2!} & \dfrac{3\beta(3\beta+3s\beta-1)(3\beta+3s\beta-2)}{3!} & \cdot \\
2 & 1 & 2\beta & \dfrac{2\beta(2\beta+2s\beta-1)}{2!} & \dfrac{2\beta(2\beta+3s\beta-1)(2\beta+3s\beta-2)}{3!} & \cdot \\
k=1 & 1 & \beta & \dfrac{\beta(\beta+2s\beta-1)}{2!} & \dfrac{\beta(\beta+3s\beta-1)(\beta+3s\beta-2)}{3!} & \cdot
\end{array},
$$

$n$-й член $k$-ой строки нижней половины таблицы $\left\{ {}_{(-s)}(1+x)^{\beta} \right\}_0$ , $s>0$, равен $\dfrac{k\beta}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(k\beta - ns\beta - i)$:

$$\begin{array}{r|llll}
-1 & 1 & -\beta & \dfrac{-\beta(-\beta-2s\beta-1)}{2!} & \dfrac{-\beta(-\beta-3s\beta-1)(-\beta-3s\beta-2)}{3!} & . \\
-2 & 1 & -2\beta & \dfrac{-2\beta(-2\beta-2s\beta-1)}{2!} & \dfrac{-2\beta(-2\beta-3s\beta-1)(-2\beta-3s\beta-2)}{3!} & . \\
-3 & 1 & -3\beta & \dfrac{-3\beta(-3\beta-2s\beta-1)}{2!} & \dfrac{-3\beta(-3\beta-3s\beta-1)(-3\beta-3s\beta-2)}{3!} & . \\
. & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Обозначим: $a_i = {}_{(s)}(1+x)^{\beta}$, $A|e^x|$ – матрица, нулевая и первая строка которой соответственно $1$ и $x$, а $n$-я строка имеет вид $\dfrac{x}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(x+ns\beta-i)$. Тогда

$$A\langle e^{\beta x}\rangle = \langle a_i\rangle,$$

$$A\langle \beta x\rangle\langle e^x - 1\rangle\langle 1+x\rangle = \langle a_i\rangle,$$

$$A=\langle a_i\rangle\langle x-1\rangle\langle \log(1+x)\rangle\left\langle \frac{x}{\beta}\right\rangle,$$

$$A = \left\langle \frac{1}{\beta}\log a_i \right\rangle.$$

Обозначим: $b_i = {}_{(-s)}(1+x)^{\beta}$, $B|e^x|$ – матрица, нулевая и первая строка которой соответственно $1$ и $x$, а $n$-я строка имеет вид $\dfrac{x}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(x-ns\beta-i)$ . Тогда

$$B\langle e^{-\beta x}\rangle = \langle b_i^{-1}\rangle,$$

$$B\left\langle -\beta x\right\rangle\left\langle e^{x}-1\right\rangle\left\langle 1+x\right\rangle=\left\langle b_i^{-1}\right\rangle,$$

$$B=\left\langle b_i^{-1}\right\rangle\left\langle x-1\right\rangle\left\langle \log(1+x)\right\rangle\left\langle -\frac{x}{\beta}\right\rangle,$$

$$B=\left\langle \frac{1}{\beta}\log b_i\right\rangle.$$

Таким образом,

$$\left|\left({}_{(k)}(1+x)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right|_n^{\mathrm{x}}=\frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(\mathrm{x}+nk\beta-i)\ .$$

Например:

$$\left|(1-x)^{-1}\right|_n^{\mathrm{x}}=\left|{}_{(1)}(1+x)\right|_n^{\mathrm{x}}=\frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(\mathrm{x}+n-i)=\frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(\mathrm{x}+i);$$

$$\left|\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right|_n^{\mathrm{x}}=\left|{}_{(-1)}(1+x)\right|_n^{\mathrm{x}}=\frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(\mathrm{x}-n-i);$$

$$\left|\left(\frac{1+(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-1}\right|_n^{\mathrm{x}}=\left|{}_{(2)}(1+x)\right|_n^{\mathrm{x}}=\frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(\mathrm{x}+2n-i),$$

или

$$\left|{}_{(2)}(1+x)\right|_n^{\mathrm{x}}=\left|{}_{(1)}(1-x)^{-1}\right|_n^{\mathrm{x}}=\frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(\mathrm{x}+n+i);$$

$$\left|\left(\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{x}{2}\right)^{2}\right|_n^{\mathrm{x}}=\left|\left({}_{(1)}(1+x)^{\frac{1}{2}}\right)^{2}\right|_n^{\mathrm{x}}=\frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\mathrm{x}+\frac{n}{2}-i\right).$$

Обобщая, выводим: если

$$\left|a_i\right|_n^{\mathrm{x}}=\frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\mathrm{x}+\alpha_{(n,\ i)}\right)\ ,$$

то

$$\Big|\left({}_{(k)}a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\Big|_n^{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\mathrm{x} + nk\beta + \alpha_{(n,\ i)}\right).$$

В биномиальной форме записи вектора $e^x$ все коэффициенты $\alpha_{(n,\ i)}$ равны нулю, следовательно

$$\Big|\left({}_{(k)}e^{\beta x}\right)^{\frac{1}{\beta}}\Big|_n^{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{n!}\left(\mathrm{x} + nk\beta\right)^{n-1}.$$

Например,

$${}_{(1)}e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{n-1}}{n!}x^n, \qquad \Big|{}_{(1)}e^x\Big|_n^{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{n!}\left(\mathrm{x} + n\right)^{n-1}.$$

Равенство

$$\langle\beta x\rangle\langle\log a_i\rangle\left\langle\frac{x}{\beta}\right\rangle =$$

$$= \langle\beta x\rangle\langle a_i - 1\rangle\langle\log(1+x)\rangle\left\langle\frac{x}{\beta}\right\rangle =$$

$$= \left\langle\log(\langle\beta x\rangle(a_i))^{\frac{1}{\beta}}\right\rangle,$$

где $\langle\beta x\rangle(a_i) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\beta^n x^n$ , означает, что если

$$\Big|a_i\Big|_n^{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\mathrm{x} + \alpha_{(n,\ i)}\right),$$

то

$$\Big|(\langle\beta x\rangle(a_i))^{\frac{1}{\beta}}\Big|_n^{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\mathrm{x} + \beta\alpha_{(n,\ i)}\right).$$

Применительно к $e^x$, выводим:

$${}_{(k)}e^{\beta x} = \left(\langle k\beta x\rangle\left({}_{(1)}e^x\right)\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Так как

$$\left|(1+2x)^{\frac{1}{2}}\right|_n^{\mathrm{x}} = \left|(\langle 2x\rangle(1+x))^{\frac{1}{2}}\right|_n^{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(\mathrm{x}-2i),$$

то

$$\left|\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+x\right|_n^{\mathrm{x}} = \left|{}_{(1)}(1+2x)^{\frac{1}{2}}\right|_n^{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}(\mathrm{x}+n-2i),$$

$$\left|\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+x\right|_{2n}^{\mathrm{x}} = \frac{1}{(2n)!}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\mathrm{x}^2-(2i)^2\right),$$

$$\left|\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+x\right|_{2n+1}^{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{(2n+1)!}\prod_{i=0}^{n-1}\left(\mathrm{x}^2-(2i+1)^2\right).$$

## 2. Обобщенные полиномы Чебышева

### 2.1

Обозначим:

$$a_i = 1+\varphi x+\beta x^2,\ \varphi \ge 0\text{; при } \varphi = 0,\ \beta > 0.$$

Тогда

$${}_{(1)}a_i = 1+\varphi x_{(1)}a_i + \beta x^2\left({}_{(1)}a_i\right)^2,$$

$$\left({}_{(1)}a_i\right)^{-2} + (\varphi x-1)\left({}_{(1)}a_i\right)^{-1} + \beta x^2 = 0,$$

$$\left({}_{(1)}a_i\right)^{-1} = \frac{1-\varphi x+\left(1-2\,\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Обозначим:

$$a_i = \left(1-\varphi x+\beta x^2\right)^{-1},\ \varphi \ge 0\text{; при } \varphi = 0,\ \beta < 0.$$

Тогда

$${}_{(-1)}a_i = \left(1-\varphi x\left({}_{(-1)}a_i\right)^{-1} + \beta x^2\left({}_{(-1)}a_i\right)^{-2}\right)^{-1},$$

$$\left({}_{(-1)}a_i\right)^2 - (\varphi x+1)\,{}_{(-1)}a_i + \beta x^2 = 0,$$

$$
{}_{(-1)}a_i = \frac{1+\varphi x+\left(1+2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}.
$$

Пусть $a_i = 1+\varphi x + x^2,\ \varphi \ge 0$. Составим фрагменты таблиц $\left\{a_i\right\}_0$ и $\left\{{}_{(1)}a_i\right\}_0$, например, при $\varphi = 1$:

$$
\left\{a_i\right\}_0:
$$

$$
\begin{array}{r|cccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4 & 1 & 4 & 10 & 16 & 19 & 16 & 10 & 4 & 1 & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & 1 & 2 & -4 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 3 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-4 & 1 & -4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},
$$

$$
\left\{{}_{(1)}a_i\right\}_0:
$$

$$
\begin{array}{r|cccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 9 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2 & 1 & 2 & 5 & 12 & 30 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 2 & 4 & 9 & 21 & 51 & \cdot & \cdot & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 & -4 & -9 & -21 & -51 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & -2 & -5 & -12 & -30 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -3 & -9 & \cdot \\
-4 & 1 & -4 & 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}.
$$

Для верхней половины таблицы $\left\{a_i\right\}_0$ справедливо равенство

$a_n^k = a_{2k-n}^k$, $n \le 2k$. Учитывая, что $\left({}_{(1)}a_i\right)_n^k = \dfrac{k}{k+n} a_n^{k+n}$, выводим:

$$\left({}_{(1)}a_i\right)^{-n} = c_{(n,\ \varphi,\ 1)} - x^{2n}\left({}_{(1)}a_i\right)^n,$$

где $c_{(n,\ \varphi,\ 1)}$ – полином степени $\le n$ (т.е. вектор, все члены которого, начиная с номера $\le n+1$, равны нулю), $c_{(0,\ \varphi,\ 1)} = 2$.

Матрицу, которая получается из единичной матрицы размерности $n \times n$ перестановкой столбцов в обратном порядке, обозначим $\breve{I}_n$. Например

$$\breve{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\breve{I}_n\left(\sum_{m=0}^{n-1} a_m x^m\right) = \sum_{m=0}^{n-1} a_{n-1-m} x^m.$$

По определению преобразования $\left\{{}_{(1)}a_i\right\}_{0|-1}$ $n$-я строка матрицы

$$\left\{{}_{(1)}a_i\right\}_{0|-1} = \left[1 - x\left(\log a_i\right)'\right]\left\langle x a_i^{-1}\right\rangle$$

совпадает с $n$-й строкой матрицы $\left[\left({}_{(1)}a_i\right)^{-n}\right]$. Таким образом, полином $\breve{I}_{n+1}\left(c_{(n,\ \varphi,\ 1)}\right)$, $n > 0$, совпадает с $n$-й строкой матрицы

$$\left\{{}_{(1)}a_i\right\}_{0|-1} = \left[\frac{1-x^2}{1+\varphi x + x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x + x^2}\right\rangle.$$

Например,

$$\left[\frac{1-x^2}{1+x+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+x+x^2}\right\rangle=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdot\\-1&1&0&0&0&\cdot\\-1&-2&1&0&0&\cdot\\2&0&-3&1&0&\cdot\\-1&4&2&-4&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Так как

$$\left[\frac{1-x^2}{1+\varphi x+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x+x^2}\right\rangle=\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+x^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1+\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x}\right\rangle,$$

$$\left[\frac{1}{1+\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x}\right\rangle=\langle x-\varphi\rangle^{*},$$

то

$$c_{(n,\ \varphi,\ 1)}=\acute{I}_{n+1}\langle x-\varphi\rangle\acute{I}_{n+1}\left(c_{(n,\ 0,\ 1)}\right),$$

где $\acute{I}_{n+1}\left(c_{(n,\ 0,\ 1)}\right)$, $n>0$, – $n$-я строка матрицы

$$\left[\frac{1-x^2}{1+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+x^2}\right\rangle=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\-2&0&1&0&0&0&0&\cdot\\0&-3&0&1&0&0&0&\cdot\\2&0&-4&0&1&0&0&\cdot\\0&5&0&-5&0&1&0&\cdot\\-2&0&9&0&-6&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Из таблицы $\{a_i\}_1=\{1+x\left(\log_{(1)}a_i\right)'\,|_{(1)}a_i\}_0$, например,

$$\{1+x+x^2\}_1:$$

$$
\begin{array}{r|cccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2 & 1 & 3 & 10 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & 2 & 6 & 16 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
k=0 & 1 & 1 & 3 & 7 & 19 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & 1 & 0 & 1 & 2 & 6 & 16 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 10 & \cdot & \cdot & \cdot \\
-3 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & \cdot & \cdot \\
-4 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\
-5 & 1 & -4 & 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array},
$$

где

$$1+x\left(\log_{(1)} a_i\right)' = \left(1-2\varphi x+\left(\varphi^2-4\right)x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = b_i,$$

видно, что

$$b_i\left({}_{(1)}a_i\right)^{-n} = s_{(n,\ \varphi,\ 1)} + x^{2n} b_i\left({}_{(1)}a_i\right)^{n},$$

или

$$\left({}_{(1)}a_i\right)^{-n} = s_{(n,\ \varphi,\ 1)}\left(1-2\varphi x+\left(\varphi^2-4\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}} + x^{2n}\left({}_{(1)}a_i\right)^{n},$$

где $s_{(n,\ \varphi,\ 1)}$ – полином степени $< n$; $I_n\left(s_{(n,\ \varphi,\ 1)}\right)$ совпадает с $n$-й строкой матрицы

$$\left[\frac{x}{1+\varphi x+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x+x^2}\right\rangle = \left[\frac{x}{1+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+x^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1+\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x}\right\rangle,$$

например,

$$\left[\frac{x}{1+x+x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+x+x^2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & \cdot \\ -1 & 2 & 3 & -4 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

так что

$$s_{(n,\ \varphi,\ 1)} = \not{I}_n \langle x-\varphi \rangle \not{I}_n \left( s_{(n,\ 0,\ 1)} \right),$$

где $\not{I}_n \left( s_{(n,\ 0,\ 1)} \right)$ – $n$-я строка матрицы

$$\left[ \frac{x}{1+x^2} \right] \left\langle \frac{x}{1+x^2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 0 & 1 & \cdot \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\left( \frac{1-\varphi x + \left(1 - 2\varphi x + \left(\varphi^2 - 4\right) x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^n =$$

$$= \frac{c_{(n,\ \varphi,\ 1)} + s_{(n,\ \varphi,\ 1)} \left(1 - 2\varphi x + \left(\varphi^2 - 4\right) x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

$$x^{2n} \left( \frac{1-\varphi x + \left(1 - 2\varphi x + \left(\varphi^2 - 4\right) x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{-n} =$$

$$= \frac{c_{(n,\ \varphi,\ 1)} - s_{(n,\ \varphi,\ 1)} \left(1 - 2\varphi x + \left(\varphi^2 - 4\right) x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2};$$

Пусть $a_i = 1 + \varphi x - x^2$, $\varphi > 0$. Составим фрагменты таблиц $\left\{ a_i \right\}_0$ и $\left\{ {}_{(1)}a_i \right\}_0$, например, при $\varphi = 1$:

$$\left\{ a_i \right\}_0:$$

$$
\begin{array}{r|cccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4 & 1 & 4 & 2 & -8 & -5 & 8 & 2 & -4 & 1 & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 0 & -5 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & 2 & -3 & 5 & -8 & 13 & -21 & \cdot & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & 5 & -10 & 20 & -38 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 9 & -22 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-4 & 1 & -4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

$$\left\{{}_{(1)}a_i\right\}_0:$$

$$
\begin{array}{r|cccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2 & 1 & 2 & 1 & -4 & -10 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 0 & -2 & -3 & 1 & 11 & \cdot & \cdot & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2 & -3 & 1 & 11 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & 3 & 0 & -1 & -2 & -1 & 4 & 10 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 6 & -4 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 & \cdot \\
-4 & 1 & -4 & 10 & -12 & 7 & 0 & 0 & 0 & -1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Очевидно, что если $a_i$ – полином степени $n$, то

$$\left(\not{I}_{n+1}(a_i)\right)^m = \not{I}_{nm+1}\left(a_i^m\right).$$

Поэтому, если

$$\not{I}_{n+1}(a_i) = -\langle -x\rangle(a_i),$$

как в случае с полиномом $1+\varphi x - x^2$, то

$$\not{I}_{nm+1}\left(a_i^m\right) = (-1)^m\langle -x\rangle\left(a_i^m\right).$$

Таким образом, для верхней половины таблицы $\{a_i\}_0$ справедливо равенство

$$a_n^k = (-1)^{k+n} a_{2k-n}^k, \quad n \le 2k.$$

Следовательно,

$$\left({}_{(1)}a_i\right)^{-n} = c_{(n,\ \varphi,-1)} + (-1)^{n+1} x^{2n} \left({}_{(1)}a_i\right)^n,$$

где $c_{(0,\ \varphi,-1)} = 2$, $\acute{I}_{n+1}\left(c_{(n,\ \varphi,-1)}\right)$, $n > 0$, совпадает с $n$-й строкой матрицы

$$\left[\frac{1+x^2}{1+\varphi x - x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x - x^2}\right\rangle = \left[\frac{1+x^2}{1-x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1-x^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1+\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x}\right\rangle,$$

$$c_{(n,\ \varphi,-1)} = \acute{I}_{n+1}\langle x-\varphi\rangle \acute{I}_{n+1}\left(c_{(n,\ 0,-1)}\right),$$

где $\acute{I}_{n+1}\left(c_{(n,\ 0,-1)}\right)$, $n > 0$, – $n$-я строка матрицы

$$\left[\frac{1+x^2}{1-x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1-x^2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Из таблицы $\{a_i\}_1 = \{1 + x\left(\log{}_{(1)}a_i\right)' \mid {}_{(1)}a_i\}_0$, например,

$$\{1 + x - x^2\}_1:$$

$$
\begin{array}{r|cccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
3 & 1 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
2 & 1 & 3 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
1 & 1 & 2 & 0 & -8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
k=0 & 1 & 1 & -1 & -5 & -5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-1 & 1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 8 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
-2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot \\
-3 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & \cdot & \cdot \\
-4 & 1 & -3 & 5 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\
-5 & 1 & -4 & 9 & -10 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

где

$$1+x\left(\log{}_{(1)}a_i\right)'=\left(1-2\varphi x+\left(\varphi^2+4\right)x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=b_i,$$

видно, что

$$b_i\left({}_{(1)}a_i\right)^{-n}=s_{(n,\ \varphi,-1)}+(-1)^n x^{2n}b_i\left({}_{(1)}a_i\right)^n\ ,$$

или

$$\left({}_{(1)}a_i\right)^{-n}=s_{(n,\ \varphi,-1)}\left(1-2x+\left(\varphi^2+4\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}+(-1)^n x^{2n}\left({}_{(1)}a_i\right)^n,$$

где $\not{I}_n\left(s_{(n,\ \varphi,-1)}\right)$ совпадает с $n$-й строкой матрицы

$$\left[\frac{x}{1+\varphi x-x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x-x^2}\right\rangle=\left[\frac{x}{1-x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1-x^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1+\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x}\right\rangle,$$

$$s_{(n,\ \varphi,-1)}=\not{I}_n\langle x-\varphi\rangle\not{I}_n\left(s_{(n,\ 0,-1)}\right),$$

где $\not{I}_n\left(s_{(n,\ 0,-1)}\right)$ – $n$-я строка матрицы

$$\left[\frac{x}{1-x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1-x^2}\right\rangle=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&\cdot\\1&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&0&\cdot\\1&0&1&0&0&\cdot\\0&2&0&1&0&\cdot\\1&0&3&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{1-\varphi x+\left(1-2\varphi x+\left(\varphi^2+4\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^n=$$

$$=\frac{c_{(n,\ \varphi,-1)}+s_{(n,\ \varphi,-1)}\left(1-2\varphi x+\left(\varphi^2+4\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

$$(-1)^n x^{2n}\left(\frac{1-\varphi x+\left(1-2\varphi x+\left(\varphi^2+4\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-n}=$$

$$=\frac{c_{(n,\ \varphi,-1)}-s_{(n,\ \varphi,-1)}\left(1-2\varphi x+\left(\varphi^2+4\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Перейдем к общему случаю. Пусть $\varphi>0,\ \beta>0$. Тогда

$$1+\varphi x\pm\beta x^2=\left\langle\sqrt{\beta}x\right\rangle\left(1+\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}}x\pm x^2\right),$$

$${}_{(1)}\!\left(1+\varphi x\pm\beta x^2\right)=\left\langle\sqrt{\beta}x\right\rangle\left({}_{(1)}\!\left(1+\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}}x\pm x^2\right)\right),$$

$$\left(1-\varphi x\pm\beta x^2\right)^{-1}=\langle -x\rangle\left(\left(1+\varphi x\pm\beta x^2\right)^{-1}\right),$$

$$_{(-1)}\left(1-\varphi x \pm \beta x^2\right)^{-1} = \langle -x\rangle \left(\left(_{(1)}\left(1+\varphi x \pm \beta x^2\right)\right)^{-1}\right).$$

Пусть теперь $\varphi$, $\beta$ – любые действительные числа. $n$-ю строку матрицы

$$\left[\frac{1-\beta x^2}{1+\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x+\beta x^2}\right\rangle =$$

$$=\left[\frac{1-\beta x^2}{1+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1+\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x}\right\rangle,$$

$n>0$, обозначим $I_{n+1}\left(c_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\right)$; $n$-ю строку матрицы

$$\left[\frac{x}{1+\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x+\beta x^2}\right\rangle =$$

$$=\left[\frac{x}{1+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1+\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x}\right\rangle$$

обозначим $I_n\left(s_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\right)$. Тогда

$$c_{(n,\ \varphi,\ \beta)} = I_{n+1}\langle x-\varphi\rangle I_{n+1}\left(c_{(n,\ 0,\ \beta)}\right),$$

$$s_{(n,\ \varphi,\ \beta)} = I_n\langle x-\varphi\rangle I_n\left(s_{(n,\ 0,\ \beta)}\right),$$

где $c_{(0,\ 0,\ \beta)}=2$, $I_{n+1}\left(c_{(n,\ 0,\ \beta)}\right)$ – $n$-я строка матрицы

$$\left[\frac{1-\beta x^2}{1+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x^2}\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -2\beta & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -3\beta & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 2\beta^2 & 0 & -4\beta & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$I_n\left(s_{(n,\ 0,\ \beta)}\right)$ – $n$-я строка матрицы

$$\left[\frac{x}{1+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x^2}\right\rangle=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -\beta & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -2\beta & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \beta^2 & 0 & -3\beta & 0 & 1 & \cdot \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

$$\left(\frac{1-\varphi x+\left(1-2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^n=$$

$$=\frac{c_{(n,\ \varphi,\ \beta)}+s_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\left(1-2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

$$\beta^n x^{2n}\left(\frac{1-\varphi x+\left(1-2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-n}=$$

$$=\frac{c_{(n,\ \varphi,\ \beta)}-s_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\left(1-2\varphi x+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Отметим, что

$$c_{(0,\ \varphi,\ \beta)}=2, \quad s_{(0,\ \varphi,\ \beta)}=0,$$

$$c_{(n,\ \varphi,0)}=\left(1-\varphi x\right)^n, \quad s_{(n,\ \varphi,\ 0)}=\left(1-\varphi x\right)^{n-1},$$

$$c_{(n,\ 0,\ 0)}=1, \quad s_{(n,\ 0,\ 0)}=1.$$

Отметим также равенство, которое проверяется с помощью подстановки,

$$s_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\left(1-2\varphi+\left(\varphi^2-4\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(c^2_{(n,\ \varphi,\ \beta)}-4\beta^n x^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

**2.2**

Полиномы Чебышева определяются следующим образом:

$$T_n(x) = 2^{n-1}\prod_{m=1}^{n}\left(x+\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$C_n(x) = 2T_n\left(\frac{x}{2}\right) = \prod_{m=1}^{n}\left(x+2\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$U_n(x) = 2^{n}\prod_{m=1}^{n}\left(x+\cos\frac{m}{n+1}\pi\right),$$

$$S_n(x) = U_n\left(\frac{x}{2}\right) = \prod_{m=1}^{n}\left(x+2\cos\frac{m}{n+1}\pi\right);$$

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right),$$

$$C_n(x) = \left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^n + \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^n,$$

$$U_n(x)\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}\right),$$

$$S_n(x)\sqrt{x^2-4} = \left(\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}\right)^{n+1}.$$

Рассмотрим метод, позволяющий выражать корни некоторых полиномов, к которым относятся и полиномы Чебышева, через корни полиномов деления круга.

Обозначим:

$$x^n - 1 = \prod_{m=0}^{n-1}\left(x - e^{(n,\ m)}\right),$$

$$e^{(n,\ m)} = \cos\frac{2\pi m}{n} + i\sin\frac{2\pi m}{n},\ i = \sqrt{-1}.$$

Тогда:

$$x^n + 1 = \frac{x^{2n} - 1}{x^n - 1} = \prod_{m=1}^{n} \left( x - e^{(2n,\ 2m-1)} \right),$$

$$\left( x + 1 \right)^n - 1 = \left\langle x + 1 \right\rangle \left( x^n - 1 \right) = x \prod_{m=1}^{n-1} \left( x + 1 - e^{(n,\ m)} \right),$$

$$\left( x + 1 \right)^n + 1 = \left\langle x + 1 \right\rangle \left( x^n + 1 \right) = \prod_{m=1}^{n} \left( x + 1 - e^{(2n,\ 2m-1)} \right).$$

Запомним правила преобразования корней полиномов при следующих элементарных преобразованиях. Если

$$a_i = \sum_{m=0}^{n} a_m x^m = \prod_{m=1}^{n} \left( x + \varphi_m \right), \quad \varphi_m \neq 0,$$

то:

$$\breve{I}_{n+1}(a_i) = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} x^m = \prod_{m=1}^{n} \varphi_m \left( x + \frac{1}{\varphi_m} \right),$$

$$\left\langle \beta x \right\rangle (a_i) = \sum_{m=0}^{n} a_m \beta^m x^m = \beta^n \prod_{m=1}^{n} \left( x + \frac{\varphi_m}{\beta} \right),$$

$$\breve{I}_{n+1} \left\langle \beta x \right\rangle \breve{I}_{n+1}(a_i) = \sum_{m=0}^{n} \beta^{n-m} a_m x^m = \prod_{m=1}^{n} \left( x + \beta \varphi_m \right),$$

$$\left\langle x^2 \right\rangle (a_i) = \sum_{m=0}^{n} a_m x^{2m} = \prod_{m=1}^{n} \left( x + \sqrt{-\varphi_m} \right) \left( x - \sqrt{-\varphi_m} \right).$$

Следовательно,

$$\left( x + 1 \right)^n - x^n = \breve{I}_{n+1} \left( \left( x + 1 \right)^n - 1 \right) = n \prod_{m=1}^{n-1} \left( x + \frac{1}{1 - e^{(n,\ m)}} \right),$$

$$\left( x + 1 \right)^n + x^n = \breve{I}_{n+1} \left( \left( x + 1 \right)^n + 1 \right) = 2 \prod_{m=1}^{n} \left( x + \frac{1}{1 - e^{(2n,\ 2m-1)}} \right),$$

где

$$n=\prod_{m=1}^{n-1}\left(1-e^{(n,\ m)}\right),\qquad 2=\prod_{m=1}^{n}\left(1-e^{(2n,\ 2m-1)}\right).$$

Так как

$$\left\langle x-\frac{1}{2}\right\rangle\left((x+1)^n-x^n\right)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^n-\left(x-\frac{1}{2}\right)^n,$$

то

$$\frac{1}{2}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^n-\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{n}{2}\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+\frac{1+e^{(n,\ m)}}{2\left(1-e^{(n,\ m)}\right)}\right),$$

$$\frac{(x+1)^n-(x-1)^n}{2}=n\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+\frac{1+e^{(n,\ m)}}{1-e^{(n,\ m)}}\right)=$$

$$=n\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+i\operatorname{ctg}\frac{m}{n}\pi\right).$$

Аналогично

$$\frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{2}=\prod_{m=1}^{n}\left(x+\frac{1+e^{(2n,\ 2m-1)}}{1-e^{(2n,\ 2m-1)}}\right)=$$

$$=\prod_{m=1}^{n}\left(x+i\operatorname{ctg}\frac{2m-1}{2n}\pi\right).$$

Найдем корни полиномов

$$c_{(n,\ 0,-1)}\ \text{и}\ c_{(n,\ 0,\ 1)}=\left\langle x^2\right\rangle\left\langle -x\right\rangle\left\langle x^2\right\rangle^*\left(c_{(n,\ 0,-1)}\right),$$

где

$$\left\langle x^2\right\rangle^*(a_i)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdot\\0&0&1&0&0&\cdot\\0&0&0&0&1&\cdot\\0&0&0&0&0&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}(a_i)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}x^n.$$

Обозначим:

$$\left\langle x^2\right\rangle^*\left(c_{(n,\ 0,-1)}\right)=c^*_{(n,\ 0,-1)}.$$

Так как

$$\left(\frac{1+\left(1+4x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^n = c_{(n,\ 0,-1)} + (-1)^{n+1} x^{2n} \left(\frac{1+\left(1+4x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-n},$$

то

$$\left(\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^n = c^*_{(n,\ 0,-1)} + (-1)^{n+1} x^{n} \left(\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-n}.$$

Из таблицы

$$\left\{\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right\}_0 = \left\{\frac{1+2x}{1+x}\ \middle|\, 1+x\right\}_{-1}:$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
4 & 1 & 4 & 2 & 0 & -1 & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 0 & 1 & -3 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & -1 & 2 & -5 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & -1 & 2 & -5 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & 2 & -5 & 14 & \cdot \\
-2 & 1 & -2 & 5 & -14 & 42 & \cdot \\
-3 & 1 & -3 & 9 & -28 & 90 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

видно, что $\acute{I}_{n+1}\left(c^*_{(n+1,\ 0,-1)}\right)$ совпадает с $n$-й строкой матрицы

$$[1+2x]\langle x(1+x)\rangle = \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & 3 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & 2 & 4 & 1 & 0 & \cdot \\
0 & 0 & 5 & 5 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}.$$

Так как

$$\langle x(1+x)\rangle\left(\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)=1+x,$$

$$\langle x(1+x)\rangle\left(x\left(\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-1}\right)=x,$$

то

$$\langle x(1+x)\rangle\left(c^{*}_{(n,\ 0,-1)}\right)=(x+1)^{n}+(-1)^{n}x^{n}=$$

$$=\langle -x\rangle I'_{n+1}\left((x-1)^{n}+1\right)=$$

$$=p_{n}\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\frac{1}{1+e^{(2n,\ 2m-1)}}\right)\left(x+\frac{1}{1+e^{(2n,\ 2n-2m+1)}}\right),$$

где $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ – целая часть от $\dfrac{n}{2}$, $p_{2n}=2$, $p_{2n+1}=2n+1$. Степень полинома $2\left[\dfrac{n}{2}\right]$ обусловлена тем, что $e^{(2n,\ 2m-1)}=-1$, если $n$ нечетно и $m=\left[\dfrac{n}{2}\right]+1$. Обозначим:

$$c^{*}_{(n,\ 0,-1)}=p_{n}\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\beta_{(n,\ m)}\right).$$

Тогда

$$\langle x(1+x)\rangle\left(c^{*}_{(n,\ 0,-1)}\right)=p_{n}\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x^{2}+x+\beta_{(n,\ m)}\right)=$$

$$=p_{n}\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\frac{1+\sqrt{1-4\beta_{(n,\ m)}}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{1-4\beta_{(n,\ m)}}}{2}\right),$$

$$\frac{1+\sqrt{1-4\beta_{(n,\ m)}}}{2}=\frac{1}{1+e^{(2n,\ 2m-1)}},$$

$$\beta_{(n,\ m)}=\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1-e^{(2n,\ 2m-1)}}{1+e^{(2n,\ 2m-1)}}\right)^{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\operatorname{tg}^{2}\frac{2m-1}{2n}\pi\right)=\frac{1}{4}\sec^{2}\frac{2m-1}{2n}\pi\,.$$

Таким образом,

$$c_{(n,\ 0,-1)}=p_{n}\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\frac{i}{2}\sec\frac{2m-1}{2n}\pi\right)\left(x-\frac{i}{2}\sec\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$\breve{I}_{n+1}\left(c_{(n,\ 0,-1)}\right)=\prod_{m=1}^{n}\left(x+2i\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$c_{(n,\ 0,\ 1)}=(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}p_{n}\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\frac{1}{2}\sec\frac{2m-1}{2n}\pi\right)\left(x-\frac{1}{2}\sec\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$\breve{I}_{n+1}\left(c_{(n,\ 0,\ 1)}\right)=\prod_{m=1}^{n}\left(x+2\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right).$$

Найдем корни полиномов

$$s_{(n,\ 0,-1)}\quad \text{и}\quad s_{(n,\ 0,\ 1)}=\left\langle x^{2}\right\rangle\left\langle -x\right\rangle\left\langle x^{2}\right\rangle^{*}\left(s_{(n,\ 0,-1)}\right).$$

Обозначим:

$$\left\langle x^{2}\right\rangle^{*}\left(s_{(n,\ 0,-1)}\right)=s^{*}_{(n,\ 0,-1)}.$$

Из таблицы

$$\left\{(1-x)^{-1}\right\}_{-2}=$$

$$=\left\{(1+x)^{-1}\mid 1+x\right\}_{-1}=$$

$$=\left\{(1+4x)^{-\frac{1}{2}}\ \left|\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right.\right\}_{0}:$$

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
5 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\
3 & 1 & 1 & 0 & -1 & 5 & \cdot \\
2 & 1 & 0 & 1 & -4 & 15 & \cdot \\
1 & 1 & -1 & 3 & -10 & 35 & \cdot \\
k=0 & 1 & -2 & 6 & -20 & 70 & \cdot \\
-1 & 1 & -3 & 10 & -35 & \cdot & \cdot \\
-2 & 1 & -4 & 15 & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

видно, что

$$(1+4x)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{n}=$$

$$=s^{*}_{(n,\ 0,-1)}+(-1)^{n}x^{n}(1+4x)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-n},$$

где $\acute{I}_{n+1}\left(s^{*}_{(n+1,\ 0,-1)}\right)$ совпадает с $n$-й строкой матрицы

$$\langle x(1+x)\rangle=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&0&\cdot\\0&1&1&0&0&\cdot\\0&0&2&1&0&\cdot\\0&0&1&3&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Так как

$$\langle x(1+x)\rangle\left((1+4x)^{-\frac{1}{2}}\right)=(1+2x)^{-1},$$

то

$$[1+2x]\langle x(1+x)\rangle\left(s^{*}_{(n,\ 0,-1)}\right)=(x+1)^{n}+(-1)^{n+1}x^{n}=$$

$$=\langle -x\rangle\acute{I}_{n+1}\left((x-1)^{n}-1\right)=$$

$$= 2\left(x+\frac{1}{2}\right) r_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(x+\frac{1}{1+e^{(n,\ m)}}\right)\left(x+\frac{1}{1+e^{(n,\ n-m)}}\right),$$

где

$$2\left(x+\frac{1}{2}\right) = \langle -x\rangle \breve{I}_2\left(x-\left(1+e^{(n,\ 0)}\right)\right),\quad r_{2n}=n,\ r_{2n+1}=1.$$

Степень $2\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$ обусловлена тем, что $e^{(n,\ m)}=-1$, если $n$ четно и $m=\left[\dfrac{n-1}{2}\right]+1$. Обозначим:

$$s^{*}_{(n,\ 0,-1)} = r_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(x+\beta_{(n,\ m)}\right).$$

Тогда

$$\frac{1+\sqrt{1-4\beta_{(n,\ m)}}}{2} = \frac{1}{1+e^{(n,\ m)}},$$

$$\beta_{(n,\ m)} = \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1-e^{(n,\ m)}}{1+e^{(n,\ m)}}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\sec^2\frac{m}{n}\pi .$$

Таким образом,

$$s_{(n,\ 0,-1)} = r_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(x+\frac{i}{2}\sec\frac{m}{n}\pi\right)\left(x-\frac{i}{2}\sec\frac{m}{n}\pi\right),$$

$$\breve{I}_n\left(s_{(n,\ 0,-1)}\right) = \prod_{m=1}^{n-1}\left(x+2i\cos\frac{m}{n}\pi\right),$$

$$s_{(n,\ 0,\ 1)} = (-1)^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} r_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(x+\frac{1}{2}\sec\frac{m}{n}\pi\right)\left(x-\frac{1}{2}\sec\frac{m}{n}\pi\right),$$

$$\breve{I}_n\left(s_{(n,\ 0,\ 1)}\right) = \prod_{m=1}^{n-1}\left(x+2\cos\frac{m}{n}\pi\right).$$

В общем случае:

$$\Im_{n+1}\left(c_{(n,\ 0,\ \beta)}\right)=\prod_{m=1}^{n}\left(x+2\sqrt{\beta}\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$\Im_{n+1}\left(c_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\right)=\prod_{m=1}^{n}\left(x-\varphi+2\sqrt{\beta}\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$c_{(n,\ \varphi,\ \beta)}=p_n\prod_{m=1}^{n}\left(x+\frac{1}{-\varphi+2\sqrt{\beta}\cos\frac{2m-1}{2n}\pi}\right),$$

где

$$p_n=\prod_{m=1}^{n}\left(-\varphi+2\sqrt{\beta}\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right).$$

Если один из сомножителей множителя $\prod_{m=1}^{n}\left(-\varphi+2\sqrt{\beta}\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right)$ равен нулю , он вместе с соответствующим ему полиномом заменяется на $1$.

Аналогично,

$$\Im_{n}\left(s_{(n,\ 0,\ \beta)}\right)=\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+2\sqrt{\beta}\cos\frac{m}{n}\pi\right),$$

$$\Im_{n}\left(s_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\right)=\prod_{m=1}^{n-1}\left(x-\varphi+2\sqrt{\beta}\cos\frac{m}{n}\pi\right),$$

$$s_{(n,\ \varphi,\ \beta)}=r_n\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+\frac{1}{-\varphi+2\sqrt{\beta}\cos\frac{m}{n}\pi}\right),$$

где

$$r_n=\prod_{m=1}^{n-1}\left(-\varphi+2\sqrt{\beta}\cos\frac{m}{n}\pi\right).$$

**2.3**

Обозначим:

$$a_i = {}_{(1)}\left(1+2\varphi x+\beta x^2\right)^{\frac{1}{2}},\ \varphi \ge 0;\ \text{при}\ \varphi = 0,\ \beta > 0.$$

Тогда

$$a_i = \left(1+2\varphi x a_i+\beta x^2 a_i^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$a_i^2 - \frac{2\varphi x a_i}{1-\beta x^2} - \frac{1}{1-\beta x^2} = 0,$$

$$a_i = \frac{\left(1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\varphi x}{1-\beta x^2}.$$

Обозначим:

$$a_i = {}_{(-1)}\left(1-2\varphi x+\beta x^2\right)^{-\frac{1}{2}},\ \varphi \ge 0;\ \text{при}\ \varphi = 0,\ \beta < 0.$$

Тогда

$$a_i = \left(1-2\varphi x a_i^{-1}+\beta x^2 a_i^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$a_i^2 - 2\varphi x a_i + \beta x^2 - 1 = 0,$$

$$a_i = \left(1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\varphi x.$$

Раскладывая $a_i^n$ в бином Ньютона и группируя члены, можно представить его в виде

$$a_i^n = t_{(n,\ \varphi,\ \beta)} + u_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\left(1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $t_{(n,\ \varphi,\ \beta)}$ – полином степени $\le n$, четные члены которого равны нулю, если $n$ нечетно, нечетные члены равны нулю, если $n$ четно; $u_{(n,\ \varphi,\ \beta)}$ – полином степени $< n$, четные члены которого равны нулю, если $n$ четно, нечетные члены равны нулю, если $n$ нечетно. Например:

$$t_{(n,\ 1,\ 1)} = \frac{(x+1)^n+(x-1)^n}{2},\quad u_{(n,\ 1,\ 1)} = \frac{(x+1)^n-(x-1)^n}{2};$$

$$t_{(2n,\ 0,\ -1)} = \left(1 + x^2\right)^n, \quad u_{(2n,\ 0,\ -1)} = 0,$$

$$t_{(2n+1,\ 0,\ -1)} = 0, \quad u_{(2n+1,\ 0,\ -1)} = \left(1 + x^2\right)^n,$$

$$t_{(2n,\ 0,\ 0)} = 1, \quad u_{(2n,\ 0,\ 0)} = 0,$$

$$t_{(2n+1,\ 0,\ 0)} = 0, \quad u_{(2n+1,\ 0,\ 0)} = 1.$$

Так как

$$a_i^{-1} = \frac{\left(1 + \left(\varphi^2 - \beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}} - \varphi x}{1 - \beta x^2},$$

то

$$\left(\beta x^2 - 1\right)^n a_i^{-n} = t_{(n,\ \varphi,\ \beta)} - u_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\left(1 + \left(\varphi^2 - \beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$a_i^n = 2t_{(n,\ \varphi,\ \beta)} - \left(\beta x^2 - 1\right)^n a_i^{-n},$$

$$a_i^{2n} - 2t_{(n,\ \varphi,\ \beta)} a_i^n + \left(\beta x^2 - 1\right)^n = 0,$$

$$a_i^n = t_{(n,\ \varphi,\ \beta)} + \left(t_{(n,\ \varphi,\ \beta)}^2 - \left(\beta x^2 - 1\right)^n\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$n$-й член $2m$-й восходящей диагонали таблицы $\{a_i\}_0$, т.е. $n$-й член вектора

$$\left(1 + x\left(\log_{(1)} a_i\right)'\right)\left({}_{(1)}a_i\right)^{2m} = \frac{1 - \varphi x}{1 - 2\varphi x + \beta x^2}\left(1 - 2\varphi x + \beta x^2\right)^{-m}$$

равен $n$-му члену полинома $t_{(2m+n,\ \varphi,\ \beta)}$. Отсюда вытекает, что $\left\langle x^2 \right\rangle^* \breve{I}_{n+1}\left(t_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\right)$ совпадает с $n$-й строкой матрицы

$$\left[\frac{1 - \varphi x}{1 - 2\varphi x + \beta x^2}\right]\left\langle \frac{x^2}{1 - 2\varphi x + \beta x^2} \right\rangle.$$

Например:

$$\left\{\frac{x}{2}+\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}_0=\left\{\frac{1-\frac{x}{2}}{1-x}\;\middle|\;(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right\}_{-1}:$$

$$\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
5 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{25}{8} & \frac{5}{2} & \frac{175}{128} & \cdot \\
4 & 1 & 2 & \frac{4}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \cdot \\
3 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{8} & \frac{1}{2} & \frac{15}{128} & \cdot \\
2 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & \cdot \\
1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{128} & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

$$\left[\frac{1-\frac{x}{2}}{1-x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-x}\right\rangle=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 2 & 0 & \cdot \\ 1 & 3 & 0 & \cdot \\ 1 & 4 & 2 & \cdot \\ 1 & 5 & 5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix};$$

$$\left\{x+\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}_0=\left\{\frac{1-x}{1-2x}\;\middle|\;(1-2x)^{-\frac{1}{2}}\right\}_{-1}:$$

$$\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
5 & 1 & 5 & \frac{25}{2} & 20 & \frac{175}{8} & \cdot \\
4 & 1 & 4 & 8 & 10 & 8 & \cdot \\
3 & 1 & 3 & \frac{9}{2} & 4 & \frac{15}{8} & \cdot \\
2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

$$\left[\frac{1-x}{1-2x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2x}\right\rangle=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 2 & 1 & 0 & \cdot \\ 4 & 3 & 0 & \cdot \\ 8 & 8 & 1 & \cdot \\ 16 & 20 & 5 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix};$$

$$\left\{\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}_0=\left\{\frac{1}{1-x^2}\;\middle|\;\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}_{-1}:$$

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
6 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & \cdot \\
5 & 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{15}{8} & \cdot \\
4 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & \cdot \\
3 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{8} & \cdot \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
\qquad
\left[\frac{1}{1-x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-x^2}\right\rangle =
$$

$$
=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 2 & 1 & 0 & \cdot \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 3 & 3 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix};
$$

$$
\{1+x\}_0=\left\{\frac{1-x}{1-2x+x^2}\ \middle|\left(1-2x+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}_{-1}:
$$

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & \cdot \\
4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \cdot \\
3 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \cdot \\
2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
\qquad
\left[\frac{1-x}{1-2x+x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2x+x^2}\right\rangle =
$$

$$
=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & \cdot \\
1 & 3 & 0 & \cdot \\
1 & 6 & 1 & \cdot \\
1 & 10 & 5 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}.
$$

Обозначим:

$$
\left\langle x^2\right\rangle^{*}\breve{I}_{n+1}\left(t_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\right)=\breve{t}^{\,*}_{(n,\ \varphi,\ \beta)}.
$$

Так как

$$
\left[\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right\rangle =
$$

$$=\left[\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x}\right\rangle\left[\frac{1}{1+\beta x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x}\right\rangle,$$

то

$$\acute{t}^{*}_{(n,\ \varphi,\ \beta)}=\langle x-\beta\rangle\left(\acute{t}^{*}_{(n,\ \varphi,\ 0)}\right).$$

Так как

$$\acute{t}^{*}_{(n,\ 1,\ 1)}=\langle x-1\rangle\left(\acute{t}^{*}_{(n,\ 1,\ 0)}\right),$$

то

$$\acute{t}^{*}_{(n,\ 1,\ 0)}=\langle x+1\rangle\left(\acute{t}^{*}_{(n,\ 1,\ 1)}\right).$$

Так как

$$t_{(n,\ 1,\ 1)}=\prod_{m=1}^{n}\left(x+i\operatorname{ctg}\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

то

$$\breve{t}^{*}_{(n,\ 1,\ 1)}=d_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\operatorname{tg}^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right),\quad d_{2n}=1,\ d_{2n+1}=2n+1,$$

$$\breve{t}^{*}_{(n,\ 1,\ 0)}=d_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\sec^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$\breve{t}^{*}_{(n,\ \varphi,\ 0)}=p_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\varphi^2\sec^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

где

$$p_{2n}=1,\quad p_{2n+1}=(2n+1)\varphi,$$

$$\breve{t}^{*}_{(n,\ \varphi\ ,\beta)}=p_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\frac{\varphi^2-\beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}{\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}\right),$$

$$t_{(n,\ \varphi,\ \beta)}=\acute{I}_{n+1}\langle x^2\rangle\left(\acute{t}^{*}_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\right)=$$

$$=p_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\frac{\varphi^2-\beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}{\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}\right)\prod_{m=1}^{n}\left(x+\frac{i\cos\frac{2m-1}{2n}\pi}{\sqrt{\varphi^2-\beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}}\right),$$

где множитель $\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sec^2\frac{2m-1}{2n}\pi$ равен $2^{n-1}$, если $n$ четно, и $\frac{2^{n-1}}{n}$, если $n$ нечетно (проверяется подстановкой $\beta=0,\ \varphi=1$); если один из сомножителей (в случае $t_{(n,\ 0,\ 0)}$ – любой из сомножителей) множителя $\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\varphi^2-\beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right)$ равен нулю, он заменяется на $\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi$, соответствующая ему пара полиномов заменятся на $1$. Отметим также, что $t_{(2n+1,\ 0,\ \beta)}=0$.

$n$-й член вектора $\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2}$ равен $n$-му члену полинома $t_{(n,\ \varphi,\ \beta)}$ и нулю, если степень $t_{(n,\ \varphi,\ \beta)}$ меньше $n$. Следовательно,

$$\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2}=1+\varphi x+\sum_{n=2}^{\infty}x^n q_n 2^{n-1}\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\varphi^2-\beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

где $q_{2n}=1,\quad q_{2n+1}=\varphi$, множитель $\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\varphi^2-\beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right)$ равен нулю, если один из сомножителей равен нулю.

Обозначим:

$$t_0(\varphi)=1,\ \ t_n(\varphi)=2^{n-1}\prod_{m=1}^{n}\left(\varphi+\sqrt{\beta}\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right).$$

Тогда

$$\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t_n(\varphi)x^n.$$

Так как

$$1+\frac{1-\beta x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}=\frac{2(1-\varphi x)}{1-2\varphi x+\beta x^2},$$

то

$$\frac{1-\beta x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}t_n(\varphi)x^n.$$

Убедимся, что

$$1-x\left(\log a_i\right)' = a_i^{-1}\left(1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, $(n+1)$-я строка верхней половины таблицы

$$\left\{1-x\left(\log a_i\right)' \mid a_i\right\}_0 = \left\{{}_{(1)}a_i\right\}_{-1}$$

имеет вид

$$t_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\left(1+\left(\varphi^2-\beta\right)x^2\right)^{-\frac{1}{2}} + u_{(n,\ \varphi,\ \beta)}.$$

$n$-й член $2m$-й восходящей диагонали таблицы $\left\{1-x\left(\log a_i\right)' \mid a_i\right\}_0$, $m>0$, т.е. $n$-й член вектора $\left(1-2\varphi x+\beta x^2\right)^{-m}$, равен $n$-му члену полинома $u_{(2m+n-1,\ \varphi,\ \beta)}$. Отсюда вытекает, что $\left\langle x^2\right\rangle^* I_n\left(u_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\right)$ совпадает с $n$-й строкой матрицы

$$\left[\frac{x}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right\rangle.$$

Например:

$$\left\{1-\frac{x}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \,\middle|\, \left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{x}{2}\right\}_0 = \left\{(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right\}_{-1}:$$

$$\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
6 & 1 & \frac{5}{2} & 3 & \frac{35}{16} & 1 & \cdot \\
5 & 1 & 2 & \frac{15}{8} & 1 & \frac{35}{128} & \cdot \\
4 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{16} & 0 & \cdot \\
3 & 1 & 1 & \frac{3}{8} & 0 & -\frac{5}{128} & \cdot \\
2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{16} & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{128} & \cdot \\
k=0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
\qquad
\left[\frac{x}{1-x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-x}\right\rangle =
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & \cdot \\
1 & 2 & 0 & \cdot \\
1 & 3 & 1 & \cdot \\
1 & 4 & 3 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix};$$

$$\left\{1-x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\ \middle|\left(1+x^2\right)+x\right\}_0=\left\{(1-2x)^{-\frac{1}{2}}\right\}_{-1}:$$

$$\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
6 & 1 & 5 & 12 & \frac{35}{2} & 16 & \cdot \\
5 & 1 & 4 & \frac{15}{2} & 8 & \frac{35}{8} & \cdot \\
4 & 1 & 3 & 4 & \frac{5}{2} & 0 & \cdot \\
3 & 1 & 2 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{5}{8} & \cdot \\
2 & 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} & \cdot \\
k=0 & 1 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
\qquad
\left[\frac{x}{1-2x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2x}\right\rangle =
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 0 & 0 & \cdot \\
2 & 0 & 0 & \cdot \\
4 & 1 & 0 & \cdot \\
8 & 4 & 0 & \cdot \\
16 & 12 & 1 & \cdot \\
32 & 32 & 6 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix};$$

$$\left\{\frac{1}{1+x^2}\ \middle|\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}_0=\left\{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}_{-1}:$$

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
6 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & \cdot \\
5 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{8} & \cdot \\
4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
3 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{8} & \cdot \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{8} & \cdot \\
k=0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
\qquad
\left[\frac{x}{1-x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-x^2}\right\rangle =
$$

$$
=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 0 & 0 & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 2 & 1 & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix};
$$

$$
\left\{\frac{1}{1+x}\ \middle|\, 1+x\right\}_0 = \left\{\left(1-2x+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}_{-1}:
$$

$$
\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
6 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & \cdot \\
5 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \cdot \\
4 & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \cdot \\
3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
k=0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
\qquad
\left[\frac{x}{1-2x+x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2x+x^2}\right\rangle =
$$

$$
=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \cdot \\
1 & 0 & 0 & \cdot \\
2 & 0 & 0 & \cdot \\
3 & 1 & 0 & \cdot \\
4 & 4 & 0 & \cdot \\
5 & 10 & 1 & \cdot \\
6 & 20 & 6 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix};
$$

Обозначим:

$$
\left\langle x^2\right\rangle^* \breve{I}_n\left(u_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\right) = \breve{u}^*_{(n,\ \varphi,\ \beta)}.
$$

Так как

$$
\left[\frac{x}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right\rangle =
$$

$$
=\left[\frac{x}{1-2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x}\right\rangle\left[\frac{1}{1+\beta x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x}\right\rangle,
$$

то

$$\breve{u}^{*}_{(n,\ \varphi,\ \beta)} = \langle x-\beta\rangle\left(\breve{u}^{*}_{(n,\ \varphi,\ 0)}\right).$$

Так как

$$\breve{u}^{*}_{(n,\ 1,\ 1)} = \langle x-1\rangle\left(\breve{u}^{*}_{(n,\ 1,\ 0)}\right),$$

то

$$\breve{u}^{*}_{(n,\ 1,\ 0)} = \langle x+1\rangle\left(\breve{u}^{*}_{(n,\ 1,\ 1)}\right).$$

Так как

$$\breve{u}^{*}_{(n,\ 1,\ 1)} = l_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(x+\operatorname{tg}^2\frac{m}{n}\pi\right),\quad l_{2n}=2n,\ l_{2n+1}=1,$$

то

$$\breve{u}^{*}_{(n,\ 1,\ 0)} = l_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(x+\sec^2\frac{m}{n}\pi\right),$$

$$\breve{u}^{*}_{(n,\ \varphi,\ 0)} = r_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(x+\varphi^2\sec^2\frac{m}{n}\pi\right),$$

где

$$r_{2n}=2n\varphi,\quad r_{2n+1}=1,$$

$$\breve{u}^{*}_{(n,\ \varphi,\ \beta)} = r_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(x+\frac{\varphi^2-\beta\cos^2\frac{m}{n}\pi}{\cos^2\frac{m}{n}\pi}\right),$$

$$u_{(n,\ \varphi,\ \beta)} = \breve{I}_n\langle x^2\rangle\left(\breve{u}^{*}_{(n,\ \varphi,\ \beta)}\right) =$$

$$= r_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\frac{\varphi^2-\beta\cos^2\frac{m}{n}\pi}{\cos^2\frac{m}{n}\pi}\right)\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+\frac{i\cos\frac{m}{n}\pi}{\sqrt{\varphi^2-\beta\cos^2\frac{m}{n}\pi}}\right),$$

где множитель $\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sec^2\frac{m}{n}\pi$ равен $\frac{2^{n-1}}{n}$, если $n$ четно, и $2^{n-1}$, если $n$ нечетно; если один из сомножителей (в случае $u_{(n,\ 0,\ 0)}$ – любой из сомножителей) множителя $\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\varphi^2-\beta\cos^2\frac{m}{n}\pi\right)$ равен нулю, он заменяется на $\cos^2\frac{m}{n}\pi$, соответствующая ему пара полиномов заменяется на $1$. Отметим, что $u_{(2n,\ 0,\ \beta)}=0$.

$n$-й член вектора $\left(1-2\varphi x+\beta x^2\right)^{-1}$равен $n$-му члену полинома $u_{(n+1,\ \varphi,\ \beta)}$ и нулю, если степень $u_{(n+1,\ \varphi,\ \beta)}$ меньше $n$. Следовательно,

$$\frac{x}{1-2\varphi x+\beta x^2}=x+2\varphi x^2+\sum_{n=3}^{\infty}x^n q_n 2^{n-1}\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\varphi^2-\beta\cos^2\frac{m}{n}\pi\right)$$

где $q_{2n}=\varphi,\ \ q_{2n+1}=1$, множитель $\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\varphi^2-\beta\cos^2\frac{m}{n}\pi\right)$ равен нулю, если один из сомножителей равен нулю.

Обозначим:

$$u_0(\varphi)=0,\ u_1(\varphi)=1,\ \ u_n(\varphi)=2^{n-1}\prod_{m=1}^{n-1}\left(\varphi+\sqrt{\beta}\cos\frac{m}{n}\pi\right).$$

Тогда

$$\frac{x}{1-2\varphi x+\beta x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(\varphi)x^n.$$

Отметим равенства, словно предназначенные для обеспечения преобразований полиномов данного вида. Подставляя в общие формулы полиномов $t_{(n,\ \varphi,\ \beta)}$, $u_{(n,\ \varphi,\ \beta)}$ значения $\varphi=1,\ \beta=0$, получаем:

$$\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi=\left|\begin{matrix}\dfrac{1}{2^{n-1}}\\[2ex]\dfrac{n}{2^{n-1}}\end{matrix}\right.,\qquad \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\cos^2\frac{m}{n}\pi=\left|\begin{matrix}\dfrac{n}{2^{n-1}}\\[2ex]\dfrac{1}{2^{n-1}}\end{matrix}\right.,$$

где верхнее значение берется при четном $n$, нижнее – при нечетном $n$. Подставляя в общие формулы полиномов значения $\varphi=1,\ \beta=1$, получаем:

$$\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sin^2\frac{2m-1}{2n}\pi=\frac{1}{2^{n-1}},\qquad \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sin^2\frac{m}{n}\pi=\frac{n}{2^{n-1}}.$$

## 3. Обобщенное преобразование Эйлера и оператор сдвига

### 3.1. Собственные базисы

#### 3.1.1

Преобразование $\langle x+\beta\rangle$ называется оператором сдвига на $\beta$, или просто оператором сдвига при $\beta=1$. Обобщенным преобразованием Эйлера называется преобразование, матрица которого транспонирована к матрице $\langle x+\beta\rangle$:

$$\langle x+\beta\rangle^*=\left[\frac{1}{1-\beta x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\beta x}\right\rangle=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdot\\ \beta&1&0&0&\cdot\\ \beta^2&2\beta&1&0&\cdot\\ \beta^3&3\beta^2&3\beta&1&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Обозначим:

$$S_{(\beta)}=\left[\frac{1}{1-\beta x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\beta x}\right\rangle,\quad S^*_{(\beta)}=\langle x+\beta\rangle,$$

$$\overline{S}_{(\beta)}=S_{(\beta)}\langle -x\rangle=\langle -x\rangle S_{(-\beta)}=\left[\frac{1}{1-\beta x}\right]\left\langle\frac{-x}{1-\beta x}\right\rangle:$$

$$\overline{S}_{(\beta)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdot\\ \beta&-1&0&0&\cdot\\ \beta^2&-2\beta&1&0&\cdot\\ \beta^3&-3\beta^2&3\beta&-1&\cdot\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},$$

$$\overline{S}^*_{(\beta)}=\langle -x\rangle S^*_{(\beta)}=\langle\beta-x\rangle.$$

Тогда

$$S_{(\beta)}S_{(\alpha)}=S_{(\beta+\alpha)},\quad S^*_{(\alpha)}S^*_{(\beta)}=S^*_{(\beta+\alpha)},$$

$$\overline{S}_{(\beta)}\overline{S}_{(\alpha)} = S_{(\beta-\alpha)}, \quad \overline{S}^*_{(\alpha)}\overline{S}^*_{(\beta)} = S^*_{(\beta-\alpha)}.$$

Преобразования $\overline{S}_{(\beta)}$ и $\overline{S}^*_{(\beta)}$ являются отражениями:

$$\overline{S}_{(\beta)}\overline{S}_{(\beta)} = \langle x \rangle, \quad \overline{S}^*_{(\beta)}\overline{S}^*_{(\beta)} = \langle x \rangle.$$

Пространство векторов, отображаемых преобразованием $\overline{S}_{\{\beta\}}$ на себя, назовем тождественным подпространством преобразования $\overline{S}_{(\beta)}$ и обозначим $\left|\overline{S}_{(\beta)}\right|^+$; пространство векторов, отображаемых на противоположные, назовем антитождественным подпространством преобразования $\overline{S}_{(\beta)}$ и обозначим $\left|\overline{S}_{(\beta)}\right|^-$. Аналогичные подпространства преобразования $\overline{S}^*_{(\beta)}$ обозначим $\left|\overline{S}^*_{(\beta)}\right|^+$ и $\left|\overline{S}^*_{(\beta)}\right|^-$.

Векторы $a_i$ и $\overline{a}_i = \langle -x \rangle (a_i) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n x^n$ назовем спаренными.

Преобразования $S_{(\beta)}$ и $S^*_{(\beta)}$ не имеют собственных векторов, кроме $0$ и $0$, $1$ соответственно, поэтому их удобно представлять в виде композиции отражений:

$$S_{(\beta)} = \langle -x \rangle \overline{S}_{(-\beta)}, \quad S^*_{(\beta)} = \langle -x \rangle \overline{S}^*_{(\beta)}.$$

Таким образом, преобразование $S_{(\beta)}$ векторы пространства $\left|\overline{S}_{(-\beta)}\right|^+$ отображает на спаренные, векторы пространства $\left|\overline{S}_{(-\beta)}\right|^-$ – на противоположные спаренным. Преобразование $\overline{S}^*_{(\beta)}$ векторы пространства $\left|\overline{S}^*_{(\beta)}\right|^+$ отображает на спаренные, векторы пространства $\left|\overline{S}^*_{(\beta)}\right|^-$ – на противоположные спаренным.

Поскольку мы не затрагиваем вопроса о сходимости рядов, в область определения преобразований $S^*_{(\beta)}$ и $\overline{S}^*_{(\beta)}$ входят только конечные векторы. Хотя, казалось бы, если

$$a_i = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \left(x-\beta\right)^n ,$$

то

$$S^*_{(\beta)}\left(a_i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \left(x+\beta\right)^n$$

безотносительно к вопросу о сходимости рядов. Например, так как

$$\left\langle x\left(1+x\right)\right\rangle^{-1} = \left\langle x\left(\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-1}\right\rangle,$$

то справедливо равенство

$$x = \left\langle x\left(1+x\right)\right\rangle\left(b_i\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \left(x+1\right)^n ,$$

где

$$b_i = x\left(\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-1} .$$

Но

$$S^*_{(-1)}\left(x\right) = x-1 \neq \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \left(x-1\right)^n ,$$

так как

$$\left\langle x\left(x-1\right)\right\rangle\left(b_i\right) = -x .$$

Дело в том, что произведение бесконечных матриц $ABC$ ассоциативно, только если все строки или все столбцы матриц $A$, $B$, $C$ конечны [2, стр.21]. Все строки и столбцы матрицы $\left\langle x\left(1+x\right)\right\rangle$ конечны, но строки матрицы $\left\langle x-1\right\rangle$ бесконечны. Поэтому, если $b_i$ – бесконечный вектор, то

$$\left\langle x-1\right\rangle\left\langle x\left(1+x\right)\right\rangle\left(b_i\right) = \left\langle x\left(x-1\right)\right\rangle\left(b_i\right) \neq \left\langle x-1\right\rangle\left(\left\langle x\left(1+x\right)\right\rangle\left(b_i\right)\right).$$

Последовательность векторов, четные члены которой образуют базис пространства $\left|\overline{S}_{(\beta)}\right|^{+}$, а нечетные – базис пространства $\left|\overline{S}_{(\beta)}\right|^{-}$, назовем собственным базисом преобразования $\overline{S}_{(\beta)}$. Аналогичным образом определим собственный базис преобразования $\overline{S}^*_{(\beta)}$.

Равенство

$$\overline{S}_{(\beta)}\overline{S}_{(\beta/2)} = S_{(\beta/2)} = \overline{S}_{(\beta/2)}\left\langle -x\right\rangle$$

означает, что преобразование $\overline{S}_{(\beta)}$ четные столбцы матрицы $\overline{S}_{(\beta/2)}$ умножает на $1$, а нечетные столбцы умножает на $-1$. Следовательно, последовательность столбцов матрицы $\overline{S}_{(\beta/2)}$ образует собственный базис преобразования $\overline{S}_{(\beta)}$.

Равенство

$$\overline{S}^*_{(\beta)}\overline{S}^*_{(\beta/2)} = S^*_{(-\beta/2)} = \overline{S}^*_{(\beta/2)}\left\langle -x\right\rangle$$

означает, что последовательность столбцов матрицы $\overline{S}^*_{(\beta/2)}$ образует собственный базис преобразования $\overline{S}^*_{(\beta)}$.

Так как $S_{(\beta)}$ – произведение матрицы степеней и матрицы $\left[(1-\beta x)^{-1}\right]$, то

$$S_{(\beta)}(a_i b_i) = (1-\beta x) S_{(\beta)}(a_i) S_{(\beta)}(b_i),$$

$$\overline{S}_{(\beta)}(a_i b_i) = (1-\beta x) \overline{S}_{(\beta)}(a_i) \overline{S}_{(\beta)}(b_i);$$

Между преобразованиями $S_{(\beta)}$, $S^*_{(\beta)}$ и векторами вида $\left(1+\varphi x+\alpha x^2\right)^k$ существует определенная связь, некоторые аспекты которой мы рассмотрели в предыдуших разделах. Отметим, например, равенства:

$$\left[\frac{1-\beta x^2}{1+\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x+\beta x^2}\right\rangle =$$
$$= \left[\frac{1-\beta x^2}{1+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1+\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x}\right\rangle,$$

$$\left[\frac{x}{1+\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x+\beta x^2}\right\rangle =$$

$$=\left[\frac{x}{1+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x^2}\right\rangle\left[\frac{1}{1+\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x}\right\rangle,$$

$$\left[\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right\rangle=$$
$$=\left[\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x}\right\rangle\left[\frac{1}{1+\beta x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x}\right\rangle,$$

$$\left[\frac{x}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right\rangle=$$
$$=\left[\frac{x}{1-2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x}\right\rangle\left[\frac{1}{1+\beta x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x}\right\rangle,$$

которые при транспонировании выражают: корни строк матрицы $\left[\frac{1-\beta x^2}{1+\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x+\beta x^2}\right\rangle$ через корни строк матрицы $\left[\frac{1-\beta x^2}{1+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x^2}\right\rangle$, $n$-я строка которой, $n>0$, имеет вид

$$\prod_{m=1}^{n}\left(x+2\sqrt{\beta}\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right);$$

корни сторок матрицы $\left[\frac{x}{1+\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x+\beta x^2}\right\rangle$ через корни строк матрицы $\left[\frac{x}{1+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x}{1+\beta x^2}\right\rangle$, $n$-я строка которой, $n>1$, имеет вид

$$\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+2\sqrt{\beta}\cos\frac{m}{n}\pi\right);$$

корни строк матрицы $\left[\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right\rangle$ через корни строк матрицы $\left[\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x}\right\rangle$, $n$-я строка которой, $n>1$, имеет вид

$$p_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\varphi^2\sec^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right),\ p_{2n}=1,\ p_{2n+1}=(2n+1)\varphi,$$

где $[n/2]$ – целая часть от $n/2$; корни строк матрицы $\left[\frac{x}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x+\beta x^2}\right\rangle$ через корни строк матрицы $\left[\frac{x}{1-2\varphi x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-2\varphi x}\right\rangle$, $n$-я строка которой, $n>2$, имеет вид

$$r_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(x+\varphi^2\sec^2\frac{m}{n}\pi\right),\ r_{2n}=2n\varphi,\ r_{2n+1}=1.$$

Матрицу и базис, образованный ее столбцами, будем обозначать одним и тем же символом. Отметим трансформации транспонированных матриц умножения в базисах $S_{(\beta)}$, $\bar{S}_{(\beta)}$, $S^*_{(\beta)}$, $\bar{S}^*_{(\beta)}$. Так как

$$S_{(\beta)}[a_i]S_{(-\beta)}=[(1-\beta x)S_{(\beta)}(a_i)],$$

$$\bar{S}_{(\beta)}[a_i]\bar{S}_{(\beta)}=[(1-\beta x)\bar{S}_{(\beta)}(a_i)],$$

$$S^*_{(\beta)}[b_i]S^*_{(-\beta)}=[S^*_{(\beta)}(b_i)],$$

$$\bar{S}^*_{(\beta)}[b_i]\bar{S}^*_{(\beta)}=[\bar{S}^*_{(\beta)}(b_i)],$$

где $b_1$ – конечный вектор, то

$$S^*_{(-\beta)}[a_i]^*\,S^*_{(\beta)}=[(1-\beta x)S_{(\beta)}(a_i)]^*,$$

$$\bar{S}^*_{(\beta)}[a_i]^*\,\bar{S}^*_{(\beta)}=[(1-\beta x)\bar{S}_{(\beta)}(a_i)]^*,$$

$$S_{(-\beta)}[b_i]^* S_{(\beta)} = [S^*_{(\beta)}(b_i)]^*,$$

$$\overline{S}_{(\beta)}[b_i]^* \overline{S}_{(\beta)} = [\overline{S}^*_{(\beta)}(b_i)]^*.$$

**3.1.2**

Рассмотрим преобразования

$$\overline{S}_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & -1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdot \\ 1 & -3 & 3 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \overline{S}^*_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ 0 & -1 & -2 & -3 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Отметим равенства:

$$\overline{S}_{(1)}\overline{S}^*_{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \cdot \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \left[\frac{1}{1-x}\right]\left\langle\frac{1}{1-x}\right\rangle;$$

$$\overline{S}_{(1)}\left[(1-x)^k\right]\overline{S}_{(1)} = \left[(1-x)^{-k}\right]$$

$$\overline{S}^*_{(1)}\left[(1-x)^k\right]^* \overline{S}^*_{(1)} = \left[(1-x)^{-k}\right]^*;$$

$$\overline{S}^*_{(1)}\left[(1-x)^n\right]\overline{S}^*_{(1)} = \left[x^n\right], \quad [x] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\overline{S}_{(1)}\left[(1-x)^n\right]^*\overline{S}_{(1)}=\left[x^n\right]^*,\quad [x]^*=\begin{pmatrix}0&1&0&0&\cdot\\0&0&1&0&\cdot\\0&0&0&1&\cdot\\0&0&0&0&\cdot\\.&.&.&.&.\end{pmatrix}.$$

Так как

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]\left\langle\frac{-x}{1-x}\right\rangle\left[\frac{x}{1-x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-x}\right\rangle=-\left[\frac{x}{1-x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-x}\right\rangle,$$

то столбцы матрицы

$$A^-=\left[\frac{x}{1-x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-x}\right\rangle=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&\cdot\\1&0&0&0&0&\cdot\\1&0&0&0&0&\cdot\\1&1&0&0&0&\cdot\\1&2&0&0&0&\cdot\\1&3&1&0&0&\cdot\\1&4&3&0&0&\cdot\\1&5&6&1&0&\cdot\\1&6&10&4&0&\cdot\\.&.&.&.&.&.\end{pmatrix}$$

образуют базис пространства $\left|\overline{S}_{(1)}\right|^-$.

Так как

$$\langle 1-x\rangle\langle x(x-1)\rangle=\langle x(x-1)\rangle,$$

то столбцы матрицы

$$B^+=\langle x(x-1)\rangle=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\0&-1&0&0&0&0&0&\cdot\\0&1&1&0&0&0&0&\cdot\\0&0&-2&-1&0&0&0&\cdot\\0&0&1&3&1&0&0&\cdot\\0&0&0&-3&-4&-1&0&\cdot\\0&0&0&1&6&5&1&\cdot\\.&.&.&.&.&.&.&.\end{pmatrix}$$

образуют базис пространства $\left|\overline{S}_{(1)}^{*}\right|^{+}$.

Если $a_i$ – произвольный вектор, $b_i$ – конечный вектор, скалярным произведением $a_i$ и $b_i$ назовем число

$$(a_i\ ,\ b_i) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n .$$

Если скалярное произведение равно нулю, будем называть векторы ортогональными. Пусть матрица $A^{-1}$ – двусторонняя обратная к матрице $A$. Каждый столбец матрицы $A$ ортогонален каждому столбцу матрицы $\left(A^{-1}\right)^{*}$, за исключением одноименного, скалярное произведение с которым равно единице. То же самое касается столбцов матриц $A^{-1}$ и $A^{*}$. Базисы $A$ и $\left(A^{-1}\right)^{*}$ назовем биортогональными. Для бесконечных треугольных матриц биортогональные базисы можно рассматривать как естественную замену ортогональному базису, для которого $\left(A^{-1}\right)^{*} = A$ (среди бесконечных треугольных матриц этим свойством обладают только диагональные матрицы с диагональными элементами, равными $\pm 1$). Если $a'_i$ – последовательность координат вектора $a_i$ в базисе $A$, $b'_i$ – последовательность координат вектора $b_i$ в базисе $\left(A^{-1}\right)^{*}$, то

$$(a'_i\ ,\ b'_i) = (a_i\ ,\ b_i).$$

Таким образом, $n$-я координата вектора $a_i$ в базисе $A$ равна скалярному произведению $a_i$ с $n$-м столбцом матрицы $\left(A^{-1}\right)^{*}$, $n$-я координата вектора $b_i$ в базисе $\left(A^{-1}\right)^{*}$ равна скалярному произведению $b_i$ с $n$-м столбцом матрицы $A$.

Понятие биортогональности обычно вводится при объединении пары взаимодополнительных векторных пространств в единую конструкцию. Взаимодополнительными в определенном смысле [2, стр.310] являются пространство всех последовательностей и пространство всех конечных последовательностей. Можно иметь это в виду, рассматривая нижние треугольные матрицы как базисы пространства всех последовательностей, а верхние треугольные – как базисы пространства всех конечных последовательностей.

Базисы $\overline{S}_{(1)}$ и $\overline{S}^*_{(1)}$ являются биортогональными.

Так как $\overline{S}_{(1)}$ и $\overline{S}^*_{(1)}$ – сопряженные преобразования, то

$$\left(\overline{S}_{(1)}(a_i),\ b_i\right)=\left(a_i\ ,\ \overline{S}^*_{(1)}(b_i)\right).$$

Если

$$a_i \in \left|\overline{S}_{(1)}\right|^-,\ \ b_i \in \left|\overline{S}^*_{(1)}\right|^+,$$

то

$$\overline{S}_{(1)}(a_i)=-a_i,\ \ \overline{S}^*_{(1)}(b_i)=b_i,$$

$$(-a_i\ ,\ b_i)=(a_i\ ,\ b_i)=0.$$

Таким образом,каждый вектор пространства $\left|\overline{S}_{(1)}\right|^-$ ортогонален каждому конечному вектору пространства $\left|\overline{S}^*_{(1)}\right|^+$.

Так как

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]\left\langle\frac{-x}{1-x}\right\rangle\left[\frac{2-x}{1-x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-x}\right\rangle=\left[\frac{2-x}{1-x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-x}\right\rangle,$$

то столбцы матрицы

$$A^+=\left[\frac{2-x}{1-x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-x}\right\rangle=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0&\cdot\\1&0&0&0&0&\cdot\\1&2&0&0&0&\cdot\\1&3&0&0&0&\cdot\\1&4&2&0&0&\cdot\\1&5&5&0&0&\cdot\\1&6&9&2&0&\cdot\\1&7&14&7&0&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

образуют базис пространства $\left|\overline{S}_{(1)}\right|^+$.

Так как

$$\langle 1-x\rangle[2x-1]\langle x(x-1)\rangle=-[2x-1]\langle x(x-1)\rangle,$$

то столбцы матрицы

$$B^- = [2x-1]\langle x(x-1)\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & -5 & -5 & -1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 6 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -14 & -7 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

образуют базис пространства $\left|\bar{S}^*_{(1)}\right|^-$.

Рассуждая так же, как в отношении матриц $A^-$и $B^+$, выводим, что каждый столбец матрицы $A^+$ортогонален каждому столбцу матрицы $B^-$.

Сопоставим столбцы матрицы $A^-$со столбцами матрицы $B^-$. $n$-й столбец матрицы $A^-$ортогонален $n$ первым столбцам матрицы $B^-$. Его скалярное произведение с $n$-м столбцом матрицы $B^-$равно $2$. Его скалярное произведение с $(n+m)$-м столбцом равно $2m$-му члену вектора

$$\frac{(2-x)(1-x)^{n+m}}{(1-x)^{n+1}} = (2-x)(1-x)^{m-1},$$

т.е. нулю.

Подобным образом доказывается, что каждый столбец матрицы $A^+$ортогонален каждому столбцу матрицы $B^+$, за исключением одноименного, скалярное произведение с которым равно $2$.

Таким образом,

$$\left(B^-\right)^* A^- = \left(A^-\right)^* B^- = 2\langle x\rangle,$$

$$\left(B^+\right)^* A^+ = \left(A^+\right)^* B^+ = 2\langle x\rangle.$$

Отметим характерную деталь. Сумма столбцов матрицы $A^-$ – это последовательность чисел Фибоначчи:

$$a_i = (0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ \ldots),\quad a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2};$$

сумма столбцов матрицы $B^+$ – последовательность чисел Фибоначчи, «продолженная в другую сторону»:

$$b_i = (1, -1,\ 2, -3,\ 5,\ \dots),\quad b_n = b_{n+1} + b_{n+2};$$

сумма столбцов матрицы $A^+$ – последовательность чисел Люка:

$$a_i = (2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ \dots),\quad a_0 = 2,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2};$$

сумма столбцов матрицы $B^-$ – последовательность чисел Люка, «продолженная в другую сторону»:

$$b_i = (-1,\ 3, -4,\ 7, -11,\ \dots),\quad b_n = b_{n+1} + b_{n+2}.$$

Иначе говоря,

$$A^-\left((1-x)^{-1}\right) = \frac{x}{1-x-x^2},\quad B^+\left((1-x)^{-1}\right) = \frac{1}{1+x-x^2},$$

$$A^+\left((1-x)^{-1}\right) = \frac{2-x}{1-x-x^2},\quad B^-\left((1-x)^{-1}\right) = \frac{2x-1}{1+x-x^2}.$$

Полиномы $c^*_{(n,\ 0,-1)}$, $s^*_{(n,\ 0-1)}$ из раздела 2.2 переобозначим на $c_n(x)$, $s_n(x)$:

$$\left(\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^n = c_n(x) - (-1)^n x^n \left(\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-n},$$

$$(1+4x)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^n =$$

$$= s_n(x) + (-1)^n (1+4x)^{-\frac{1}{2}} x^n \left(\frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{-n},$$

где

$$c_0(x) = 2,\quad c_1(x) = 1,$$

$$c_n(x) = p_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left( x + \frac{1}{4}\sec^2 \frac{2m-1}{2n}\pi \right),$$

$$p_{2n} = 2, \quad p_{2n+1} = 2n+1;$$

$$s_0(x) = 0, \quad s_1(x) = 1, \quad s_2(x) = 1,$$

$$s_n(x) = r^n \mathop{\mathrm{C}}_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left( x + \frac{1}{4}\sec^2 \frac{m}{n}\pi \right),$$

$$r_{2n} = n, \; r_{2n+1} = 1.$$

Так как

$$\langle x(x-1)\rangle \left( \left( \frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^n \right) = (1-x)^n,$$

$$\langle x(x-1)\rangle \left( x^n \left( \frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{-n} \right) = (-x)^n,$$

то

$$B^+(c_n(x)) = (1-x)^n + x^n.$$

Так как

$$[2x-1]\langle x(x-1)\rangle \left( (1+4x)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^n \right) = -(1-x)^n,$$

$$[2x-1]\langle x(x-1)\rangle \left( (1+4x)^{-\frac{1}{2}} x^n \left( \frac{1+(1+4x)^{\frac{1}{2}}}{2} \right)^{-n} \right) = -(-x)^n,$$

то

$$B^-(s_n(x)) = x^n - (1-x)^n.$$

В разделе 2.3 показано, что $n$-я строка матрицы $A^{+}=\left[\frac{2-x}{1-x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-x}\right\rangle$ совпадает с полиномом $c_n(x)$, $n$-я строка матрицы $A^{-}=\left[\frac{x}{1-x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-x}\right\rangle$ совпадает с полиномом $s_n(x)$. Отсюда получаем равенства:

$$B^{+}\left(A^{+}\right)^{*}=\bar{S}_{(1)}^{*}+\langle x\rangle, \quad B^{-}\left(A^{-}\right)^{*}=\langle x\rangle-\bar{S}_{(1)}^{*},$$

$$B^{+}\left(A^{+}\right)^{*}+B^{-}\left(A^{-}\right)^{*}=2\langle x\rangle=\left(A^{+}\right)^{*}B^{+}=\left(A^{-}\right)^{*}B^{-},$$

$$B^{+}\left(A^{+}\right)^{*}-B^{-}\left(A^{-}\right)^{*}=2\bar{S}_{(1)}^{*};$$

Аналогичные равенства получаем для транспонированных матриц.

Отметим, что $n$-я строка матрицы $B^{-}=[2x-1]\langle x(x-1)\rangle$, $n>0$, совпадает с полиномом

$$(-1)^{n+1}x^{\left[\frac{n}{2}\right]}\prod_{m=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\left(x+4\cos^2\frac{2m-1}{2(n+1)}\pi\right),$$

$n$-я строка матрицы $B^{+}=\langle x(x-1)\rangle$, $n>1$, совпадает с полиномом

$$(-1)^{n}x^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+4\cos^2\frac{m}{n+1}\pi\right).$$

Собственный базис преобразования $\bar{S}_{(1)}$, четные члены которого совпадают с последовательностью столбцов матрицы $A^{+}$, а нечетные – с последовательностью столбцов матрицы $A^{-}$, обозначим $A$; собственный базис преобразования $\bar{S}_{(1)}^{*}$, четные члены которого совпадают с последовательностью столбцов матрицы $B^{+}$, а нечетные – с последовательностью столбцов матрицы $B^{-}$, обозначим $B$:

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0&0&0&\cdot\\1&1&0&0&0&0&0&\cdot\\1&1&2&0&0&0&0&\cdot\\1&1&3&1&0&0&0&\cdot\\1&1&4&2&2&0&0&\cdot\\1&1&5&3&5&1&0&\cdot\\1&1&6&4&9&3&2&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0&0&0&0&\cdot\\0&2&-1&1&0&0&0&\cdot\\0&0&1&-3&1&-1&0&\cdot\\0&0&0&2&-2&4&-1&\cdot\\0&0&0&0&1&-5&3&\cdot\\0&0&0&0&0&2&-3&\cdot\\0&0&0&0&0&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Каждый столбец матрицы $A$ ортогонален каждому столбцу матрицы $B$, за исключением одноименного, скалярное произведение с которым равно $2$. Следовательно, если четные столбцы матрицы $A$ и нечетные столбцы матрицы $B$ умножить на $1/2$, получится пара биортогональных базисов.

По сравнению с другими собственными базисами преобразования $\bar{S}_{(1)}$, базис $A$ интересен тем, что в $2n$-мерном пространстве, образованном $2n$ первыми столбцами матрицы $A$, содержится пространство полиномов степени $\le n-1$. Любой вектор вида $a_i\left(1-x\right)^{-n}$, где $a_i$ – полином, выражается конечной комбинацией столбцов матрицы $A$. Другими словами, преобразование $A$ взаимно однозначно отображает пространство всех конечных последовательностей на пространство векторов вида $a_i\left(1-x\right)^{-n}$, подпространством которого является пространство всех конечных последовательностей. Чтобы в этом убедиться, достаточно представить матрицу $B^*=2A^{-1}$в виде суммы:

$$B^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0&0&\cdot\\-1&1&0&0&0&0&0&\cdot\\0&-1&1&0&0&0&0&\cdot\\0&1&-2&1&0&0&0&\cdot\\0&0&1&-2&1&0&0&\cdot\\0&0&-1&3&-3&1&0&\cdot\\0&0&0&-1&3&-3&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\0&1&0&0&0&0&0&\cdot\\0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\0&0&-1&1&0&0&0&\cdot\\0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\0&0&0&1&-2&1&0&\cdot\\0&0&0&0&0&0&0&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Отметим, что

$$A\left(\left(1-x\right)^{-1}\right)=\frac{2}{1-x-x^2}=2\left(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots\right),$$

$$B\left(\left(1-x\right)^{-1}\right)=\frac{2x}{1+x-x^2}=2\left(0,\ 1,-1,\ 2,-3,\ 5,\ \ldots\right).$$

**3.1.3**

Рассмотрим общий метод построения собственных базисов преобразований $\overline{S}_{(1)}$ и $\overline{S}^*_{(1)}$ с помощью матриц степеней.

Если

$$A\overline{S}_{(1)}=\left\langle -x\right\rangle A,$$

то

$$\overline{S}_{(1)}A^{-1}=A^{-1}\left\langle -x\right\rangle,\qquad \overline{S}^*_{(1)}A^*=A^*\left\langle -x\right\rangle.$$

Пусть

$$A=\left[\frac{a_i-1}{x}\right]\left\langle 1-a_i\right\rangle,\ \ a_0=1,\ a_1=1,$$

где, символ $\frac{1}{x}$ означает умножение на $\left[x\right]^*$:

$$\frac{a_i}{x}=\left[x\right]^*\left(a_i\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^n.$$

Тогда

$$\left[\frac{a_i-1}{x}\right]\left\langle 1-a_i\right\rangle\left[\frac{1}{1-x}\right]\left\langle\frac{-x}{1-x}\right\rangle=\left[\frac{1-a_i^{-1}}{x}\right]\left\langle 1-a_i^{-1}\right\rangle.$$

Равенство

$$\left[\frac{1-a_i^{-1}}{x}\right]\left\langle 1-a_i^{-1}\right\rangle=\left\langle -x\right\rangle\left[\frac{a_i-1}{x}\right]\left\langle 1-a_i\right\rangle$$

означает, что

$$\left\langle -x\right\rangle\left(a_i\right)=a_i^{-1},$$

или

$$a_i=\left(1+b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}+b_i,\quad b_{2n}=0,\ b_1=1.$$

Очевидно, этим свойством обладают векторы $e^x$ и $\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+x$. Так как

$$\overline{S}_{(1/2)}\overline{S}_{(1)} = S_{(-1/2)} = \langle -x\rangle\,\overline{S}_{(1/2)},$$

то $1+x\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{-1}$ является вектором того же типа. Действительно, пусть

$$b_i = x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{-1}, \quad \left(1+b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{-1}.$$

Тогда

$$a_i = \left(1+\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{-1} + x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{-1} = \left(1+\frac{x}{2}\right)^{2}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{-1} =$$

$$= \left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1} = 1 + x\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}.$$

Пусть

$$a_i^{-1} = \left(\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{2}\right)^{2} = 1 - x\left(\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{2}\right).$$

В разделе 1.5 мы выяснили, что формула общего члена вектора

$$c_i^m = \left(\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{x}{2}\right)^{m} = \left(\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{2}\right)^{-m}$$

имеет вид:

$$c_0^m = 1, \quad c_1^m = \frac{-m}{2}, \quad c_n^m = \frac{-m}{2^n n!}\prod_{i=1}^{n-1}(-m+n-2i),$$

так что

$$c_{2n}^m = \frac{1}{2^{2n}(2n)!}\prod_{i=0}^{n-1}\left(m^2-(2i)^2\right),$$

$$c_{2n+1}^m = \frac{-m}{2^{2n+1}(2n+1)!}\prod_{i=0}^{n-1}\left(m^2-(2i+1)^2\right).$$

Так как

$$\left\langle x\left(\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}\right)\right\rangle^{-1}=\left\langle x(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right\rangle,$$

то столбцы матрицы

$$\left[(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]\left\langle x(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right\rangle=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{3}{8} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{5}{16} & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{35}{128} & 1 & \frac{15}{8} & 2 & 1 & 0 & \cdot \\ \frac{63}{256} & 1 & \frac{35}{16} & 3 & \frac{5}{2} & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

образуют собственный базис преобразования $\overline{S}_{(1)}$; столбцы матрицы

$$([c_i]\langle xc_i\rangle)^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{64} & 0 & \cdot \\ 0 & 2 & -2 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 2 & -3 & \frac{9}{4} & -1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 4 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

где $c_i=\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}$, образуют собственный базис преобразования $\overline{S}_{(1)}^*$.

Так как $k$ -я восходящая диагональ таблицы

$$\left\{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)+\frac{x}{2}\right\}_0=\left\{\left(1-\frac{x}{2}\right)(1-x)^{-1}\ \middle|\ (1-x)^{-\frac{1}{2}}\right\}_{-1}:$$

$$\begin{array}{cc|ccccccc}
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & 4 & 1 & 2 & \frac{4}{2} & \frac{5}{4} & \frac{1}{2} & \frac{7}{64} & \cdot \\
 & 3 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{8} & \frac{1}{2} & \frac{15}{128} & 0 & \cdot \\
 & 2 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{128} & \cdot \\
 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{128} & 0 & \cdot \\
k= & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\
 & -1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{8} & 0 & -\frac{1}{128} & 0 & \cdot \\
 & -2 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{128} & \cdot \\
 & -3 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{9}{8} & -\frac{1}{2} & \frac{15}{128} & 0 & \cdot \\
 & -4 & 1 & -2 & \frac{4}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{64} & \cdot \\
 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

совпадает с вектором

$$\left(1+x\left(\log(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right)'\right)(1-x)^{-\frac{k}{2}}=\left(1-\frac{x}{2}\right)(1-x)^{-1}(1-x)^{-\frac{k}{2}},$$

то $(2n+1)$-я строка матрицы $[c_i]\langle xc_i\rangle$ совпадает с вектором

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)x^n(x-1)^n.$$

Так как (см. введение)

$$\langle xa_i\rangle D=\left[\frac{1}{(xa_i)'}\right]D\langle xa_i\rangle,$$

то

$$\left\langle\frac{-x}{1-x}\right\rangle D=\left[-(1-x)^2\right]D\left\langle\frac{-x}{1-x}\right\rangle.$$

Пусть

$$\overline{S}_{(1)}[a_i]\langle xa_i\rangle=[a_i]\langle xa_i\rangle\langle -x\rangle.$$

Тогда

$$\left\langle\frac{-x}{1-x}\right\rangle(xa_i)=-xa_i,$$

$$\left\langle\frac{-x}{1-x}\right\rangle\left((xa_i)'\right)=\left\langle\frac{-x}{1-x}\right\rangle D(xa_i)=(xa_i)'(1-x)^2,$$

$$\left\langle\frac{-x}{1-x}\right\rangle\left(a_i^{-1}\right)=a_i^{-1}(1-x)^{-1},$$

$$\overline{S}_{(1)}\left(\frac{(xa_i)'}{a_i}\right)=\frac{(xa_i)'}{a_i}.$$

Так как

$$\frac{(xa_i)'}{a_i}=1+x\frac{(a_i)'}{a_i}=1+x(\log a_i)',$$

то

$$\overline{S}_{(1)}\left[1+x(\log a_i)'\right]\langle xa_i\rangle=\left[1+x(\log a_i)'\right]\langle xa_i\rangle\langle -x\rangle.$$

Если

$$\langle xa_i\rangle^{-1}=\langle xb_i\rangle,$$

то

$$\langle xb_i\rangle\left(\frac{a_i}{(xa_i)'}\right)=\frac{(xb_i)'}{b_i},$$

$$\left(\left[1+x(\log a_i)'\right]\langle xa_i\rangle\right)^{-1}=\left[1+x(\log b_i)'\right]\langle xb_i\rangle.$$

Таким образом, если $[a_i]\langle xa_i\rangle$ и $([b_i]\langle xb_i\rangle)^*$ – собственные базисы преобразований соответственно $\overline{S}_{(1)}$ и $\overline{S}_{(1)}^*$, то $\left[1+x(\log a_i)'\right]\langle xa_i\rangle$ и

$\left(\left[1+x(\log b_i)'\right]\langle xb_i\rangle\right)^*$ также являются собственными базисами преобразований $\overline{S}_{(1)}$ и $\overline{S}^*_{(1)}$.

Следовательно, столбцы матрицы

$$\left[\left(1-\frac{x}{2}\right)(1-x)^{-1}\right]\left\langle x(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0&0&0&0&\cdot\\1&2&0&0&0&0&\cdot\\1&2&2&0&0&0&\cdot\\1&\frac{9}{4}&3&2&0&0&\cdot\\1&\frac{5}{2}&4&4&2&0&\cdot\\1&\frac{175}{64}&5&\frac{25}{4}&5&2&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}$$

образуют собственный базис преобразования $\overline{S}_{(1)}$; столбцы матрицы

$$\left(\left[1+x(\log c_i)'\right]\langle xc_i\rangle\right)^*=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{16}&0&-\frac{3}{256}&\cdot\\0&1&-1&\frac{3}{8}&0&-\frac{5}{128}&\cdot\\0&0&1&-\frac{3}{2}&1&-\frac{5}{16}&\cdot\\0&0&0&1&-2&\frac{15}{8}&\cdot\\0&0&0&0&1&-\frac{5}{2}&\cdot\\0&0&0&0&0&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},$$

где

$$1+x\left(\log\left(\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}\right)'\right)=1-\frac{x}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

образуют собственный базис преобразования $\overline{S}^*_{(1)}$. Так как $k$-я восходящая диагональ таблицы

$$\left\{1-\frac{x}{2}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \;\middle|\; \left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{x}{2}\right\}_0 = \left\{(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right\}_{-1}:$$

$$\begin{array}{r|cccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
5 & 1 & 2 & \frac{15}{8} & 1 & \frac{35}{128} & \cdot \\
4 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{5}{16} & 0 & \cdot \\
3 & 1 & 1 & \frac{3}{8} & 0 & -\frac{5}{128} & \cdot \\
2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{16} & 0 & \cdot \\
1 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & 0 & \frac{3}{128} & \cdot \\
k=0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \cdot \\
-1 & 1 & -1 & \frac{3}{8} & 0 & -\frac{5}{128} & \cdot \\
-2 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{5}{16} & 0 & \cdot \\
-3 & 1 & -2 & \frac{15}{8} & -1 & \frac{35}{128} & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

совпадает с вектором $(1-x)^{-\frac{k}{2}}$, то $2n$-я строка матрицы $\left[1+x\left(\log c_i\right)'\right]\langle xc_i\rangle$ совпадает с вектором $x^n(x-1)^n$.

### 3.1.4

Выделим общую схему.

Пусть

$$\overline{S}_{(1)}(a_i)=a_i.$$

Так как

$$\overline{S}_{(1)}(a_ib_i)=(1-x)\overline{S}_{(1)}(a_i)\overline{S}_{(1)}(b_i),$$

то

$$\overline{S}_{(1)}\left(a_i^{n+1}\right)=(1-x)^n\,a_i^{n+1}.$$

Так как

$$\overline{S}_{(1)}\left(x^n\right)=\frac{(-x)^n}{(1-x)^{n+1}},$$

то

$$\overline{S}_{(1)}\left(x^n a_i^{n+1}\right)=(-x)^n\,a_i^{n+1}.$$

Если также

$$\overline{S}_{(1)}(b_i)=b_i,$$

то

$$\overline{S}_{(1)}\left(x^n a_i^n b_i\right)=(-x)^n\,a_i^n b_i.$$

Таким образом, столбцы матрицы $[b_i]\langle xa_i\rangle$, $b_i\in\left|\overline{S}_{(1)}\right|^{+}$, $a_i\in\left|\overline{S}_{(1)}\right|^{+}$, образуют собственный базис преобразования $\overline{S}_{(1)}$.

Как мы выяснили в предыдущем разделе, если $a_i\in\left|\overline{S}_{(1)}\right|^{+}$, то и $1+x(\log a_i)'\in\left|\overline{S}_{(1)}\right|^{+}$.

Строки матрицы $\left([b_i]\langle xa_i\rangle\right)^{-1}=\left[\langle xc_i\rangle\left(b_i^{-1}\right)\right]\langle xc_i\rangle$ образуют собственный базис преобразования $\overline{S}_{(1)}^{*}$. Мы выяснили, что

$$\langle -x\rangle(1-xc_i)=(1-xc_i)^{-1}.$$

Пусть $A$, $B$ – собственные базисы преобразования $\overline{S}_{(1)}$; $\left(A^{-1}\right)^{*}$, $\left(B^{-1}\right)^{*}$ – собственные базисы преобразования $\overline{S}_{(1)}^{*}$. Так как каждый вектор пространства $\left|\overline{S}_{(1)}\right|^{+}$ ортогонален каждому конечному вектору пространства $\left|\overline{S}_{(1)}^{*}\right|^{-}$, а каждый вектор пространства $\left|\overline{S}_{(1)}\right|^{-}$ ортогонален каждому конечному вектору пространства $\left|\overline{S}_{(1)}^{*}\right|^{+}$, то объединив четные столбцы матрицы $A$ с нечетными столбцами матрицы $B$, а четные столбцы матрицы $\left(A^{-1}\right)^{*}$ с нечетными столбцами матрицы $\left(B^{-1}\right)^{*}$, мы получим пару биортогональных базисов.

Пусть

$$\overline{S}_{(1)}A = A\left\langle -x\right\rangle.$$

Тогда

$$A\left\langle -x\right\rangle A^{-1} = \overline{S}_{(1)}.$$

Обозначим: $A^{+}$, $A^{-}$ – базисы, образованные соответственно последовательностью четных столбцов и последовательностью нечетных столбцов матрицы $A$; $B^{+}$, $B^{-}$ – базисы, образованные соответственно последовательностью четных столбцов и последовательностью нечетных столбцов матрицы $\left(A^{-1}\right)^{*}$. Тогда

$$\left(A^{+}\right)^{*} B^{+} = \left(B^{+}\right)^{*} A^{+} = \left\langle x\right\rangle; \quad \left(A^{-}\right)^{*} B^{-} = \left(B^{-}\right)^{*} A^{-} = \left\langle x\right\rangle.$$

$n$-й столбец матрицы $A^{-1}$ и $n$-й столбец матрицы $\left\langle -x\right\rangle A^{-1}$ обозначим соответственно ${}^{n}b_i$ и ${}^{n}\overline{b}_i$. Из равенств

$$A\left({}^{n}b_i + {}^{n}\overline{b}_i\right) = x^n + \frac{(-x)^n}{(1-x)^{n+1}},$$

$$A\left({}^{n}b_i - {}^{n}\overline{b}_i\right) = x^n - \frac{(-x)^n}{(1-x)^{n+1}}$$

вытекают равенства

$$2A^{+}\left(B^{+}\right)^{*} = \left\langle x\right\rangle + \overline{S}_{(1)}, \quad 2A^{-}\left(B^{-}\right)^{*} = \left\langle x\right\rangle - \overline{S}_{(1)};$$

$$2B^{+}\left(A^{+}\right)^{*} = \left\langle x\right\rangle + \overline{S}_{(1)}^{*}, \quad 2B^{-}\left(A^{-}\right)^{*} = \left\langle x\right\rangle - \overline{S}_{(1)}^{*}.$$

Проиллюстрируем сказанное характерным примером.

Так как:

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]\left\langle\frac{-x}{1-x}\right\rangle\left[\left(1-x+\beta x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\left\langle x\left(1-x+\beta x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\rangle =$$

$$=\left[\left(1-x+\beta x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\left\langle -x\left(1-x+\beta x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\rangle,$$

$$\left\langle x\left(1-x+\beta x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\rangle^{-1}=\left\langle x\left(\frac{\left(1+\left(\frac{1}{4}-\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}}{1-\beta x^2}\right)\right\rangle,$$

$$1+x\left(\log\left(1-x+\beta x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right)'=\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-x+\beta x^2\right)^{-1},$$

$$1+x\left(\log c_i\right)'=c_i\left(1+\left(\frac{1}{4}-\beta\right)x^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1-\frac{x}{2}\left(1+\left(\frac{1}{4}-\beta\right)x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{1-\beta x^2},$$

где

$$c_i=\frac{\left(1+\left(\frac{1}{4}-\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{x}{2}}{1-\beta x^2},$$

то столбцы матриц

$$\left[\left(1-x+\beta x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]\left\langle x\left(1-x+\beta x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\rangle,$$

$$\left[\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-x+\beta x^2\right)^{-1}\right]\left\langle x\left(1-x+\beta x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\rangle$$

образуют собственные базисы преобразования $\overline{S}_{(1)}$, столбцы матриц

$$\left(\left[c_i\right]\left\langle xc_i\right\rangle\right)^*,\quad \left(\left[1+x\left(\log c_i\right)'\right]\left\langle xc_i\right\rangle\right)^*$$

образуют собственные базисы преобразования $\overline{S}^*_{(1)}$.

Так как $k$-я восходящая диагональ таблицы

$$\left\{\left(1+\left(\frac{1}{4}-\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{x}{2}\right\}_0,$$

где

$$\left(1+\left(\frac{1}{4}-\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{x}{2}=c_i^{-1},$$

совпадает с вектором

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)\left(1-x+\beta x^2\right)^{-1}\left(1-x+\beta x^2\right)^{-\frac{k}{2}},$$

то $(2n+1)$-я строка матрицы $[c_i]\langle xc_i\rangle$ имеет вид

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-x+\beta\right)^n.$$

Так как $k$-я восходящая диагональ таблицы

$$\left\{\frac{1-\frac{x}{2}\left(1+\left(\frac{1}{4}-\beta\right)x^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{1-\beta x^2}\;\middle|\;\left(1+\left(\frac{1}{4}-\beta\right)x^2\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{x}{2}\right\}_0$$

совпадает с вектором $\left(1-x+\beta x^2\right)^{-\frac{k}{2}}$, то $2n$-я строка матрицы $\left[1+x\left(\log c_i\right)'\right]\langle xc_i\rangle$ имеет вид $\left(x^2-x+\beta\right)^n$.

Например, при $\beta=\frac{1}{4}$:

$$\left\langle x\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}\right\rangle^{-1}=\left\langle x\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}\right\rangle,$$

$$1+x\left(\log\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}\right)'=\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1},$$

$$1+x\left(\log\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1}\right)'=\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1};$$

$$A=S_{(1/2)}=\left[\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}\right]\left\langle x\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}\right\rangle=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{1}{4} & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 1 & 0 & \cdot \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 2 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$\left(A^{-1}\right)^*=S^*_{(-1/2)}=\left\langle x-\frac{1}{2}\right\rangle=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \cdot \\ 0 & 1 & -1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$A^+=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & \cdot \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{2} & 0 & \cdot \\ \frac{1}{16} & \frac{3}{2} & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},\qquad B^+=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \cdot \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \cdot \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \cdot \\ 0 & 0 & -2 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$A^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{3}{4} & 1 & 0 & \cdot \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \qquad B^- = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & \cdot \\ 1 & \frac{3}{4} & \cdot \\ 0 & -\frac{3}{2} & \cdot \\ 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

$$2B^+\left(A^+\right)^* = \langle x \rangle + \overline{S}^*_{(1)}, \qquad 2B^-\left(A^-\right)^* = \langle x \rangle - \overline{S}^*_{(1)}.$$

## 3.2 «Металлические пропорции»

### 3.2.1

«Металлической пропорцией» (в честь «золотой пропорции») [3] называется положительный корень уравнения $x^2 - \varphi x - 1 = 0$:

$$\lambda = \frac{\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 4}}{2}, \qquad \varphi = \lambda - \frac{1}{\lambda}.$$

Отсюда видно, что если $\lambda = e^{\alpha}$, то $\varphi = 2\operatorname{sh}\alpha$. Следовательно,

$$\frac{\varphi - \sqrt{\varphi^2 + 4}}{2} = -\frac{1}{\lambda}.$$

«Золотая пропорция»

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

характеризуется следующими свойствами:

$$\Phi^k = \Phi^{k-1} + \Phi^{k-2},$$

где $k$ – целое число,

$$\Phi^n = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}, \quad \Phi^{-n} = \frac{(-1)^n L_n + (-1)^{n+1} F_n\sqrt{5}}{2},$$

где

$$L_0 = 2,\; L_1 = 1,\; L_n = L_{n-1} + L_{n-2},$$

$$F_0 = 0,\;\; F_1 = 1,\; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Так как производящие функции чисел $L_n$ (числа Люка) и $F_n$ (числа Фибоначчи) имеют вид

$$L_i = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = \frac{2-x}{1-x-x^2},\; \overline{L}_i = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n L_n x^n = \frac{2+x}{1+x-x^2},$$

$$F_i = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = \frac{x}{1-x-x^2},\; \overline{F}_i = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n F_n x^n = \frac{-x}{1+x-x^2},$$

то

$$(1-\varPhi x)^{-1} = \frac{L_i + F_i\sqrt{5}}{2},\;\; \left(1-\frac{1}{\varPhi}x\right)^{-1} = \frac{\overline{L}_i - \overline{F}_i\sqrt{5}}{2},$$

$$(1+\varPhi x)^{-1} = \frac{\overline{L}_i + \overline{F}_i\sqrt{5}}{2},\;\; \left(1+\frac{1}{\varPhi}x\right)^{-1} = \frac{L_i - F_i\sqrt{5}}{2}.$$

Любое положительное число является «металлической пропорцией», т.е. значением функции $f(\varphi) = \lambda$. Перечисленные свойства «золотой пропорции» являются функциональными свойствами «металлической пропорции» и зависят от параметра $\varphi = \lambda - \lambda^{-1}$, который при $\lambda = \varPhi$ равен единице.

Так как формула «металлической пропорции» является частным случаем формулы корня квадратного уравнения, она указывает на определенную связь квадратных уравнений с гиперболическими функциями.

Покажем, что проблематика «металлических пропорций» неразрывно связана с обобщенным преобразованием Эйлера.

Рассмотрим преобразования

$$S_{(-\varphi)} = \left[\frac{1}{1+\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1+\varphi x}\right\rangle,$$

$$\overline{S}_{(\varphi)} = \langle -x\rangle S_{(-\varphi)} = \left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{-x}{1-\varphi x}\right\rangle.$$

Для вектора $\left(1-\lambda x\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n x^n$ имеем

$$S_{(-\varphi)}\left(\left(1-\lambda x\right)^{-1}\right)=\left(1-\left(\lambda-\varphi\right)x\right)^{-1},$$

$$\overline{S}_{(\varphi)}\left(\left(1-\lambda x\right)^{-1}\right)=\left(1+\left(\lambda-\varphi\right)x\right)^{-1}.$$

Если

$$a_i\in\left|\overline{S}_{(\varphi)}\right|^{+},\ b_i\in\left|\overline{S}_{(\varphi)}\right|^{-},$$

то

$$\overline{S}_{(\varphi)}\left(a_i\right)=a_i,\quad \overline{S}_{(\varphi)}\left(b_i\right)=-b_i,$$

$$S_{(-\varphi)}\left(a_i\right)=\overline{a}_i,\quad S_{(-\varphi)}\left(b_i\right)=-\overline{b}_i,$$

где

$$\overline{a}_i=\left\langle -x\right\rangle\left(a_i\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n a_n x^n .$$

Составляющие произвольного вектора $a_i$ в пространствах $\left|\overline{S}_{(\varphi)}\right|^{+}$ и $\left|\overline{S}_{(\varphi)}\right|^{-}$ соответственно равны

$$\frac{a_i+\overline{S}_{(\varphi)}\left(a_i\right)}{2},\quad \frac{a_i-\overline{S}_{(\varphi)}\left(a_i\right)}{2},$$

так что

$$\frac{\left(1-\lambda x\right)^{-1}+\left(1+\left(\lambda-\varphi\right)x\right)^{-1}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2-\varphi x}{1-\varphi x-\lambda\left(\lambda-\varphi\right)x^2}\right),$$

$$\frac{\left(1-\lambda x\right)^{-1}-\left(1+\left(\lambda-\varphi\right)x\right)^{-1}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(2\lambda-\varphi\right)x}{1-\varphi x-\lambda\left(\lambda-\varphi\right)x^2}\right).$$

Рассмотрим вектор $\left(1-\lambda x\right)^{-1},\ \lambda>0$, обладающий свойством

$$S_{(-\varphi)}\left((1-\lambda x)^{-1}\right)=\left(1-\frac{1}{\lambda}x\right)^{-1}.$$

Его составляющие в пространствах $\left|\overline{S}_{(\varphi)}\right|^{+}$ и $\left|\overline{S}_{(\varphi)}\right|^{-}$ обозначим соответственно $\frac{{}^{\varphi}l_i}{2}$ и $\frac{{}^{\varphi}f_i(2\lambda-\varphi)}{2}$. Так как

$$\lambda-\varphi=\frac{1}{\lambda},\quad \lambda=\frac{\varphi+\sqrt{\varphi^2+4}}{2},$$

то

$${}^{\varphi}l_i=\frac{2-\varphi x}{1-\varphi x-x^2},\qquad {}^{\varphi}f_i=\frac{x}{1-\varphi x-x^2},$$

$$(1-\lambda x)^{-1}=\frac{{}^{\varphi}l_i+{}^{\varphi}f_i\sqrt{\varphi^2+4}}{2},$$

$$\left(1-\frac{1}{\lambda}x\right)^{-1}=\frac{{}^{\varphi}\overline{l_i}-{}^{\varphi}\overline{f_i}\sqrt{\varphi^2+4}}{2},$$

$$(1+\lambda x)^{-1}=\frac{{}^{\varphi}\overline{l_i}+{}^{\varphi}\overline{f_i}\sqrt{\varphi^2+4}}{2},$$

$$\left(1+\frac{1}{\lambda}x\right)^{-1}=\frac{{}^{\varphi}l_i-{}^{\varphi}f_i\sqrt{\varphi^2+4}}{2}.$$

Числу $\lambda$ поставим в соответствие ряд $a_i$,

$$a_i^2-\varphi x a_i-1=0,$$

$$a_i^k=\varphi x a_i^{k-1}+a_i^{k-2},$$

$$a_i=\frac{\varphi x}{2}+\left(1+\frac{\varphi^2x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{\varphi x+\left(4+\varphi^2x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

по правилу:

$$\lambda=a(1),$$

где $a(x)$ – аналитическая запись ряда $a_i$. Тогда

$$\lambda^k = a^k(1),$$

где $a^k(x)$ – аналитическая запись ряда $a_i^k$. В разделе 2.3 мы выяснили, что

$$a_i^n = \frac{c_{(n,\ \varphi)} + s_{(n,\ \varphi)}\left(4+\varphi^2x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

$$a_i^{-n} = \frac{(-1)^n c_{(n,\ \varphi)} + (-1)^{n+1} s_{(n,\ \varphi)}\left(4+\varphi^2x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

где

$$c_{(n,\ 1)} = 2t_{(n,\ 1/2\ ,\ 0)}:$$

$$c_{(0,\ 1)} = 2, \quad c_{(n,\ 1)} = \prod_{m=1}^{n}\left(x + 2i\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right);$$

$$s_{(n,\ 1)} = u_{(n,\ 1/2,\ 0)}:$$

$$s_{(0,\ 1)} = 0,\ \ s_{(1,\ 1)} = 1,\ \ s_{(n,\ 1)} = \prod_{m=1}^{n-1}\left(x + 2i\cos\frac{m}{n}\pi\right).$$

Отсюда видно, что

$${}^{\varphi}l_n = \prod_{m=1}^{n}\left(\varphi + 2i\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right) = p_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\varphi^2 + 4\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$p_{2n} = 1,\ p_{2n+1} = \varphi,$$

$${}^{\varphi}f_n = \prod_{m=1}^{n-1}\left(\varphi + 2i\cos\frac{m}{n}\pi\right) = r_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\varphi^2 + 4\cos^2\frac{m}{n}\pi\right),$$

$$r_{2n} = \varphi,\ r_{2n+1} = 1.$$

Пусть $\lambda = e^{\alpha}$, $\varphi = 2\mathrm{sh}\,\alpha$. Тогда

$$e^{n\alpha} = \frac{{}^{2\mathrm{sh}\alpha}l_n}{2} + \frac{{}^{2\mathrm{sh}\alpha}f_n\,2\mathrm{ch}\,\alpha}{2} = \mathrm{ch}\,n\alpha + \mathrm{sh}\,n\alpha,$$

$$e^{-n\alpha} = (-1)^n \frac{{}^{2\mathrm{sh}\alpha}l_n}{2} + (-1)^{n+1} \frac{{}^{2\mathrm{sh}\alpha}f_n\,2\mathrm{ch}\,\alpha}{2} = \mathrm{ch}\,n\alpha - \mathrm{sh}\,n\alpha.$$

Следовательно,

$${}^{2\mathrm{sh}\alpha}l_{2n} = 2\mathrm{ch}\,2n\alpha, \qquad {}^{2\mathrm{sh}\alpha}l_{2n+1} = 2\mathrm{sh}(2n+1)\alpha,$$

$${}^{2\mathrm{sh}\alpha}f_{2n} = \frac{\mathrm{sh}\,2n\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha}, \qquad {}^{2\mathrm{sh}\alpha}f_{2n+1} = \frac{\mathrm{ch}(2n+1)\alpha}{\mathrm{ch}\,\alpha},$$

$$\frac{1 - x\,\mathrm{sh}\,\alpha}{1 - 2x\,\mathrm{sh}\,\alpha - x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{2n}\mathrm{ch}\,2n\alpha + x^{2n+1}\mathrm{sh}(2n+1)\alpha\right),$$

$$\frac{x}{1 - 2x\,\mathrm{sh}\,\alpha - x^2} = \mathrm{sch}\,\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{2n}\mathrm{sh}\,2n\alpha + x^{2n+1}\mathrm{ch}(2n+1)\alpha\right).$$

**3.2.2**

Рассмотрим аналогичный случай. Чтобы не усложнять символику и подчеркнуть аналогию, будем пользоваться обозначениями из предыдущего раздела.

Рассмотрим вектор $(1-\lambda x)^{-1}$, $\lambda > 0$, обладающий свойством

$$S_{(-1)}\left((1-\lambda x)^{-1}\right) = \left(1 - \frac{\varphi^2}{\lambda}x\right)^{-1}.$$

Его составляющие в пространствах $\left|\overline{S}_{(1)}\right|^{+}$ и $\left|\overline{S}_{(1)}\right|^{-}$ обозначим соответственно $\frac{{}^{\varphi}l_i}{2}$ и $\frac{{}^{\varphi}f_i(2\lambda-1)}{2}$. Так как

$$\lambda - 1 = \frac{\varphi^2}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\varphi^2}}{2},$$

то

$${}^{\varphi}l_i = \frac{2 - x}{1 - x - \varphi^2 x^2}, \qquad {}^{\varphi}f_i = \frac{x}{1 - x - \varphi^2 x^2},$$

$$(1 - \lambda x)^{-1} = \frac{{}^{\varphi}l_i + {}^{\varphi}f_i\sqrt{1 + 4\varphi^2}}{2},$$

$$\left(1 - \frac{\varphi^2}{\lambda}x\right)^{-1} = \frac{{}^{\varphi}\overline{l}_i - {}^{\varphi}\overline{f}_i\sqrt{1 + 4\varphi^2}}{2},$$

$$(1 + \lambda x)^{-1} = \frac{{}^{\varphi}\overline{l}_i + {}^{\varphi}\overline{f}_i\sqrt{1 + 4\varphi^2}}{2},$$

$$\left(1 + \frac{\varphi^2}{\lambda}x\right)^{-1} = \frac{{}^{\varphi}l_i - {}^{\varphi}f_i\sqrt{1 + 4\varphi^2}}{2}.$$

Числу $\lambda$ поставим в соответствие ряд $a_i$,

$$a_i^2 - a_i - \varphi^2 x^2 = 0,$$

$$a_i^k = a_i^{k-1} + \varphi^2 x^2 a_i^{k-2},$$

$$a_i = \frac{1 + \left(1 + 4\varphi^2 x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Раскладывая $a_i^n$ в бином Ньютона и группируя члены, можно представить его в виде

$$a_i^n = \frac{\breve{c}_{(n,\,\varphi)} + \breve{s}_{(n,\,\varphi)}\left(1 + 4\varphi^2 x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

где $\breve{c}_{(n,\,\varphi)}$ – полином степени $2[n/2]$, $\breve{s}_{(n,\,\varphi)}$ – полином степени $2[(n-1)/2]$. Сравнивая алгоритм получения полиномов $\breve{c}_{(n,\,1)}$ и $\breve{s}_{(n,\,1)}$ с алгоритмом получения полиномов $c_{(n,\ 1)}$ и $s_{(n,\ 1)}$ при разложении в бином Ньютона

$$\left(\frac{x+\left(4+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^n,$$

заключаем, что $\breve{c}_{(n,\ 1)}$ и $\breve{s}_{(n,\ 1)}$ получаются из $c_{(n,\ 1)}$ и $s_{(n,\ 1)}$ перестановкой коэффициентов в обратном порядке и понижением степени на единицу для $c_{(2n+1,\ 1)}$ и $s_{(2n,\ 1)}$. Например:

$$\begin{aligned}
&c_{(2,\ 1)} = 2 + x^2, &&\breve{c}_{(2,\ 1)} = 1 + 2x^2,\\
&c_{(3,\ 1)} = 3x + x^3, &&\breve{c}_{(3,\ 1)} = 1 + 3x^2,\\
&c_{(4,\ 1)} = 2 + 4x^2 + x^4, &&\breve{c}_{(4,\ 1)} = 1 + 4x^2 + 2x^4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&s_{(2,\ 1)} = x, &&\breve{s}_{(2,\ 1)} = 1,\\
&s_{(3,\ 1)} = 1 + x^2, &&\breve{s}_{(3,\ 1)} = 1 + x^2,\\
&s_{(4,\ 1)} = 2x + x^3, &&\breve{s}_{(4,\ 1)} = 1 + 2x^2.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\breve{c}_{(0,\ 1)} = 2,\quad \breve{c}_{(1,\ 1)} = 1,$$

$$\breve{c}_{(n,\ 1)} = \breve{p}_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left(x + \frac{i}{2}\sec\frac{2m-1}{2n}\pi\right)\left(x - \frac{i}{2}\sec\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

где

$$\breve{p}_{2n} = 2,\qquad \breve{p}_{2n+1} = 2n+1;$$

$$\breve{s}_{(0,\ 1)} = 0,\ \breve{s}_{(1,\ 1)} = 1,\ \breve{s}_{(2,\ 1)} = 1,$$

$$\breve{s}_{(n,\ 1)} = \breve{r}_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(x + \frac{i}{2}\sec\frac{m}{n}\pi\right)\left(x - \frac{i}{2}\sec\frac{m}{n}\pi\right),$$

где

$$\breve{r}_{2n} = n,\qquad \breve{r}_{2n+1} = 1.$$

В разделе 2.2 мы получили этот же результат, сопоставляя корни полиномов $c_{(n,\ 0,-1)} = \breve{c}_{(n,\ 1)}$ и $s_{(n,\ 0,-1)} = \breve{s}_{(n,\ 1)}$ с корнями полиномов $x^n + 1$ и $x^n - 1$.

Так как

$$a_i - 1 = \varphi^2 x^2 a_i^{-1},$$

или

$$\left( \frac{\left(1 + 4\varphi^2 x^2\right)^{\frac{1}{2}} - 1}{2} \right)^n = \varphi^{2n} x^{2n} a_i^{-n},$$

то

$$\varphi^{2n} x^{2n} a_i^{-n} = \frac{(-1)^n \breve{c}_{(n,\ \varphi)} + (-1)^{n+1} \breve{s}_{(n,\ \varphi)} \left(1 + 4\varphi^2 x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

Отсюда видно, что

$${}^{\varphi}l_n = \breve{p}_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left( \varphi^2 + \frac{1}{4} \sec^2 \frac{2m-1}{2n} \pi \right),$$

$${}^{\varphi}f_n = \breve{r}_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left( \varphi^2 + \frac{1}{4} \sec^2 \frac{m}{n} \pi \right).$$

Так как при $\varphi > 0$

$$\frac{1 + \sqrt{1 + 4\varphi^2}}{2} = \varphi \left( \frac{\frac{1}{\varphi} + \sqrt{\frac{1}{\varphi^2} + 4}}{2} \right),$$

то пусть

$$\frac{1}{\varphi} = 2\operatorname{sh}\alpha, \quad \varphi = \frac{1}{2\operatorname{sh}\alpha}.$$

Тогда

$$\lambda^n = \frac{e^{n\alpha}}{2^n \operatorname{sh}^n \alpha} = \frac{{}^{\frac{1}{2\operatorname{sh}\alpha}}l_n}{2} + \frac{{}^{\frac{1}{2\operatorname{sh}\alpha}}f_n \operatorname{cth}\alpha}{2},$$

$$\varphi^{2n} \lambda^{-n} = \frac{e^{-n\alpha}}{2^n \operatorname{sh}^n \alpha} = (-1)^n \frac{{}^{\frac{1}{2\operatorname{sh}\alpha}}l_n}{2} + (-1)^{n+1} \frac{{}^{\frac{1}{2\operatorname{sh}\alpha}}f_n \operatorname{cth}\alpha}{2}.$$

Но нет необходимости искать выражение чисел ${}^{\varphi}l_n$, ${}^{\varphi}f_n$ таким образом. Так как

$$\frac{2-x}{1-x-\varphi^2x^2}=\langle\varphi x\rangle\left(\frac{2-\varphi^{-1}x}{1-\varphi^{-1}x-x^2}\right),$$

$$\frac{x}{1-x-\varphi^2x^2}=\frac{1}{\varphi}\langle\varphi x\rangle\left(\frac{x}{1-\varphi^{-1}x-x^2}\right),$$

то числа ${}^{\varphi}l_n$, ${}^{\varphi}f_n$ из настоящего раздела отличаются от чисел ${}^{\frac{1}{\varphi}}l_n$, ${}^{\frac{1}{\varphi}}f_n$ из предыдущего раздела множителями $\varphi^n$ , $\varphi^{n-1}$ соответственно. Например,

$$\frac{1}{\varphi^n}p_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\varphi^2+\frac{1}{4}\sec^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right)=p_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(4\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi+\frac{1}{\varphi^2}\right),$$

где $p_{2n}=1$, $p_{2n+1}=\dfrac{1}{\varphi}$, так как множитель $\displaystyle\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{4}\sec^2\frac{2m-1}{2n}\pi$ равен $\dfrac{1}{2}$, если $n$ четно, и $\dfrac{1}{n}$, если $n$ нечетно. Аналогично,

$$\frac{1}{\varphi^{n-1}}r_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\varphi^2+\frac{1}{4}\sec^2\frac{m}{n}\pi\right)=r_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(4\cos^2\frac{m}{n}\pi+\frac{1}{\varphi^2}\right),$$

где $r_{2n}=\dfrac{1}{\varphi}$, $r_{2n+1}=1$, так как множитель $\displaystyle\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\frac{1}{4}\sec^2\frac{m}{n}\pi$ равен $\dfrac{2}{n}$, если $n$ четно, и $1$, если $n$ нечетно.

### 3.2.3

Для полноты картины рассмотрим еще один аналогичный случай. Ради удобства записи введем нормирующий множитель $2$, тем самым немного нарушив аналогию.

Пусть вектор $(1-\lambda x)^{-1}$, $\lambda>0$, обладает свойством

$$S_{(-2\varphi)}\left((1-\lambda x)^{-1}\right)=\left(1-\frac{1-\varphi^2}{\lambda}x\right)^{-1},$$

Его составляющие в пространствах $\left|\overline{S}_{(2\varphi)}\right|^{+}$ и $\left|\overline{S}_{(2\varphi)}\right|^{-}$ обозначим соответственно ${}^{\varphi}l_i$ и ${}^{\varphi}f_i$. Так как

$$\lambda-2\varphi=\frac{1-\varphi^2}{\lambda},\quad \lambda=\varphi+1,$$

то

$${}^{\varphi}l_i=\frac{1-\varphi x}{1-2\varphi x+\left(\varphi^2-1\right)x^2},\qquad {}^{\varphi}f_i=\frac{x}{1-2\varphi x+\left(\varphi^2-1\right)x^2},$$

$$(1-\lambda x)^{-1}={}^{\varphi}l_i+{}^{\varphi}f_i,\qquad \left(1-\frac{1-\varphi^2}{\lambda}x\right)^{-1}={}^{\varphi}\overline{l_i}-{}^{\varphi}\overline{f_i},$$

$$(1+\lambda x)^{-1}={}^{\varphi}\overline{l_i}+{}^{\varphi}\overline{f_i},\qquad \left(1+\frac{1-\varphi^2}{\lambda}x\right)^{-1}={}^{\varphi}l_i-{}^{\varphi}f_i.$$

Числу $\lambda$ поставим в соответствие ряд $a_i$,

$$a_i=1+\varphi x,$$

$$a_i^k=a_i^{k-1}+\varphi x a_i^{k-1},$$

$$a_i^n=t_{(n,\ \varphi)}+u_{(n,\ \varphi)},$$

$$\left(1-\varphi^2x^2\right)^n a_i^{-n}=(-1)^n t_{(n,\ \varphi)}+(-1)^{n+1}u_{(n,\ \varphi)},$$

где

$$t_{(n,\ \varphi)}=\frac{(\varphi x+1)^n+(\varphi x-1)^n}{2},\qquad u_{(n,\ \varphi)}=\frac{(\varphi x+1)^n-(\varphi x-1)^n}{2}.$$

Так как

$$t_{(0,\ 1)}=1,\ t_{(n,\ 1)}=\prod_{i=1}^{n}\left(x+i\operatorname{ctg}\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$u_{(0,\,1)}=0,\quad u_{(1,\,1)}=1,\quad u_{(n,\,1)}=n\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+i\operatorname{ctg}\frac{m}{n}\pi\right),$$

то

$${}^{\varphi}l_n=p_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\varphi^2+\operatorname{ctg}^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right),\ \ p_{2n}=1,\ \ p_{2n+1}=\varphi,$$

$${}^{\varphi}f_n=r_n n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\varphi^2+\operatorname{ctg}^2\frac{m}{n}\pi\right),\ \ r_{2n}=\varphi,\ \ r_{2n+1}=1.$$

Так как при $\varphi>1$

$$1+\varphi=\sqrt{\varphi^2-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi^2-1}}+\sqrt{\frac{1}{\varphi^2-1}+1}\right),$$

то пусть

$$\frac{1}{\sqrt{\varphi^2-1}}=\operatorname{sh}\alpha,\qquad \varphi=\operatorname{cth}\alpha.$$

Тогда

$$\lambda^n=\frac{e^{n\alpha}}{\operatorname{sh}^n\alpha}={}^{\operatorname{cth}\alpha}l_n+{}^{\operatorname{cth}\alpha}f_n,$$

$$\left(\varphi^2-1\right)^n\lambda^{-n}=\frac{e^{-n\alpha}}{\operatorname{sh}^n\alpha}={}^{\operatorname{cth}\alpha}l_n-{}^{\operatorname{cth}\alpha}f_n,$$

$${}^{\operatorname{cth}\alpha}l_n=\frac{\operatorname{ch}n\alpha}{\operatorname{sh}^n\alpha},\qquad {}^{\operatorname{cth}\alpha}f_n=\frac{\operatorname{sh}n\alpha}{\operatorname{sh}^n\alpha},$$

$${}^{\operatorname{cth}\alpha}l_i=\frac{1-x\operatorname{cth}\alpha}{1-2x\operatorname{cth}\varphi+x^2\operatorname{csch}^2\alpha},\ {}^{\operatorname{cth}\alpha}f_i=\frac{x}{1-2x\operatorname{cth}\alpha+x^2\operatorname{csch}^2\alpha},$$

$$\langle x\operatorname{sh}\alpha\rangle\left({}^{\operatorname{cth}\alpha}l_i\right)=\frac{1-x\operatorname{ch}\alpha}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\operatorname{ch}n\alpha,$$

$$\langle x\operatorname{sh}\alpha\rangle\left({}^{\operatorname{cth}\alpha}f_i\right)=\frac{x\operatorname{sh}\alpha}{1-2x\operatorname{ch}\alpha+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\operatorname{sh}n\alpha.$$

Так как

$$\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sin^2\frac{2m-1}{2n}\pi=\frac{1}{2^{n-1}},\quad \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\sin^2\frac{m}{n}\pi=\frac{n}{2^{n-1}},$$

то

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi^2-1}}\right)^n p_n\prod_{n=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\varphi^2+\mathrm{ctg}^2\frac{2m-1}{2m}\pi\right)=$$

$$=2^{n-1}p'_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\frac{\varphi^2\sin^2\frac{2m-1}{2n}\pi+\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi}{\varphi^2-1}\right)=$$

$$=2^{n-1}p'_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\frac{\varphi^2}{\varphi^2-1}-\cos^2\frac{2m-1}{2n}\pi\right),\quad p'_{2n}=1,\ \ p'_{2n+1}=\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2-1}},$$

или

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi^2-1}}\right)^n {}^{\varphi}l_n=2^{n-1}\prod_{m=1}^{n}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2-1}}+\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right);$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi^2-1}}\right)^{n-1} r_n n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\varphi^2+\mathrm{ctg}^2\frac{m}{n}\pi\right)=$$

$$=2^{n-1}r'_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\left(\frac{\varphi^2}{\varphi^2-1}-\cos^2\frac{m}{n}\pi\right),\ r'_{2n}=\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2-1}},\ r'_{2n+1}=1,$$

или

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi^2-1}}\right)^{n-1} {}^{\varphi}f_n=2^{n-1}\prod_{m=1}^{n-1}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\varphi^2-1}}+\cos\frac{m}{n}\pi\right).$$

Так как при $0\le\varphi<1$

$$1+\varphi=\sqrt{1-\varphi^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}}+\sqrt{\frac{1}{1-\varphi^2}-1}\right),$$

то пусть

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}}=\operatorname{ch}\alpha\,,\quad \varphi=\operatorname{th}\alpha\,.$$

Тогда

$$\lambda^n=\frac{e^{n\alpha}}{\operatorname{ch}^n\alpha}={}^{\operatorname{th}\alpha}l_n+{}^{\operatorname{th}\alpha}f_n,$$

$$\left(1-\varphi^2\right)^n\lambda^{-n}=\frac{e^{-n\alpha}}{\operatorname{ch}^n\alpha}=(-1)^n\,{}^{\operatorname{th}\alpha}l_n+(-1)^{n+1}\,{}^{\operatorname{th}\alpha}f_n,$$

$${}^{\operatorname{th}\alpha}l_{2n}=\frac{\operatorname{ch}2n\alpha}{\operatorname{ch}^{2n}\alpha},\qquad {}^{\operatorname{th}\alpha}l_{2n+1}=\frac{\operatorname{sh}(2n+1)\alpha}{\operatorname{ch}^{2n+1}\alpha},$$

$${}^{\operatorname{th}\alpha}f_{2n}=\frac{\operatorname{sh}2n\alpha}{\operatorname{ch}^{2n}\alpha},\qquad {}^{\operatorname{th}\alpha}f_{2n+1}=\frac{\operatorname{ch}(2n+1)\alpha}{\operatorname{ch}^{2n+1}\alpha};$$

$${}^{\operatorname{th}\alpha}l_i=\frac{1-x\operatorname{th}\alpha}{1-2x\operatorname{th}\alpha-x^2\operatorname{sch}^2\alpha},\quad {}^{\operatorname{th}\alpha}f_i=\frac{x}{1-2x\operatorname{th}\alpha-x^2\operatorname{sch}^2\alpha},$$

$$\langle x\operatorname{ch}\alpha\rangle\left({}^{\operatorname{th}\alpha}l_i\right)=\frac{1-x\operatorname{sh}\alpha}{1-2x\operatorname{sh}\alpha-x^2},$$

$$\langle x\operatorname{ch}\alpha\rangle\left({}^{\operatorname{th}\alpha}f_i\right)=\frac{x\operatorname{ch}\alpha}{1-2x\operatorname{sh}\alpha-x^2};$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}}\right)^n{}^{\varphi}l_n=2^{n-1}\prod_{m=1}^{n}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}}+i\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\varphi^2}}\right)^{n-1}{}^{\varphi}f_n=2^{n-1}\prod_{m=1}^{n-1}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{1-\varphi^2}}+i\cos\frac{m}{n}\pi\right).$$

**3.2.4**

Из рассмотренных примеров выделим суть.

В разделе 3.1, посвященном собственным базисам преобразования $\overline{S}_{(\varphi)}$, мы выяснили, что если

$$a_i \in \left|\overline{S}_{(\varphi)}\right|^{+},\ a_0 = 1,$$

то

$$1 + x(\log a_i)' \in \left|\overline{S}_{(\varphi)}\right|^{+},\ \ x a_i^2 \in \left|\overline{S}_{(\varphi)}\right|^{-}.$$

Пусть

$$a_i = \left(1 - \varphi x + \beta x^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Тогда

$$\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{-x}{1-\varphi x}\right\rangle(a_i) = a_i,$$

$$2\left(1 + x(\log a_i)'\right) = \frac{2-\varphi x}{1-\varphi x+\beta x^2} \in \left|\overline{S}_{(\varphi)}\right|^{+},\ \ \frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2} \in \left|\overline{S}_{(\varphi)}\right|^{-}.$$

Обозначим:

$$c_{(0,\,1)}(\varphi) = 2,\ \ c_{(n,\,1)}(\varphi) = \prod_{m=1}^{n}\left(\varphi + 2\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$s_{(0,\,1)}(\varphi) = 0,\ s_{(1,\,1)}(\varphi) = 1,\ \ s_{(n,\,1)}(\varphi) = \prod_{m=1}^{n-1}\left(\varphi + 2\cos\frac{m}{n}\pi\right).$$

Тогда

$${}^{(\varphi,\,1)}l_i = \frac{2-\varphi x}{1-\varphi x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{(n,\,1)}(\varphi)x^n,$$

$${}^{(\varphi,\,1)}f_i = \frac{x}{1-\varphi x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} s_{(n,\,1)}(\varphi)x^n.$$

Так как при $\beta > 0$(напомним, что присутствие мнимой единицы мы допускаем только в корнях полиномов)

$$\left\langle x\sqrt{\beta}\right\rangle\left(\frac{2-\varphi\beta^{-\frac{1}{2}}x}{1-\varphi\beta^{-\frac{1}{2}}x+x^2}\right) = \frac{2-\varphi x}{1-\varphi x+\beta x^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}}\left\langle x\sqrt{\beta}\right\rangle\left(\frac{x}{1-\varphi\beta^{-\frac{1}{2}}x+x^2}\right) = \frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2},$$

то

$$^{(\varphi,\ \beta)}l_i = \frac{2-\varphi x}{1-\varphi x+\beta x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{(n,\ \beta)}(\varphi)\, x^n\,,$$

$$^{(\varphi,\ \beta)}f_i = \frac{x}{1-\varphi x+\beta x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} s_{(n,\ \beta)}(\varphi)\, x^n\,,$$

где

$$c_{(n,\ \beta)}(\varphi) = \prod_{m=1}^{n}\left(\varphi + 2\sqrt{\beta}\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$s_{(n,\ \beta)}(\varphi) = \prod_{m=1}^{n-1}\left(\varphi + 2\sqrt{\beta}\cos\frac{m}{n}\pi\right).$$

Таким образом,

$$^{(\varphi,\ \beta)}l_n = {}^{\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}},\ 1\right)}l_n \beta^{\frac{n}{2}}, \qquad {}^{(\varphi,\ \beta)}f_n = {}^{\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}},\ 1\right)}f_n \beta^{\frac{n-1}{2}},$$

или

$$c_{(n,\ \beta)}(\varphi) = \beta^{\frac{n}{2}} c_{(n,\ 1)}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}}\right), \quad s_{(n,\ \beta)}(\varphi) = \beta^{\frac{n-1}{2}} s_{(n,\ 1)}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}}\right).$$

Тогда, учитывая, что $c_{(n,\ 1)}(\varphi)$, $s_{(n,\ 1)}(\varphi)$, совпадают с полиномами Чебышева $C_n(\varphi)$, $S_{n-1}(\varphi)$ (см. раздел 2.2),

$$\frac{c_{(n,\ \beta)}(\varphi) + s_{(n,\ \beta)}(\varphi)\sqrt{\varphi^2-4\beta}}{2} =$$

$$= \beta^{\frac{n}{2}}\left(\frac{c_{(n,\ 1)}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}}\right) + s_{(n,\ 1)}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}}\right)\sqrt{\frac{\varphi^2}{\beta}-4}}{2}\right) =$$

$$= \beta^{\frac{n}{2}} \left( \frac{\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}} + \sqrt{\frac{\varphi^2}{\beta} - 4}}{2} \right)^n = \left( \frac{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\beta}}{2} \right)^n = \lambda^n;$$

$$\frac{(-1)^n c_{(n,\ \beta)}(\varphi) + (-1)^{n+1} s_{(n,\ \beta)} \sqrt{\varphi^2 - 4\beta}}{2} =$$

$$= \beta^{\frac{n}{2}} (-1)^n \left( \frac{\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}} + \sqrt{\frac{\varphi^2}{\beta} - 4}}{2} \right)^{-n} = (-\beta)^n \lambda^{-n}.$$

Таким образом, $\frac{{}^{(\varphi,\ \beta)}l_i}{2}$ и $\frac{{}^{(\varphi,\ \beta)}f_i \sqrt{\varphi^2 - 4\beta}}{2}$, $\varphi^2 \geq 4\beta$, являются соответственно $\left|\overline{S}_{(\varphi)}\right|^{+}$– составляющей и $\left|\overline{S}_{(\varphi)}\right|^{-}$– составляющей вектора $(1 - \lambda x)^{-1}$.

Воспользуемся мнимой единицей для вспомогательных вычислений. Если $-2 \leq \frac{\varphi}{\sqrt{\beta}} \leq 2$, то пусть $\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}} = 2\cos\alpha$, $\sqrt{\frac{\varphi^2}{\beta} - 4} = 2i\sin\alpha$. Тогда

$$\lambda^n = \beta^{\frac{n}{2}} e^{in\alpha} = \frac{{}^{(\varphi,\ \beta)}l_n}{2} + \frac{{}^{(\varphi,\ \beta)}f_n \sqrt{\beta}\, 2i\sin\alpha}{2} =$$
$$= \beta^{\frac{n}{2}} (\cos n\alpha + i\sin n\alpha),$$

$$\beta^n \lambda^{-n} = \beta^{\frac{n}{2}} e^{-in\alpha} = \frac{{}^{(\varphi,\ \beta)}l_n}{2} - \frac{{}^{(\varphi,\ \beta)}f_n \sqrt{\beta}\, 2i\sin\alpha}{2} =$$
$$= \beta^{\frac{n}{2}} (\cos n\alpha - i\sin n\alpha),$$

$${}^{(\varphi,\ \beta)}l_n = \beta^{\frac{n}{2}} 2\cos n\alpha, \quad {}^{(\varphi,\ \beta)}f_n = \beta^{\frac{n-1}{2}} \frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha}.$$

Если $\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}} \geq 2$, то пусть $\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}} = 2\operatorname{ch}\alpha$, $\sqrt{\frac{\varphi^2}{\beta} - 4} = 2\operatorname{sh}\alpha$. Тогда

$$\lambda^n = \beta^{\frac{n}{2}} e^{n\alpha} = \frac{{}^{(\varphi,\,\beta)}l_n}{2} + \frac{{}^{(\varphi,\,\beta)}f_n \sqrt{\beta}\, 2\operatorname{sh}\alpha}{2} =$$
$$= \beta^{\frac{n}{2}} \left(\operatorname{ch} n\alpha + \operatorname{sh} n\alpha\right),$$

$$\beta^n \lambda^{-n} = \beta^{\frac{n}{2}} e^{-n\alpha} = \frac{{}^{(\varphi,\,\beta)}l_n}{2} - \frac{{}^{(\varphi,\,\beta)}f_n \sqrt{\beta}\, 2\operatorname{sh}\alpha}{2} =$$
$$= \beta^{\frac{n}{2}} \left(\operatorname{ch} n\alpha - \operatorname{sh} n\alpha\right),$$

$${}^{(\varphi,\,\beta)}l_n = \beta^{\frac{n}{2}} 2\operatorname{ch} n\alpha, \quad {}^{(\varphi,\,\beta)}f_n = \beta^{\frac{n-1}{n}} \frac{\operatorname{sh} n\alpha}{\operatorname{sh}\alpha}.$$

Если $\sin\alpha = 0$, или $\operatorname{sh}\alpha = 0$, формула ${}^{(\varphi,\,\beta)}f_n = s_{(n,\,\beta)}(\varphi)$ остается применимой:

$$\beta = \frac{\varphi^2}{4}, \ \lambda = \frac{\varphi}{2}, \ \sqrt{\varphi^2 - 4\beta} = 0;$$

$${}^{\left(\varphi,\,\frac{\varphi^2}{4}\right)}l_i = 2\left(1 - \frac{\varphi}{2}x\right)^{-1}, \quad {}^{\left(\varphi,\,\frac{\varphi^2}{4}\right)}f_i = x\left(1 - \frac{\varphi}{2}x\right)^{-2};$$

$$c_{(n,\,\varphi^2/4)}(\varphi) = p_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \varphi^2 \sin^2 \frac{2m-1}{2n}\pi = \frac{\varphi^n}{2^{n-1}},$$

$$p_{2n} = 1, \quad p_{2n+1} = \varphi;$$

$$s_{(n,\,\varphi^2/4)}(\varphi) = r_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \varphi^2 \sin^2 \frac{m}{n}\pi = \frac{n\varphi^{n-1}}{2^{n-1}},$$

$$r_{2n} = \varphi, \quad r_{2n+1} = 1.$$

Пусть по-прежнему $\beta > 0$. Обозначим:

$$^{(\varphi,-\beta)}l_i = \frac{2-\varphi x}{1-\varphi x-\beta x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{(n,-\beta)}(\varphi)\, x^n \,,$$

$$^{(\varphi,-\beta)}f_i = \frac{x}{1-\varphi x-\beta x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} s_{(n,-\beta)}(\varphi)\, x^n \,,$$

где

$$c_{(n,-\beta)}(\varphi) = \prod_{m=1}^{n}\left(\varphi + 2i\sqrt{\beta}\cos\frac{2m-1}{2n}\pi\right),$$

$$s_{(n,-\beta)}(\varphi) = \prod_{m=1}^{n-1}\left(\varphi + 2i\sqrt{\beta}\cos\frac{m}{n}\pi\right).$$

Тогда

$$^{(\varphi,-\beta)}l_n = {}^{\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}},-1\right)}l_n \beta^{\frac{n}{2}}, \qquad ^{(\varphi,-\beta)}f_n = {}^{\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}},-1\right)}f_n \beta^{\frac{n-1}{2}},$$

или

$$c_{(n,-\beta)}(\varphi) = \beta^{\frac{n}{2}} c_{(n,-1)}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}}\right), \quad s_{(n,-\beta)}(\varphi) = \beta^{\frac{n-1}{2}} s_{(n,-1)}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}}\right);$$

$$\frac{c_{(n,-\beta)}(\varphi) + s_{(n,-\beta)}(\varphi)\sqrt{\varphi^2+4\beta}}{2} =$$

$$= \beta^{\frac{n}{2}}\left(\frac{c_{(n,-1)}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}}\right) + s_{(n,-1)}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}}\right)\sqrt{\frac{\varphi^2}{\beta}+4}}{2}\right) =$$

$$= \beta^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}} + \sqrt{\frac{\varphi^2}{\beta}+4}}{2}\right)^n = \left(\frac{\varphi + \sqrt{\varphi^2+4\beta}}{2}\right)^n = \lambda^n;$$

$$\frac{(-1)^n c_{(n,-\beta)}(\varphi)+(-1)^{n+1} s_{(n,-\beta)}\sqrt{\varphi^2+4\beta}}{2}=$$

$$=\beta^{\frac{n}{2}}\left(\frac{\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}}+\sqrt{\frac{\varphi^2}{\beta}+4}}{2}\right)^{-n}=\beta^n\lambda^{-n}.$$

Пусть $\frac{\varphi}{\sqrt{\beta}}=2\mathrm{sh}\,\alpha$, $\sqrt{\frac{\varphi^2}{\beta}+4}=2\mathrm{ch}\,\alpha$. Тогда

$$\lambda^n=\beta^{\frac{n}{2}}e^{n\alpha}=\frac{{}^{(\varphi,-\beta)}l_n}{2}+\frac{{}^{(\varphi,-\beta)}f_n\sqrt{\beta}\,2\mathrm{ch}\,\alpha}{2}=$$
$$=\beta^{\frac{n}{2}}\left(\mathrm{ch}n\alpha+\mathrm{sh}n\alpha\right),$$

$$\beta^n\lambda^{-n}=\beta^{\frac{n}{2}}e^{-n\alpha}=(-1)^n\frac{{}^{(\varphi,-\beta)}l_n}{2}+(-1)^{n+1}\frac{{}^{(\varphi,-\beta)}f_n\sqrt{\beta}\,2\mathrm{ch}\,\alpha}{2}=$$
$$=\beta^{\frac{n}{2}}\left(\mathrm{ch}n\alpha-\mathrm{sh}n\alpha\right),$$

$${}^{(\varphi,-\beta)}l_{2n}=\beta^n 2\mathrm{ch}2n\alpha,\qquad {}^{(\varphi,-\beta)}l_{2n+1}=\beta^{\frac{2n+1}{2}}2\mathrm{sh}(2n+1)\alpha,$$

$${}^{(\varphi,-\beta)}f_{2n}=\beta^{\frac{2n-1}{2}}\frac{\mathrm{sh}2n\alpha}{\mathrm{ch}\alpha},\qquad {}^{(\varphi,-\beta)}f_{2n+1}=\beta^n\frac{\mathrm{ch}(2n+1)\alpha}{\mathrm{ch}\alpha}.$$

Например, при $\varphi=0$, $\lambda=\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\varphi^2+4\beta}=2\sqrt{\beta}$:

$${}^{(0,-\beta)}l_i=\frac{2}{1-\beta x^2},\qquad {}^{(0,-\beta)}f_i=\frac{x}{1-\beta x^2},$$

$$c_{(n,-\beta)}(0)=p_n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}4\beta\cos^2\frac{2m-1}{2n}=p_n 2\beta^{\left[\frac{n}{2}\right]},$$

$$p_{2n} = 1,\ \ p_{2n+1} = 0;$$

$$s_{(n,-\beta)}(0) = r_n \prod_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} 4\beta \cos^2 \frac{m}{n}\pi = r_n \beta^{\left[\frac{n-1}{2}\right]},$$

$$r_{2n} = 0,\ \ r_{2n+1} = 1.$$

Отдельно выделим случай:

$$\beta = 0;\ \varphi > 0,\ \lambda = \varphi;\ \varphi < 0,\ \lambda = 0;\ \sqrt{\varphi^2 \pm 4\beta} = |\varphi|;$$

$$^{(\varphi,\ 0)}l_i = \frac{2 - \varphi x}{1 - \varphi x},\ \ ^{(\varphi,\ 0)}f_i = \frac{x}{1 - \varphi x},$$

$$c_{(0,\ 0)}(\varphi) = 2,\quad c_{(n,\ 0)}(\varphi) = \varphi^n,$$

$$s_{(0,\ 0)}(\varphi) = 0,\quad s_{(n,\ 0)}(\varphi) = \varphi^{n-1}.$$

В заключение предупредим одно возможное замечание. Может показаться, что наши подробные выкладки сводятся к элементарным равенствам:

$$\left(1 - e^{i\alpha}x\right)^{-1} = \frac{\left(1 - e^{-i\alpha}x\right)}{\left(1 - e^{i\alpha}x\right)\left(1 - e^{-i\alpha}x\right)} = \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} + \frac{ix\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2},$$

$$\left(1 - e^{-i\alpha}x\right)^{-1} = \frac{\left(1 - e^{i\alpha}x\right)}{\left(1 - e^{i\alpha}x\right)\left(1 - e^{-i\alpha}x\right)} = \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} - \frac{ix\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2};$$

$$\left(1 - e^{\alpha}x\right)^{-1} = \frac{\left(1 - e^{-\alpha}x\right)}{\left(1 - e^{\alpha}x\right)\left(1 - e^{-\alpha}x\right)} = \frac{1 - x\,\mathrm{ch}\,\alpha}{1 - 2x\,\mathrm{ch}\,\alpha + x^2} + \frac{x\,\mathrm{sh}\,\alpha}{1 - 2x\,\mathrm{ch}\,\alpha + x^2},$$

$$\left(1 - e^{-\alpha}x\right)^{-1} = \frac{\left(1 - e^{\alpha}x\right)}{\left(1 - e^{\alpha}x\right)\left(1 - e^{-\alpha}x\right)} = \frac{1 - x\,\mathrm{ch}\,\alpha}{1 - 2x\,\mathrm{ch}\,\alpha + x^2} - \frac{x\,\mathrm{sh}\,\alpha}{1 - 2x\,\mathrm{ch}\,\alpha + x^2};$$

$$\left(1-e^{\alpha}x\right)^{-1}=\frac{\left(1+e^{-\alpha}x\right)}{\left(1-e^{\alpha}x\right)\left(1+e^{-\alpha}x\right)}=\frac{1-x\operatorname{sh}\alpha}{1-2x\operatorname{sh}\alpha-x^{2}}+\frac{x\operatorname{ch}\alpha}{1-2x\operatorname{sh}\alpha-x^{2}},$$

$$\left(1-e^{-\alpha}x\right)^{-1}=\frac{\left(1+e^{\alpha}x\right)}{\left(1+e^{\alpha}x\right)\left(1-e^{-\alpha}x\right)}=\frac{1+x\operatorname{sh}\alpha}{1+2x\operatorname{sh}\alpha-x^{2}}+\frac{x\operatorname{ch}\alpha}{1+2x\operatorname{sh}\alpha-x^{2}},$$

$$\left(1+e^{\alpha}x\right)^{-1}=\frac{\left(1-e^{-\alpha}x\right)}{\left(1+e^{\alpha}x\right)\left(1-e^{-\alpha}x\right)}=\frac{1+x\operatorname{sh}\alpha}{1+2x\operatorname{sh}\alpha-x^{2}}-\frac{x\operatorname{ch}\alpha}{1+2x\operatorname{sh}\alpha-x^{2}},$$

$$\left(1+e^{-\alpha}x\right)^{-1}=\frac{\left(1-e^{\alpha}x\right)}{\left(1-e^{\alpha}x\right)\left(1+e^{-\alpha}x\right)}=\frac{1-x\operatorname{sh}\alpha}{1-2x\operatorname{sh}\alpha-x^{2}}-\frac{x\operatorname{ch}\alpha}{1-2x\operatorname{sh}\alpha-x^{2}}.$$

Но нашей целью является не получение равенств, а изучение алгебраического механизма, взаимодействие частей которого эти равенства обеспечивают. Что касается перечисленных равенств, то мы определили их основное место работы – механизм обобщенного преобразования Эйлера.

Отметим, что так как матрица преобразования $S_{(\varphi)}$ является трансформацией матрицы $\left[e^{\varphi x}\right]$:

$$S_{(\varphi)}=\left|e^{x}\right|^{-1}\left[e^{\varphi x}\right]\left|e^{x}\right|,$$

то операция

$$S_{(\varphi)}\left((1-\beta x)^{-1}\right)=(1-(\varphi+\beta)x)^{-1}$$

является трансформацией операции

$$e^{\varphi x}e^{\beta x}=e^{(\varphi+\beta)x}.$$

Но не следует придавать этому факту решающего значения. В данном случае трансформация вызывает синергетический эффект – будучи произведением матрицы умножения и матрицы степеней, а также транспонированной матрицей степеней, матрица $S_{(\varphi)}$ обладает свойствами, аналоги которых у матрицы $\left[e^{\varphi x}\right]$ отсутствуют.

Отметим также, что благодаря преобразованию «поворот», частным случаем которого является и обобщенное преобразование Эйлера, корень уравнения $x^{2}-\varphi x+\beta=0$,

$$\lambda = \frac{\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\beta}}{2},$$

воплощается в ряды

$${}_{(-1)}\left(1 - \varphi x + \beta x^2\right)^{-1} = \frac{1 + \varphi x + \left(\left(1 + \varphi x\right)^2 - 4\beta x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2},$$

$${}_{(-1)}\left(1 - \varphi x + \beta x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\varphi x + \left(\varphi^2 x^2 + 4\left(1 - \beta x^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}}{2}.$$

## 3.3. Трансформации

### 3.3.1

Единичную матрицу размерности $n \times n$ обозначим $I_n$. Матрицу, которая получается из $I_n$ перестановкой столбцов в обратном порядке обозначим $\breve{I}_n$. Например,

$$\breve{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица $AI_n$ состоит из $n$ первых столбцов матрицы $A$; матрица $A\breve{I}_n$ состоит из $n$ первых столбцов матрицы $A$, переставленных в обратном порядке; матрица $\breve{I}_n A$ состоит из $n$ первых строк матрицы $A$, переставленных в обратном порядке.

Обозначим:

$$\breve{I}_n \langle 1 + x \rangle \breve{I}_n = W_n.$$

Например:

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$m$-м столбцом матрицы $W_n$ является $x^m (1 + x)^{n-1-m}$, $m < n$.

$$W_n^{-1}=\acute{I}_n\langle x-1\rangle\acute{I}_n.$$

Например:

$$W_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix},\quad W_n^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\1&-1&1\end{pmatrix},\quad W_n^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-3&1&0&0\\3&-2&1&0\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}.$$

$m$ -м столбцом матрицы $W_n^{-1}$ является $x^m(1-x)^{n-1-m}$, $m<n$.

Изучая преобразование «поворот», мы выяснили, что

$$\{1+x\}_{0|1}=S_{(1)}=\left[\frac{1}{1-x}\right]\left\langle\frac{x}{1-x}\right\rangle,$$

$$\left\{(1-x)^{-1}\right\}_{0|-1}=S_{(-1)}=\left[\frac{1}{1+x}\right]\left\langle\frac{x}{1+x}\right\rangle.$$

Рассмотрим таблицы

$$\left\{1\,|\,(1-x)^{-1}\right\}_0=\qquad\qquad\left\{1-2x\,|\,(1-x)^{-1}\right\}_0=$$

$$=\left\{\frac{1}{1+x}\,\middle|\,1+x\right\}_1:\qquad\qquad=\left\{\frac{1-x}{(1+x)^2}\,\middle|\,1+x\right\}_1:$$

$$\begin{array}{r|cccccc}
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
5&1&5&15&35&70&\cdot\\
4&1&4&10&20&35&\cdot\\
3&1&3&6&10&15&\cdot\\
2&1&2&3&4&5&\cdot\\
1&1&1&1&1&1&\cdot\\
k=0&1&0&0&0&0&\cdot\\
-1&1&-1&0&0&0&\cdot\\
-2&1&-2&1&0&0&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{array},\qquad
\begin{array}{r|cccccc}
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\
5&1&3&5&5&0&\cdot\\
4&1&2&2&0&-5&\cdot\\
3&1&1&0&-2&-5&\cdot\\
2&1&0&-1&-2&-3&\cdot\\
1&1&-1&-1&-1&-1&\cdot\\
k=0&1&-2&0&0&0&\cdot\\
-1&1&-3&2&0&0&\cdot\\
-2&1&-4&5&-2&0&\cdot\\
\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot
\end{array};$$

$$\left\{1+x\,|\,(1-x)^{-1}\right\}_0=\qquad\qquad\left\{2-x\,|\,(1-x)^{-1}\right\}_0=$$

$$=\left\{\frac{1+2x}{(1+x)^2}\,\middle|\,1+x\right\}_1 : \qquad\qquad =\left\{\frac{2+x}{(1+x)^2}\,\middle|\,1+x\right\}_1 :$$

$$\begin{array}{r|cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & 1 & 6 & 20 & 50 & 105 & \cdot \\ 4 & 1 & 5 & 14 & 30 & 55 & \cdot \\ 3 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \cdot \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \cdot \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdot \\ k=0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \cdot \\ -2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}, \qquad \begin{array}{r|cccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 5 & 2 & 9 & 25 & 55 & 105 & \cdot \\ 4 & 2 & 7 & 16 & 30 & 50 & \cdot \\ 3 & 2 & 5 & 9 & 14 & 20 & \cdot \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdot \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ k=0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ -2 & 2 & -5 & 4 & -1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}.$$

$n$-й столбец верхней половины таблицы $\left\{1\,|\,(1-x)^{-1}\right\}_0$ совпадает с $(n+1)$-й строкой; $n$-й столбец верхней половины таблицы $\left\{1-2x\,|\,(1-x)^{-1}\right\}_0$, $n>0$, совпадает с $(n+1)$-й строкой, умноженной на $-1$; $n$-й столбец верхней половины таблицы $\left\{1+x\,|\,(1-x)^{-1}\right\}_0$, $n>0$, совпадает с $(n+1)$-й строкой таблицы $\left\{2-x\,|\,(1-x)^{-1}\right\}_0$.

Отметим,что

$$\langle 1-x\rangle(1)=1,$$

$$\langle 1-x\rangle(1-2x)=-(1-2x),$$

$$\langle 1-x\rangle(1+x)=2-x.$$

Пусть ${}^{(n)}a_i$ – полином степени $n$. Тогда:

$$S_{(-1)}\left(\frac{{}^{(n)}a_i}{(1-x)^{n+1}}\right)=\left[\frac{1}{1+x}\right]\left\langle\frac{x}{1+x}\right\rangle\left[\frac{1}{(1-x)^{n+1}}\right]\left({}^{(n)}a_i\right)=$$

$$=\left[(1+x)^n\right]\left\langle\frac{x}{1+x}\right\rangle\left({}^{(n)}a_i\right)=W_{n+1}\left({}^{(n)}a_i\right),$$

так как $n+1$ первых столбцов матрицы $\left[(1+x)^n\right]\left\langle\frac{x}{1+x}\right\rangle$ совпадают со столбцами матрицы $W_{n+1}$. Например,

$$\left[(1+x)^2\right]\left\langle\frac{x}{1+x}\right\rangle=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdot\\ 2 & 1 & 0 & \cdot\\ 1 & 1 & 1 & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix};$$

$$S_{(-1)}\left(\frac{\langle 1-x\rangle\left({}^{(n)}a_i\right)}{(1-x)^{n+1}}\right)=\left[(1+x)^n\right]\left\langle\frac{x}{1+x}\right\rangle\langle 1-x\rangle\left({}^{(n)}a_i\right)=$$

$$=\left[(1+x)^n\right]\left\langle\frac{1}{1+x}\right\rangle\left({}^{(n)}a_i\right)=\breve{I}_{n+1}W_{n+1}\left({}^{(n)}a_i\right),$$

так как $n+1$ первых столбцов матрицы $\left[(1+x)^n\right]\left\langle\frac{1}{1+x}\right\rangle$ совпадают со столбцами матрицы $\langle 1+x\rangle\breve{I}_{n+1}=\breve{I}_{n+1}W_{n+1}$. Например,

$$\left[(1+x)^2\right]\left\langle\frac{1}{1+x}\right\rangle=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdot\\ 2 & 1 & 0 & \cdot\\ 1 & 0 & 0 & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix}.$$

Таким образом, если

$$\left\{{}^{(n)}a_i \mid (1-x)^{-1}\right\}_0=\left\{\frac{{}^{(n)}b_i}{(1+x)^{n+1}}\ \middle|\ 1+x\right\}_1,$$

то

$$\left\{\langle 1-x\rangle\left({}^{(n)}a_i\right)\mid(1-x)^{-1}\right\}_0=\left\{\frac{\breve{I}_{n+1}\left({}^{(n)}b_i\right)}{(1+x)^{n+1}}\ \middle|\ 1+x\right\}_1.$$

Так как

$$\breve{I}_{m+1}\left((1+x)^m\right)=(1+x)^m,$$

то

$$I_{n+1}\left({}^{(n)}b_i\right)(1+x)^m = I_{n+1+m}\left({}^{(n)}b_i\,(1+x)^m\right).$$

Таким образом, $m$-й столбец верхней половины таблицы $\left\{{}^{(n)}a_i \mid (1-x)^{-1}\right\}_0$ , $m \geq n$, совпадает с $(m+1)$-й строкой таблицы $\left\{\langle 1-x\rangle\left({}^{(n)}a_i\right) \mid (1-x)^{-1}\right\}_0$, или $m$-й член вектора $\dfrac{{}^{(n)}a_i}{(1-x)^{p+1}}$, $m \geq n$, равен $p$-му члену вектора $\dfrac{\langle 1-x\rangle\left({}^{(n)}a_i\right)}{(1-x)^{m+1}}$, и наоборот: $p$-й член вектора $\dfrac{{}^{(n)}a_i}{(1-x)^{m+1}}$, $m \geq n$, равен $m$-му члену вектора $\dfrac{\langle 1-x\rangle\left({}^{(n)}a_i\right)}{(1-x)^{p+1}}$.

### 3.3.2

Последовательности столбцов матриц $[a_i]\langle a_i\rangle$ и $\left[a_i^{-1}\right]\left\langle a_i^{-1}\right\rangle$, $a_0 = 1$, $a_1 > 0$, совпадают с последовательностями строк верхней и нижней половин таблицы $\{a_i\}_0$. Формулы

$$\langle a_i - 1\rangle\langle 1+x\rangle = \langle a_i\rangle,$$

$$\langle a_i - 1\rangle\left\langle\frac{1}{1+x}\right\rangle = \left\langle a_i^{-1}\right\rangle,$$

позволяют изучать таблицу $\{a_i\}_0$, рассматривая в качестве ее элементов не строки, а столбцы.

$n$-ю строку матрицы $\langle a_i - 1\rangle$, $n > 0$, обозначим

$$x^{(n)}b_i = x\sum_{m=0}^{n-1} b_m x^m,$$

так что ${}^{(n)}b_i$ – полином степени $n-1$. Тогда $n$-я строка матрицы $\langle a_i\rangle$ имеет вид

$$\langle 1+x\rangle^*\left(x^{(n)}b_i\right) =$$

$$=\left[\frac{1}{1-x}\right]\left\langle\frac{x}{1-x}\right\rangle[x]\left({}^{(n)}b_i\right)=\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]\left\langle\frac{x}{1-x}\right\rangle\left({}^{(n)}b_i\right)=$$

$$=\left[\frac{x}{(1-x)^{n+1}}\right]\left[(1-x)^{n-1}\right]\left\langle\frac{x}{1-x}\right\rangle\left({}^{(n)}b_i\right)=\frac{x^{(n)}a_i}{(1-x)^{n+1}},$$

где

$${}^{(n)}a_i=W_n^{-1}\left({}^{(n)}b_i\right),$$

так как $n$ первых столбцов матрицы $\left[(1-x)^{n-1}\right]\left\langle\frac{x}{1-x}\right\rangle$ совпадают со столбцами матрицы $W_n^{-1}=\acute{I}_n\langle x-1\rangle\acute{I}_n$. Например,

$$\left[(1-x)^2\right]\left\langle\frac{x}{1-x}\right\rangle=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdot\\-2&1&0&\cdot\\1&-1&1&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}.$$

Так как

$$\left\langle\frac{1}{1+x}\right\rangle^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\cdot\\1&-1&1&-1&\cdot\\1&-2&3&-4&\cdot\\1&-3&6&-10&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},$$

то $n$-я строка матрицы $\left\langle a_i^{-1}\right\rangle$, $n>0$, имеет вид

$$\left\langle\frac{1}{1+x}\right\rangle^*\left(x^{(n)}b_i\right)=\left[\frac{-x}{(1-x)^2}\right]\left\langle\frac{-1}{1-x}\right\rangle\left({}^{(n)}b_i\right)=$$

$$=\left[\frac{-x}{(1-x)^{n+1}}\right]\left[(1-x)^{n-1}\right]\left\langle\frac{-1}{1-x}\right\rangle\left({}^{(n)}b_i\right)=\frac{x^{(n)}a_i^{-1}}{(1-x)^{n+1}},$$

где

$${}^{(n)}a_i^{-1}=(-1)^n\acute{I}_nW_n^{-1}\left({}^{(n)}b_i\right),$$

так как $n$ первых столбцов матрицы $-\left[(1-x)^{n-1}\right]\left\langle\dfrac{-1}{1-x}\right\rangle$ совпадают со столбцами матрицы $(-1)^n \acute{I}_n W_n^{-1} = (-1)^n \langle x-1\rangle \acute{I}_n$. Например,

$$-[1-x]\left\langle\frac{-1}{1-x}\right\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot \\ . & . & . \end{pmatrix},$$

$$-\left[(1-x)^2\right]\left\langle\frac{-1}{1-x}\right\rangle = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & \cdot \\ 2 & -1 & 0 & \cdot \\ -1 & 0 & 0 & \cdot \\ . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $n$-я строка матрицы $[a_i]\langle a_i\rangle$, $n>0$, имеет вид $\dfrac{{}^{(n)}a_i}{(1-x)^{n+1}}$, где ${}^{(n)}a_i$ – полином степени $<n$; $n$-я строка матрицы $\left[a_i^{-1}\right]\left\langle a_i^{-1}\right\rangle$, $n>0$, имеет вид $\dfrac{{}^{(n)}a_i^{-1}}{(1-x)^{n+1}}$, где ${}^{(n)}a_i^{-1}$ – полином степени $<n$; и, что самое интересное,

$${}^{(n)}a_i^{-1} = (-1)^n \acute{I}_n\left({}^{(n)}a_i\right).$$

Например, если $a_i = 1+x$, то ${}^{(n)}b_i = x^{n-1}$, ${}^{(n)}a_i = x^{n-1}$, ${}^{(n)}a_i^{-1} = (-1)^n$.

Пусть $a_i = 1+\varphi x+\beta x^2$. Тогда

$$\langle a_i - 1\rangle = \langle x(\varphi+\beta x)\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & \varphi & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & \beta & \varphi^2 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 2\varphi\beta & \varphi^3 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & \beta^2 & 3\varphi^2\beta & \varphi^4 & \cdot \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Преобразование $\acute{I}_{n+1}$ $n$-ю строку матрицы $\langle x(\varphi+\beta x)\rangle$, т.е. $x^{(n)}b_i$, отображает на $n$-ю строку матрицы

$$\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x^2}{1-\varphi x}\right\rangle\langle\beta x\rangle=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdot\\ \varphi & 0 & 0 & \cdot\\ \varphi^2 & \beta & 0 & \cdot\\ \varphi^3 & 2\varphi\beta & 0 & \cdot\\ \varphi^4 & 3\varphi^2\beta & \beta^2 & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix},$$

т.е., при $\beta\neq 0$, на полином (см. раздел 2.3)

$$r_n\beta^{\left[\frac{n}{2}\right]}\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\frac{\varphi^2}{4\beta}\sec^2\frac{m}{n+1}\pi\right),\; r_{2n}=1,\; r_{2n+1}=(n+1)\varphi.$$

Следовательно,

$$ {}^{(n)}a_i^{-1}=(-1)^n\langle x-1\rangle I_n\left({}^{(n)}b_i\right)=$$

$$=(-1)^n r_n\beta^{\left[\frac{n}{2}\right]}\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\frac{\frac{\varphi^2}{4}-\beta\cos^2\frac{m}{n+1}\pi}{\beta\cos^2\frac{m}{n+1}\pi}\right),$$

$$ {}^{(n)}a_i=q_n2^n\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\frac{\varphi^2}{4}-\beta\cos^2\frac{m}{n+1}\pi\right)\times$$

$$\times x^{n-1-\left[\frac{n}{2}\right]}\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(x+\frac{\beta\cos^2\frac{m}{n+1}\pi}{\frac{\varphi^2}{4}-\beta\cos^2\frac{m}{n+1}\pi}\right),$$

где $q_{2n}=1$, $q_{2n+1}=\dfrac{\varphi}{2}$; если один из сомножителей множителя $\prod_{m=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\left(\dfrac{\varphi^2}{4}-\beta\cos\dfrac{m}{n+1}\pi\right)$ равен нулю, он заменяется на $\beta\cos^2\dfrac{m}{n+1}\pi$, соответствующий ему полином заменяется на $1$.

$n$-ю строку матрицы $\left[{}_{(k)}a_i\right]\left\langle {}_{(k)}a_i\right\rangle$, где ${}_{(k)}a_i=\left\langle x\left({}_{(k)}a_i\right)^k\right\rangle(a_i)$, обозначим $\dfrac{{}^{(n)}_{(k)}a_i}{(1-x)^{n+1}}$, ${}^{(n)}_{(0)}a_i={}^{(n)}a_i$. Найдем преобразование $A_n$, такое, что

$$A_n\left({}^{(n)}_{(k)}a_i\right)={}^{(n)}_{(k+1)}a_i.$$

Диагональную матрицу, диагональные элементы которой равны значениям вектора $(1-x)^{-2}$ обозначим $|2|$:

$$|2|=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdot\\0&2&0&\cdot\\0&0&3&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},\quad |2|^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdot\\0&\frac{1}{2}&0&\cdot\\0&0&\frac{1}{3}&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix},$$

$$|2|=D[x],\qquad |2|^{-1}=[x]^*D^{-1},$$

$$D=|2|[x]^*,\qquad D^{-1}=[x]|2|^{-1}.$$

Мы знаем, что элементы матриц $\left\langle {}_{(1)}a_i\right\rangle$ и $\left\langle a_i\right\rangle$ связаны равенством

$$\left({}_{(1)}a_i\right)_0^0=1,\quad \left({}_{(1)}a_i\right)_n^m=\frac{m}{m+n}a_n^{m+n},$$

где верхний индекс – номер столбца, нижний индекс – номер строки. Следовательно, если $n$-я строка матрицы $[a_i]\langle a_i\rangle$ имеет вид $\sum\limits_{m=0}^{\infty}b_mx^m$, то $n$-я строка матрицы $\left[{}_{(1)}a_i\right]\left\langle {}_{(1)}a_i\right\rangle$ имеет вид $\sum\limits_{m=0}^{\infty}\dfrac{m+1}{m+1+n}b_{m+n}x^m$.

Преобразование $\left[(1-x)^{-n-1}\right]$ отображает ${}^{(n)}a_i$ на $\dfrac{{}^{(n)}a_i}{(1-x)^{n+1}}$; преобразование $|2|\left[x^n\right]^*|2|^{-1}$,

$$|2|\left[x^n\right]^*|2|^{-1}\left(\sum_{m=0}^{\infty}b_m x^m\right)=|2|\left[x^n\right]^*\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}b_m x^m\right)=$$

$$=|2|\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1+n}b_{m+n}x^m\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{m+1}{m+1+n}b_{m+n}x^m,$$

отображает $\dfrac{{}^{(n)}a_i}{(1-x)^{n+1}}$ на $n$-ю строку матрицы $\left[{}_{(1)}a_i\right]\left\langle{}_{(1)}a_i\right\rangle$, т.е. на $\dfrac{{}^{(n)}_{(1)}a_i}{(1-x)^{n+1}}$. Таким образом,

$${}^{(n)}_{(1)}a_i=\left[(1-x)^{n+1}\right]|2|\left[x^n\right]^*|2|^{-1}\left[(1-x)^{-n-1}\right]\left({}^{(n)}a_i\right),$$

$$A_n=\left[(1-x)^{n+1}\right]|2|\left[x^n\right]^*|2|^{-1}\left[(1-x)^{-n-1}\right]I_n.$$

Так как

$$D[x][a_i]\langle xa_i\rangle=D\langle xa_i\rangle[x]=\left[(xa_i)'\right]\langle xa_i\rangle D[x],$$

то

$$|2|[a_i]\langle xa_i\rangle=\left[(xa_i)'\right]\langle xa_i\rangle|2|.$$

Применительно к $S_{(1)}=\left[\dfrac{1}{1-x}\right]\left\langle\dfrac{x}{1-x}\right\rangle$:

$$|2|S_{(1)}=\left[(1-x)^{-1}\right]S_{(1)}|2|,$$

$$[1-x]|2|=S_{(1)}|2|S_{(-1)},$$

$$|2|^{-1}\left[(1-x)^{-1}\right]=S_{(1)}|2|^{-1}S_{(-1)}.$$

Так как

$$\langle 1+x\rangle\left[x^n\right]\langle x-1\rangle=\left[(1+x)^n\right],$$

то

$$S_{(-1)}\left[x^n\right]^*S_{(1)}=\left[(1+x)^n\right]^*.$$

Окончательно получаем:

$$A_n = \left[(1-x)^n\right] S_{(1)} \left|2\right| \left[(1+x)^n\right]^* \left|2\right|^{-1} S_{(-1)} \left[(1-x)^{-n}\right] I_n =$$

$$= W_n^{-1} \left|2\right| \left[(1+x)^n\right]^* \left|2\right|^{-1} W_n,$$

так как $n$ первых столбцов матрицы $S_{(-1)}\left[(1-x)^{-n}\right] = \left[(1+x)^n\right] S_{(-1)}$ совпадают со столбцами матрицы $W_n = \acute{I}_n \left\langle 1+x \right\rangle \acute{I}_n$. Например,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & \frac{5}{2} & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 7 & 3 & 1 \\ -28 & -\frac{35}{3} & -\frac{10}{3} & 0 \\ 20 & \frac{22}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ -5 & -\frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть $c_i = \langle -x \rangle \left( a_i^{-1} \right)$. Тогда ${}_{(1)}c_i = \langle -x \rangle \left( \left( {}_{(-1)}a_i \right)^{-1} \right)$. Так как $n$-я строка матрицы $[c_i]\langle c_i \rangle$ имеет вид $\dfrac{\not{I}_n\left( {}^{(n)}a_i \right)}{(1-x)^{n+1}}$, $n$-я строка матрицы $\left[{}_{(1)}c_i\right]\left\langle {}_{(1)}c_i \right\rangle$ имеет вид $\dfrac{\not{I}_n\left( {}^{(n)}_{(-1)}a_i \right)}{(1-x)^{n+1}}$, то

$$A_n\left( {}^{(n)}_{(-1)}a_i \right) = {}^{(n)}a_i,$$

$$A_n\not{I}_n\left( {}^{(n)}a_i \right) = \not{I}_n\left( {}^{(n)}_{(-1)}a_i \right).$$

Т.е. преобразование $A_n\not{I}_n$ является отражением, и

$$A_n^{-1} = \not{I}_n A_n \not{I}_n.$$

Таким образом, $A_n^{-1}$ получается из $A_n$ перестановкой в обратном порядке строк и столбцов:

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad A_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -2 & -6 \\ 1 & \frac{5}{2} & 5 \end{pmatrix},\quad A_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & -5 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{22}{3} & 20 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{35}{3} & -28 \\ 1 & 3 & 7 & 14 \end{pmatrix}.$$

Так как $A_n$ – определенная модификация невырожденной матрицы умножения, естественным образом определяется ее степень:

$$A_n^{\beta} = W_n^{-1}|2|\left[(1+x)^{\beta n}\right]^{*}|2|^{-1}W_n.$$

Например,

$$A_2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\quad A_3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 21 & 7 & 1 \\ -18 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 6 & 2 & -18 \\ 1 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

$n$-ю строку матрицы $\left\langle {}_{(k)}a_i - 1 \right\rangle$ обозначим $x\,{}^{(n)}_{(k)}b_i$. Тогда

$$W_n\left({}^{(n)}a_i\right) = {}^{(n)}b_i,$$

$$|2|\left[(1+x)^{kn}\right]^* |2|^{-1}\left({}^{(n)}b_i\right) = {}^{(n)}_{(k)}b_i,$$

$$W_n^{-1}\left({}^{(n)}_{(k)}b_i\right) = {}^{(n)}_{(k)}a_i\,.$$

**3.3.3**

Структура преобразования $A_n$ станет более прозрачной, если воспользоваться биномиальной формой записи.

Для формулы общего члена последовательности введем обозначение

$$\left| \, a_i \, \right|_{\mathrm{x}} = f(\mathrm{x}) = a_{\mathrm{x}}, \quad \mathrm{x} = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Если $\dfrac{x\;{}^{(n)}a_i}{(1-x)^{n+1}}$ – $n$-я строка матрицы $\langle a_i \rangle$, $n > 0$, $\dfrac{x}{n!}\prod\limits_{i=1}^{n-1}\left(x + \alpha_{(n,\ i)}\right)$ – $n$-я строка матрицы $\langle \log a_i \rangle \left| e^x \right|$, $n > 1$, то

$$\left| \frac{x\;{}^{(n)}a_i}{(1-x)^{n+1}} \right|_{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\mathrm{x} + \alpha_{(n,\ i)}\right),$$

$$\left| \frac{x\acute{I}_n\left({}^{(n)}a_i\right)}{(1-x)^{n+1}} \right|_{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\mathrm{x} - \alpha_{(n,\ i)}\right).$$

Рассмотрим выражение

$$\left| \frac{x^m}{(1-x)^4} \right|_{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{x}}{3!}\left(\mathrm{x} + \alpha_{(3,\ 1)}\right)\left(\mathrm{x} + \alpha_{(3,\ 2)}\right), \quad m = 1,\ 2,\ 3\,.$$

Так как

$$\acute{I}_3(1) = x^2, \quad \acute{I}_3(x) = x, \quad \acute{I}_3\left(x^2\right) = 1,$$

то

$\left|\frac{x}{(1-x)^4}\right|_{\mathrm{x}}$ должно равняться нулю при подстановках $\mathrm{x} = 0, -1, -2,$

$\left|\frac{x^2}{(1-x)^4}\right|_{\mathrm{x}}$ должно равняться нулю при подстановках $\mathrm{x} = 1,\ 0, -1,$

$\left|\frac{x^3}{(1-x)^4}\right|_{\mathrm{x}}$ должно равняться нулю при подстановках $\mathrm{x} = 2,\ 1,\ 0.$

Следовательно,

$$\left|\frac{x}{(1-x)^4}\right|_{\mathrm{x}} = \frac{1}{3!}\mathrm{x}(\mathrm{x}+1)(\mathrm{x}+2),$$

$$\left|\frac{x^2}{(1-x)^4}\right|_{\mathrm{x}} = \frac{1}{3!}(\mathrm{x}-1)\mathrm{x}(\mathrm{x}+1),$$

$$\left|\frac{x^3}{(1-x)^4}\right|_{\mathrm{x}} = \frac{1}{3!}(\mathrm{x}-2)(\mathrm{x}-1)\mathrm{x}.$$

Обобщая, выводим:

$$\left|\frac{x^{m+1}}{(1-x)^{n+1}}\right|_{\mathrm{x}} = \frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(\mathrm{x}-m+i), \quad m<n.$$

Матрицу, $m$-м столбцом которой является полином

$$[x]^*\left(\frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(x-m+i)\right) = [x]^*\langle x-m\rangle\left(\frac{1}{n!}\prod_{i=0}^{n-1}(x+i)\right),$$

$m<n$, обозначим $U_n$. Например:

$$U_2 = \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, U_3 = \frac{1}{3!}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ U_4 = \frac{1}{4!}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & -6 \\ 11 & -1 & -1 & 11 \\ 6 & 2 & -2 & -6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

По определению преобразования $U_n$, если

$$U_n\left({}^{(n)}a_i\right) = \sum_{m=0}^{n-1} b_m x^m,$$

то

$$\left| \frac{x\ {}^{(n)}a_i}{(1-x)^{n+1}} \right|_{\text{x}} = \text{x} \sum_{m=0}^{n-1} b_m \text{x}^m,$$

так как

$$\left| \frac{x\ {}^{(n)}a_i}{(1-x)^{n+1}} \right|_{\text{x}} = \sum_{m=0}^{n-1} c_m \left| \frac{x^{m+1}}{(1-x)^{n+1}} \right|_{\text{x}},$$

где

$${}^{(n)}a_i = \sum_{m=0}^{n-1} c_m x^m.$$

Таким образом, преобразование $U_n$ отображает ${}^{(n)}a_i \neq {}^{(n-m)}a_i(1-x)^m$ на $n$-ю строку матрицы $\langle \log a_i \rangle \left| e^x \right|$, умноженную на $[x]^*$. Так как

$$\left| \frac{x\ {}^{(n-m)}a_i(1-x)^m}{(1-x)^{n+1}} \right|_{\text{x}} = \left| \frac{x\ {}^{(n-m)}a_i}{(1-x)^{n-m+1}} \right|_{\text{x}},$$

то

$$U_n\left({}^{(n-m)}a_i(1-x)^m\right) = U_{n-m}\left({}^{(n-m)}a_i\right),$$

$$U_n\left[(1-x)^m\right] I_{n-m} = U_{n-m}.$$

Если $c_i = \langle -x \rangle \left(a_i^{-1}\right)$, то $\langle \log c_i \rangle = \langle -x \rangle \langle \log a_i \rangle \langle -x \rangle$. Так как $n$-я строка матрицы $\left[c_i\right]\left\langle c_i\right\rangle$ имеет вид $\dfrac{\acute{I}_n\left({}^{(n)}a_i\right)}{(1-x)^{n+1}}$, то

$$U_n\,\acute{I}_n=(-1)^{n+1}\langle -x\rangle U_n.$$

$n$-ю строку матрицы $\left\langle e^x\right\rangle$, $n>0$, в порядке исключения выделив множитель, обозначим $\dfrac{x^{\,(n)}e^x}{n!(1-x)^{n+1}}$, где $x^{(n)}e^x$ совпадает с полиномом Эйлера $A_n\left(x\right)$ [4, с.254], [5, с.139]:

$$x^{(n)}e^x=(1-x)^{n+1}\sum_{m=0}^{\infty}m^n x^m$$

$${}^{(1)}e^x=1,\quad {}^{(2)}e^x=1+x,\quad {}^{(3)}e^x=1+4x+x^2,$$

$${}^{(4)}e^x=1+11x+11x^2+x^3,\quad \ldots$$

Так как

$$\left|\frac{x^{\,(n)}e^x}{n!(1-x)^{n+1}}\right|_{\mathrm{x}}=\frac{\mathrm{x}^n}{n!},$$

то

$$U_n\left({}^{(n-m)}e^x\left(1-x\right)^m\right)=x^{n-m-1},\quad m<n.$$

Таким образом, $m$-м столбцом матрицы $U_n^{-1}$ является вектор ${}^{(m+1)}e^x\left(1-x\right)^{n-m-1}$:

$$U_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},\quad U_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\-2&0&4\\1&-1&1\end{pmatrix},\quad U_4^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\-3&-1&3&11\\3&-1&-3&11\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}.$$

Мы знаем, что если $n$-я строка матрицы $\left\langle\log a_i\right\rangle\left|e^x\right|$ имеет вид $\dfrac{\beta x}{n!}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\beta x+\alpha_{(n,\ i)}\right)$, где $\beta=a_1>0$, то $n$-я строка матрицы

$\left\langle \log_{(1)} a_i \right\rangle \left| e^x \right|$ имеет вид $\dfrac{\beta x}{n!} \prod_{i=1}^{n-1} \left( \beta x + \beta n + \alpha_{(n,\ i)} \right)$. Окончательно получаем:

$$A_n = U_n^{-1} \langle x + n \rangle U_n .$$

Таким образом, равенство $A_n^{-1} = \tilde{I}_n A_n \tilde{I}_n$ вытекает также из равенств:

$$\langle x + n \rangle^{-1} = \langle -x \rangle \langle x + n \rangle \langle -x \rangle,$$

$$U_n^{-1} \langle -x \rangle U_n = (-1)^{n+1} \tilde{I}_n .$$

Обозначим:

$$A_n^{\beta} = U_n^{-1} \langle x + \beta n \rangle U_n ,$$

$$\log A_n = U_n^{-1} n D U_n .$$

Так как

$$\langle x + \beta n \rangle = \left| e^x \right| \left[ e^{\beta n x} \right]^* \left| e^x \right|^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\beta n D)^m}{m!},$$

то

$$A_n^{\beta} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\beta^m}{m!} (\log A_n)^m .$$

Например:

$$A_2^{\beta} = I_2 + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_3^{\beta} = I_3 + \beta \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -6 & 0 & 6 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} + \frac{\beta^2}{2!} 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_4^{\beta} = I_4 + \beta \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 13 & 3 & -1 & 1 \\ -18 & 4 & 8 & -6 \\ 6 & -8 & -4 & 18 \\ -1 & 1 & -3 & -13 \end{pmatrix} + \frac{\beta^2}{2!} \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 & -3 \\ -21 & -9 & 3 & 15 \\ 15 & 3 & -9 & -21 \\ -3 & 1 & 5 & 9 \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{\beta^3}{3!}16\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как каждый столбец матрицы $U_n^{-1}$, кроме последнего, содержит множитель $1-x$, то каждый столбец матрицы $(\log A_n)^m,\ m>0$, также содержит множитель $1-x$ и сумма его членов равна нулю. Следовательно, сумма членов каждого столбца матрицы $A_n^\beta$ равна единице.

Таким образом, преобразование $A_n^\beta$ сохраняет сумму значений вектора.

$n$-ю строку матрицы $\left\langle \left( {}_{(k)}a_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \right\rangle,\ n>0$, обозначим $\dfrac{x^{(n)}\left( {}_{(k)}a_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}}{(1-x)^{n+1}}$.

Тогда

$$A_n^{k\beta}\left( {}^{(n)}a_i \right) = {}^{(n)}\left( {}_{(k)}a_i^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Так как

$$U_n\left[ (1-x)^m \right] I_{n-m} = U_{n-m},$$

$$\left[ (1-x)^{-m} \right] U_n^{-1} I_{n-m} = U_{n-m}^{-1},$$

то

$$\left[ (1-x)^{-m} \right] A_n^\beta \left[ (1-x)^m \right] I_{n-m} = A_{n-m}^{\frac{\beta n}{n-m}}.$$

**3.3.4**

Обозначим:

$$\frac{1-x^m}{1-x} = \sum_{n=0}^{m-1} x^n = \varepsilon_{(m)}.$$

Диагональную матрицу, диагональные элементы которой равны значениям вектора $\left(1-x^m\right)^{-1}$, обозначим $\left|x^m\right|$:

$$\left|x^m\right|(a_i) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^{nm}.$$

Вектор $\dfrac{{}^{(n)}a_i}{(1-x)^{n+1}}$ раскладывается на составляющие по правилу

$$\frac{{}^{(n)}a_i}{(1-x)^{n+1}} = \frac{{}^{(n)}a_i\varepsilon_{(m)}^{n+1}}{\left(1-x^m\right)^{n+1}} = \sum_{p=0}^{m-1}\frac{x^p b_{(m,\ p)}}{\left(1-x^m\right)^{n+1}}\ ,$$

где

$$b_{(m,\ p)} = \left|x^m\right|\left[x^p\right]^*\left({}^{(n)}a_i\varepsilon_{(m)}^{n+1}\right),$$

$$\left[x^p\right]^*(a_i) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+p}x^n.$$

Например,

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{\varepsilon_{(2)}^3}{\left(1-x^2\right)^3} = \frac{1+3x^2}{\left(1-x^2\right)^3} + \frac{x\left(3+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

$n$-ю строку матрицы $\left[a_i^m\right]\left\langle a_i^m\right\rangle$ обозначим $\dfrac{{}^{(n)}a_i^m}{(1-x)^{n+1}}$. Так как $i$-й член вектора $\dfrac{{}^{(n)}a_i^m}{(1-x)^{n+1}}$ равен $(mi+m-1)$-му члену вектора $\dfrac{{}^{(n)}a_i}{(1-x)^{n+1}}$, т.е.

$$\left\langle x^m\right\rangle\left(\frac{{}^{(n)}a_i^m}{(1-x)^{n+1}}\right) = \frac{b_{(m,\ m-1)}}{\left(1-x^m\right)^{n+1}},$$

где

$$\left\langle x^m\right\rangle(a_i) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{nm}\ ,$$

то

$${}^{(n)}a_i^m = \left\langle x^m\right\rangle^*\left(b_{(m,\ m-1)}\right) = \left\langle x^m\right\rangle^*\left|x^m\right|\left[x^{m-1}\right]^*\left({}^{(n)}a_i\varepsilon_{(m)}^{n+1}\right),$$

где

$$\left\langle x^m\right\rangle^*(a_i) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{nm}x^n.$$

Обозначим:

$$E_{(n,\ m)} = \left\langle x^m \right\rangle^* \left| x^m \right| \left[ x^{m-1} \right]^* \left[ \varepsilon_{(m)}^{n+1} \right] I_n.$$

Например,

$$E_{(2,\ 2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & 3 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что $E_{(n,\ m)}$ – квадратная матрица размерности $n \times n$:

$$\varepsilon_{(2)}^2 = (1,\ 2,\ 1),$$
$$\varepsilon_{(2)}^3 = (1,\ 3,\ 3,\ 1),$$
$$\varepsilon_{(2)}^4 = (1,\ 4,\ 6,\ 4,\ 1).$$

$$E_{(1,\ 2)} = (2), \quad E_{(2,\ 2)} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad E_{(3,\ 2)} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon_{(3)}^2 = (1,\ 2,\ 3,\ 2,\ 1),$$
$$\varepsilon_{(3)}^3 = (1,\ 3,\ 6,\ 7,\ 6,\ 3,\ 1),$$
$$\varepsilon_{(3)}^4 = (1,\ 4,\ 10,\ 16,\ 19,\ 16,\ 10,\ 4,\ 1).$$

$$E_{(1,\ 3)} = (3), \quad E_{(2,\ 3)} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad E_{(3,\ 3)} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 1 \\ 16 & 19 & 16 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon_{(4)}^2 = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1),$$
$$\varepsilon_{(4)}^3 = (1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 12,\ 12,\ 10,\ 6,\ 3,\ 1),$$
$$\varepsilon_{(4)}^4 = (1,4,10,20,31,40,44,40,31,20,10,4,1).$$

$$E_{(1,\ 4)} = (4), \quad E_{(2,\ 4)} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad E_{(3,\ 4)} = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 4 \\ 40 & 44 & 40 \\ 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

$$\varepsilon_{(2)}^{5} = (1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1),$$
$$\varepsilon_{(3)}^{5} = (1,\ 5,\ 15,\ 30,\ 45,\ 51,\ 45,\ 30,\ 15,\ 5,\ 1).$$

$$E_{(4,\ 2)} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 10 & 5 & 1 \\ 1 & 5 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad E_{(4,\ 3)} = \begin{pmatrix} 15 & 5 & 1 & 0 \\ 51 & 45 & 30 & 15 \\ 15 & 30 & 45 & 51 \\ 0 & 1 & 5 & 15 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $E_{(n,\ m)}$ можно также представить следующим образом. Матрицу, $i$-я строка которой совпадает с $(mi + m - 1)$-й строкой матрицы $[a_i]$, обозначим $E_{(m)}$. Например:

$$E_{(2)} = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdot \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdot \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad E_{(3)} = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdot \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdot \\ a_8 & a_7 & a_6 & a_5 & \cdot \\ a_{11} & a_{10} & a_9 & a_8 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Матрица $E_{(n,\ m)}$ образована пересечением $n$ первых строк и $n$ первых столбцов матрицы $E_{(m)}$ при подстановке $a_i = \varepsilon_{(m)}^{n+1}$.

Преобразование $E_{(n,\ m)}$ отображает ${}^{(n)}a_i$ на ${}^{(n)}a_i^m$. Отсюда вытекает, что, во-первых,

$$E_{(n,\ m)} \acute{I}_n = \acute{I}_n E_{(n,\ m)},$$

во-вторых,

$$E_{(n,\ m)} = U_n^{-1} m \langle mx \rangle U_n,$$

так как преобразование $\langle mx \rangle$ отображает $n$-ю строку матрицы $\langle \log a_i \rangle |e^x|$ на $n$-ю строку матрицы $\langle \log a_i^m \rangle |e^x|$.

Таким образом, ${}^{(n)}e^x(1-x)^p$ является собственным вектором преобразования $E_{(n+p,\ m)}$ с собственным значением $m^n$.

Рассмотрим равенство

$$\varepsilon_{(m)}^{n+1}\left(1-x^m\right)^{-1}=\varepsilon_{(m)}^{n}\left(1-x\right)^{-1}.$$

Каждый член вектора $\varepsilon_{(m)}^{n}\left(1-x\right)^{-1}$, начиная с $n(m-1)$-го, равен сумме членов вектора $\varepsilon_{(m)}^{n}$, т.е. $m^n$. Следовательно, сумма членов вектора $\left[x^p\right]\left|x^m\right|\left[x^p\right]^*\left(\varepsilon_{(m)}^{n+1}\right),\ p<m$, также равна $m^n$.

Таким образом, сумма членов каждого столбца матрицы $E_{(n,\ m)}$ равна $m^n$ и на эту величину преобразование $E_{(n,\ m)}$ умножает сумму значений вектора.

Отметим также, что

$$E_{(n,\ m)}E_{(n,\ p)}=E_{(n,\ mp)},$$

$$\left[(1-x)^{-p}\right]E_{(n,\ m)}\left[(1-x)^{p}\right]I_{n-p}=E_{(n-p,\ m)}.$$

$n$-ю строку матрицы $\left\langle a_i^m-1\right\rangle$ обозначим $x^{(n)}b_i^m$. Так как

$$\left\langle a_i-1\right\rangle\left\langle(1+x)^m-1\right\rangle=\left\langle a_i^m-1\right\rangle,$$

то

$$W_n^{-1}[x]^*\left\langle(1+x)^m-1\right\rangle^*[x]W_n\left({}^{(n)}a_i\right)=$$

$$=W_n^{-1}[x]^*\left\langle(1+x)^m-1\right\rangle^*\left(x^{(n)}b_i\right)=$$

$$=W_n^{-1}[x]^*\left(x^{(n)}b_i^m\right)={}^{(n)}a_i^m;$$

$$E_{(n,\ m)}=W_n^{-1}[x]^*\left\langle(1+x)^m-1\right\rangle^*[x]W_n.$$

$n$-ю строку матрицы $\left\langle a_i^{-1}-1\right\rangle$ обозначим $x^{(n)}b_i^{-1}$, так что

$$[x]^*\left\langle (1+x)^{-1}-1\right\rangle^*[x]\left({}^{(n)}b_i\right)={}^{(n)}b_i^{-1}.$$

Если $c_i=\langle -x\rangle\left(a_i^{-1}\right)$, то $n$-я строка матрицы $\langle c_i-1\rangle$ совпадает с $(-1)^n x^{(n)}b_i^{-1}$, $n$-я строка матрицы $[c_i]\langle c_i\rangle$ совпадает с $\dfrac{\acute{I}_n\left({}^{(n)}a_i\right)}{(1-x)^{n+1}}$. Так как

$$[x]^*\left\langle (1+x)^{-1}-1\right\rangle^*[x]=-\langle -(1+x)\rangle=-\bar{S}^*_{(-1)}:$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & \cdot \\ 0 & 1 & -2 & 3 & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

то

$$W_n^{-1}\langle -(1+x)\rangle W_n\left({}^{(n)}a_i\right)=(-1)^{n+1}\acute{I}_n\left({}^{(n)}a_i\right),$$

$$W_n^{-1}\langle -(1+x)\rangle W_n=U_n^{-1}\langle -x\rangle U_n=(-1)^{n+1}\acute{I}_n.$$

## 4. Теория биномиальных последовательностей

### 4.1

В математической литературе последовательности строк матриц

$$\left|e^x\right|^{-1}[a_i]\left|e^x\right|,\qquad \left|e^x\right|^{-1}\langle xa_i\rangle\left|e^x\right|$$

называются соответственно аппелевой и биномиальной последовательностями. Оператор

$$\langle x+\beta\rangle=\left|e^x\right|\left[e^{\beta x}\right]^*\left|e^x\right|^{-1}$$

называется оператором сдвига на $\beta$ (или просто оператором сдвига, если

$\beta = 1$) и обозначается $E^{\beta}$. Операторы

$$\left|e^{x}\right|\left[e^{x}-1\right]^{*}\left|e^{x}\right|^{-1}=E-I,$$

где $I$ – тождественный оператор, и

$$\left|e^{x}\right|\left[e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right]^{*}\left|e^{x}\right|^{-1}=E^{\frac{1}{2}}-E^{-\frac{1}{2}}$$

называются соответственно разностным оператором и оператором центральных разностей. Оператор

$$\left|e^{x}\right|\left[x\right]^{*}\left|e^{x}\right|^{-1}$$

называется оператором дифференцирования и обозначается $D$.

Отсюда видно, что изучение биномиальных последовательностей сводится к изучению свойств матриц $\left[a_i\right]$, $\left\langle xa_i\right\rangle$ и применению к полученным результатам операций трансформирования и транспонирования по правилу умножения транспонированных матриц: если $C = AB$, то $C^{*} = B^{*}A^{*}$.

Основные свойства матриц $\left[a_i\right]$ и $\left\langle xa_i\right\rangle$:

$$\left[a_i\right]\left[b_i\right]=\left[b_i\right]\left[a_i\right]=\left[a_i b_i\right];$$

$$\left\langle xa_i\right\rangle\left[b_i\right]=\left[\left\langle xa_i\right\rangle\left(b_i\right)\right]\left\langle xa_i\right\rangle, \quad \left[b_i\right]\left\langle xa_i\right\rangle=\left\langle xa_i\right\rangle\left[\left\langle xa_i\right\rangle^{-1}\left(b_i\right)\right],$$

где левая формула имеет смысл всегда, правая – при $a_0 \neq 0$;

$$\left[\left\langle xa_i\right\rangle\left(b_i\right)\right]=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\left[xa_i\right]^{n};$$

$$D\left[a_i\right]=\left[a_i\right]D+\left[(a_i)'\right];$$

$$D\left\langle xa_i\right\rangle=\left[(xa_i)'\right]\left\langle xa_i\right\rangle D;$$

$$\left\langle xa_i\right\rangle\left\langle xb_i\right\rangle=\left\langle\left\langle xa_i\right\rangle\left(xb_i\right)\right\rangle;$$

$$\langle \log a_i \rangle = \langle a_i - 1 \rangle \langle \log(1+x) \rangle, \ a_0 = 1;$$

$$\left\langle x a_i^k \right\rangle^{-1} = \left\langle x \left( {}_{(-k)} a_i \right)^{-k} \right\rangle,$$

где

$${}_{(k)} a_i = \left\langle x \left( {}_{(k)} a_i \right)^{k} \right\rangle (a_i),$$

$a_0 = 1, \ a_n = 0, \ 0 < n < m, \ \ a_m > 0$ (т.е. первый отличный от нуля член $a_i - 1$ положителен).

Классическое определение [6, с.124]: последовательность полиномов $p_n(x)$ называется биномиальной, если

$$p_0(x) = 1, \quad p_n(x+\beta) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p_m(x) p_{n-m}(\beta),$$

что в наших обозначениях соответствует равенству

$$\langle x a_i \rangle \left[ e^{\beta x} \right] = \left[ e^{\beta x a_i} \right] \langle x a_i \rangle.$$

Наше определение биномиальной последовательности совпадает с другим традиционным определением: последовательность полиномов $p_n(x)$ называется биномиальной, если

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(x)}{n!} t^n = e^{x a(t)}$$

для некоторого формального степенного ряда $a(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$.

Оператор $P$, удовлетворяющий условиям

$$P p_0(x) = 0, \ \ P p_n(x) = n p_{n-1}(x), \ \ n > 0,$$

называется базисным оператором последовательности полиномов $p_n(x)$, которая, в свою очередь, называется базисной последовательностью оператора $P$.

Пусть

$$\left\langle xa_i \right\rangle^{-1} = \left\langle xb_i \right\rangle.$$

Так как

$$\left\langle xa_i \right\rangle \left[ xb_i \right] = \left[ x \right] \left\langle xa_i \right\rangle,$$

то $\left| e^x \right| \left[ xb_i \right]^* \left| e^x \right|^{-1}$ – базисный оператор последовательности строк матрицы $\left| e^x \right|^{-1} \left\langle xa_i \right\rangle \left| e^x \right|$. Например $D$ – базисный оператор последовательности полиномов $p_n(x) = x^n$, $\left| e^x \right| \left[ e^x - 1 \right]^* \left| e^x \right|^{-1}$ – базисный оператор последовательности строк матрицы $\left| e^x \right|^{-1} \left\langle \log(1+x) \right\rangle \left| e^x \right|$, т.е. последовательности полиномов $p_n(x) = \prod_{m=0}^{n-1} (x - m)$.

По определению преобразование $\left| e^x \right| \left[ a_i \right]^* \left| e^x \right|^{-1}$ является оператором, перестановочным со сдвигами. Так как

$$\left[ a_i \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[ x^n \right],$$

то

$$\left| e^x \right| \left[ a_i \right]^* \left| e^x \right|^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n.$$

Так как

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} D^n,$$

то элементы матрицы $\left| e^x \right| \left[ a_i \right]^* \left| e^x \right|^{-1}$ равны произведению одноименных элементов матриц $E$ и $\left[ \left| e^x \right|^{-1} (a_i) \right]^*$:

$$\left| e^x \right| \left[ a_i \right]^* \left| e^x \right|^{-1} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & \cdot \\ 0 & u_0 & 2u_1 & 3u_2 & \cdot \\ 0 & 0 & u_0 & 3u_1 & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & u_0 & \cdot \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

где

$$u_i = \left| e^x \right|^{-1} ( a_i ) = \sum_{n=0}^{\infty} n! a_n x^n .$$

Обозначим $P = \left| e^x \right| \left[ a_i \right]^* \left| e^x \right|^{-1}$. Пусть

$$c_i = \langle x b_i \rangle ( a_i ).$$

Тогда

$$[ a_i ] = \left[ \langle x b_i \rangle^{-1} ( c_i ) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n [ x d_i ]^n ,$$

где

$$\langle x d_i \rangle = \langle x b_i \rangle^{-1} .$$

Таким образом,

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} c_n Q^n ,$$

где $Q$ – базисный оператор последовательности строк матрицы $\left| e^x \right|^{-1} \langle x b_i \rangle \left| e^x \right|$. Это тривиальное утверждение в теории биномиальных последовательностей считается одним из основных результатов, что демонстрирует преимущество наших обозначений по сравнению с традиционными. В классической теории много энергии уходит на доказательство того, что заложено в наших обозначениях.

Обозначим $P' = \left| e^x \right| \left[ (a_i)' \right]^* \left| e^x \right|^{-1}$. Так как

$$\left[ (a_i)' \right] = D [ a_i ] - [ a_i ] D ,$$

то

$$P' = P [ x ] - [ x ] P .$$

Из равенства

$$D \langle x a_i \rangle = \left[ (x a_i)' \right] \langle x a_i \rangle D$$

вытекает, что если

$$\langle x a_i \rangle^{-1} = \langle x b_i \rangle ,$$

то

$$\langle x a_i \rangle \left( (x b_i)' \right) = \frac{1}{(x a_i)'} .$$

Следовательно,

$$D\left\langle xa_i\right\rangle=\left\langle xa_i\right\rangle\left[\frac{1}{(xb_i)'}\right]D,$$

что равнозначно формуле Родригеса

$$p_n(x)=x\left(P'\right)^{-1}p_{n-1}(x),\quad n>0,$$

где $p_n(x)$ – $n$-я строка матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\left\langle xa_i\right\rangle\left|e^x\right|$, $\left(P'\right)^{-1}=\left|e^x\right|\left[\frac{1}{(xb_i)'}\right]^*\left|e^x\right|^{-1}$.

Если $b(x)$ – формальный степенной ряд, то по правилу разложения в ряд Лагранжа

$$\frac{b^k(x)}{1+x\left(\log b(x)\right)'}=\sum_{n=0}^{\infty}x^nb^n(x)\frac{1}{n!}\Big|\,D^n\left(b^k(x)b^{-n}(x)\right)\Big|_{x=0},$$

где выражение $c_n=\frac{1}{n!}\Big|\,D^n\left(b^k(x)b^{-n}(x)\right)\Big|_{x=0}$ означает $n$-й коэффициент ряда $b^{-n+k}(x)$. В наших обозначениях:

$$\frac{b_i^k}{1+x\left(\log b_i\right)'}=\left\langle xb_i\right\rangle\left(c_i\right),$$

где $c_i=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$. Так как

$$b_i\left(1+x(\log b_i)'\right)=b_i+x\left(b_i\right)'=\left(xb_i\right)',$$

то

$$b_i^{k+1}=\left[(xb_i)'\right]\left\langle xb_i\right\rangle\left(c_i\right),$$

$$c_i=\left[(xa_i)'\right]\left\langle xa_i\right\rangle\left(b_i^{k+1}\right),$$

где

$$\left\langle xa_i \right\rangle = \left\langle xb_i \right\rangle^{-1}, \quad \left[ (xa_i)' \right] \left\langle xa_i \right\rangle = \left\langle xa_i \right\rangle \left[ \frac{1}{(xb_i)'} \right].$$

Так как $n$-й член вектора $c_i$ равен $n$-му члену вектора $b_i^{-n+k}$, то $(n-1)$-я строка матрицы $\left[ (xa_i)' \right] \left\langle xa_i \right\rangle$ совпадает с $(n-1)$-й строкой матрицы $\left[ b_i^{-n} \right]$.

Таким образом, равенство

$$D \left\langle xa_i \right\rangle = \left[ (xa_i)' \right] \left\langle xa_i \right\rangle D$$

равнозначно формуле Стеффенсена

$$p_n(x) = xT^{-n} x^{n-1}, \quad n > 0,$$

где $p_n(x)$ – $n$-я строка матрицы $\left| e^x \right|^{-1} \left\langle xa_i \right\rangle \left| e^x \right|$, $T^{-n} x^{n-1}$ – $(n-1)$-я строка матрицы $\left| e^x \right|^{-1} \left[ b_i^{-n} \right] \left| e^x \right|$.

**4.2**

$n$-ю строку матрицы

$$\left| e^x \right|^{-1} \left\langle \log a_i \right\rangle \left| e^x \right|$$

обозначим $p_n(x)$. Так как

$$\left\langle \log a_i \right\rangle \left( e^{\varphi x} \right) = a_i^{\varphi},$$

то

$$a_i^{\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_n(\varphi)}{n!} x^n.$$

Таким образом, понятие биномиальной формы записи, введенное в разделе 1.5, и понятие биномиальной последовательности почти совпадают.

В разделе 1.5 мы выяснили, что если

$$p_n(x) = x \prod_{m=1}^{n-1} \left( x + \alpha_{(n,\, m)} \right), \quad n > 1,$$

где $-\alpha_{(n,\ m)}$ – корни полинома $p_n(x)$, то $n$-я строка матрицы

$$\left|e^x\right|^{-1}\left\langle\log\left({}_{(k)}a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\rangle\left|e^x\right|$$

имеет вид

$$p_{n,k,\beta}(x)=x\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+nk\beta+\alpha_{(n,\ m)}\right).$$

Например, если $a_i=e^x$, то

$$p_n(x)=x^n,\qquad p_{n,k,\beta}(x)=x\left(x+nk\beta\right)^{n-1}.$$

Рассмотрим два класса биномиальных последовательностей, связанных с векторами $1+x$ и $e^x$.

Обозначим $a_i=\left(1+x\right)^{\beta}$, $\beta>0$. $n$-ю строку матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\left\langle\log\left({}_{(k)}a_i\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\rangle\left|e^x\right|$ обозначим $p_{n,k,\beta}(x)$. Тогда

$$p_{0,k,\beta}(x)=1,\quad p_{1,k,\beta}(x)=x,\quad p_{n,k,\beta}(x)=x\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+nk\beta-m\right),$$

$$\left({}_{(k)}a_i\right)^{\frac{\varphi}{\beta}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p_{n,k,\beta}(\varphi)}{n!}x^n.$$

Например,

$${}_{(1)}\left(1+x\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{x}{2},$$

$$p_{n,\ 1,\ \frac{1}{2}}(x)=x\prod_{m=1}^{n-1}\left(x+\frac{n}{2}-m\right),$$

$$p_{2n,\ 1,\ \frac{1}{2}}(x)=\prod_{m=0}^{n-1}\left(x^2-m^2\right),$$

$$p_{2n+1,\,1,\,\frac{1}{2}}(x)=x\prod_{m=0}^{n-1}\left(x^2-\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2\right).$$

Так как

$$\left(1+x\left({}_{(k)}a_i\right)^k\right)^\beta={}_{(k)}a_i,$$

$$x\left({}_{(k)}a_i\right)^k=\left({}_{(k)}a_i\right)^{\frac{1}{\beta}}-1,$$

$$\left\langle x\left({}_{(k)}a_i\right)^k\right\rangle^{-1}=\left\langle xa_i^{-k}\right\rangle,$$

то

$$\left\langle \log\left({}_{(k)}a_i\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\rangle^{-1}=\left\langle e^x-1\right\rangle\left\langle x(1+x)^{-k\beta}\right\rangle=\left\langle\left(e^x-1\right)e^{-k\beta x}\right\rangle.$$

Так как

$$\left\langle e^x-1\right\rangle\left[(1+x)^\varphi\right]=\left[e^{\varphi x}\right]\left\langle e^x-1\right\rangle,$$

$$\left|e^x\right|^{-1}\left[e^{\varphi x}\right]\left|e^x\right|=\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle,$$

то

$$\left[\frac{1}{1-\varphi x}\right]\left\langle\frac{x}{1-\varphi x}\right\rangle\left|e^x\right|^{-1}\left\langle e^x-1\right\rangle\left|e^x\right|=\left|e^x\right|^{-1}\left\langle e^x-1\right\rangle\left[(1+x)^\varphi\right]\left|e^x\right|.$$

Так как $n$-й столбец матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\left\langle e^x-1\right\rangle\left|e^x\right|$, элементами которой являются числа Стирлинга второго рода, имеет вид $x^n\prod_{m=0}^{n}(1-mx)^{-1}$, $n$-й столбец матрицы $\left[(1+x)^\varphi\right]$ имеет вид $x^n(1+x)^\varphi$, $n$-й столбец матрицы $\left\langle x(1+x)^{-k\beta}\right\rangle$ имеет вид $x^n(1+x)^{-nk\beta}$, то $n$-й столбец матрицы

$$\left|e^x\right|^{-1}\left\langle\left(e^x-1\right)e^{-k\beta x}\right\rangle\left|e^x\right|$$

имеет вид

$$\left[\frac{1}{1+nk\beta x}\right]\left\langle\frac{x}{1+nk\beta x}\right\rangle\left(x^n\prod_{m=0}^{n}(1-mx)^{-1}\right)=x^n\prod_{m=0}^{n}(1+(nk\beta-m)x)^{-1}.$$

Например, $n$-й столбец матрицы

$$\left|e^x\right|^{-1}\left\langle\log_{(1)}(1+x)^{\frac{1}{2}}\right\rangle^{-1}\left|e^x\right|=\left|e^x\right|^{-1}\left\langle e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right\rangle\left|e^x\right|$$

имеет вид

$$x^n\prod_{m=0}^{n}\left(1+\left(\frac{n}{2}-m\right)x\right)^{-1},$$

так что четные и нечетные столбцы имеют вид

$$x^{2n}\prod_{m=0}^{n}\left(1-m^2x^2\right)^{-1},\quad x^{2n+1}\prod_{m=0}^{n}\left(1-\left(\frac{2m+1}{2}\right)^2x^2\right)^{-1}.$$

Обозначим $b_i=e^{\beta x}$, $\beta>0$. $n$-ю строку матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\left\langle\log\left({}_{(k)}b_i\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\rangle\left|e^x\right|$ обозначим $q_{n,k,\beta}(x)$. Тогда

$$q_{0,k,\beta}(x)=1,\ \ q_{1,k,\beta}(x)=x,\ \ q_{n,k,\beta}(x)=x(x+nk\beta)^{n-1},$$

$$\left({}_{(k)}b_i\right)^{\frac{\varphi}{\beta}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_{n,k,\beta}(\varphi)}{n!}x^n.$$

Так как

$$\left\langle x\left({}_{(k)}b_i\right)^k\right\rangle\left(e^{\beta x}\right)={}_{(k)}b_i,$$

то

$$x\left({}_{(k)}b_i\right)^k=\log\left({}_{(k)}b_i\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

$$\left\langle\log\left({}_{(k)}b_i\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\rangle^{-1}=\left\langle xe^{-k\beta x}\right\rangle.$$

Так как элементы матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\left\langle xe^{-k\beta x}\right\rangle\left|e^x\right|$ равны произведению одноименных элементов матриц $E^*$, $\left[\left|e^x\right|^{-1}\left(\left(1-x\right)^{-1}\right)\right]$ и $\left\langle xe^{-k\beta x}\right\rangle$, то $n$-й столбец матрицы имеет вид

$$x^n\left(1+nk\beta x\right)^{-n-1}.$$

Полиномы $q_{n,k,\beta}(x)$ называются полиномами Абеля, базисный оператор $\left|e^x\right|\left[xe^{-k\beta x}\right]^*\left|e^x\right|^{-1}=DE^{-k\beta}$ называется оператором Абеля.

**4.3**

Введем в рассмотрение векторы нового вида.

Обозначим

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x,\qquad \frac{e^x-e^{-x}}{2}=\mathrm{sh}x,$$

$$\mathrm{cl}a_i=\mathrm{ch}\log a_i=\left\langle \log a_i\right\rangle(\mathrm{ch}x),$$

$$\mathrm{sl}a_i=\mathrm{sh}\log a_i=\left\langle \log a_i\right\rangle(\mathrm{sh}x),$$

так что

$$a_i=\mathrm{cl}a_i+\mathrm{sl}a_i,\quad a_i^{-1}=\mathrm{cl}a_i-\mathrm{sl}a_i,$$

$$\mathrm{cl}a_i=\left(1+\mathrm{sl}^2a_i\right)^{\frac{1}{2}},\quad \mathrm{sl}a_i=\left(\mathrm{cl}^2a_i-1\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$a_i=\left(1+\mathrm{sl}^2a_i\right)^{\frac{1}{2}}+\mathrm{sl}a_i.$$

Так как

$$\mathrm{sl}\left(\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+x\right)=x,$$

то

$$\left\langle \log\left(\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+x\right)\right\rangle=\left\langle \mathrm{sh}x\right\rangle^{-1},$$

$$\left\langle \mathrm{sl}\left(\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+x\right)^{\beta}\right\rangle=\left\langle \log\left(\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+x\right)^{\beta}\right\rangle\left\langle \mathrm{sh}x\right\rangle=$$

$$=\langle \mathrm{sh}x\rangle^{-1}\langle \beta x\rangle\langle \mathrm{sh}x\rangle.$$

Так как

$$\langle \mathrm{sl}a_i\rangle=\langle \log a_i\rangle\langle \mathrm{sh}x\rangle,$$

то

$$\langle \log a_i\rangle=\langle \mathrm{sl}a_i\rangle\langle \mathrm{sh}x\rangle^{-1}.$$

Так как

$$\left\langle (1+x)^{\beta}-1\right\rangle\langle \log(1+x)\rangle=\langle \log(1+x)\rangle\langle \beta x\rangle,$$

то

$$\left\langle (1+x)^{\beta}-1\right\rangle=\langle \log(1+x)\rangle\langle \beta x\rangle\langle \log(1+x)\rangle^{-1}.$$

Таким образом, получаем равенство

$$\langle \log a_i\rangle\left\langle \log e^{\beta x}\right\rangle\langle \log a_i\rangle^{-1}=$$

$$=\langle a_i-1\rangle\left\langle (1+x)^{\beta}-1\right\rangle\langle a_i-1\rangle^{-1}=$$

$$=\langle \mathrm{sl}a_i\rangle\left\langle \mathrm{sl}\left(\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}+x\right)^{\beta}\right\rangle\langle \mathrm{sl}a_i\rangle^{-1}.$$

Покажем, что преобразование, собственным вектором которого является $a_i^{\beta}$, $a_0=1$, $a_1\neq 0$, с собственным значением $\beta$, является трансформацией оператора $D$. Так как

$$\langle xa_i\rangle D=\left[\frac{1}{(xa_i)'}\right]D\langle xa_i\rangle,$$

то

$$\langle xa_i\rangle D\langle xa_i\rangle^{-1}=\left[\frac{1}{(xa_i)'}\right]D.$$

Следовательно,

$$\langle \log a_i\rangle D\langle \log a_i\rangle^{-1}=\left[\frac{1}{(\log a_i)'}\right]D=\left[\frac{a_i}{(a_i)'}\right]D,$$

$$\left[\frac{a_i}{(a_i)'}\right]D\left(a_i^{\beta}\right)=\beta a_i^{\beta}.$$

Пусть $b_i$ – полином степени $m$, т.е. вектор, все члены которого, начиная с $(m+1)$-го номера, равны нулю. Тогда $a_i^{\beta}$ является собственным вектором преобразования

$$\langle \log a_i \rangle \left| e^x \right| [b_i]^* \left| e^x \right|^{-1} \langle \log a_i \rangle^{-1} = \sum_{n=0}^{m} b_n \left( \left[ \frac{a_i}{(a_i)'} \right] D \right)^n$$

с собственным значением $\sum\limits_{n=0}^{m} b_n \beta^n$.

Так как

$$D(\mathrm{ch}x) = \mathrm{sh}x, \quad D(\mathrm{sh}x) = \mathrm{ch}x,$$

то

$$\left[ \frac{1}{(\log a_i)'} \right] D(\mathrm{cl}a_i) = \mathrm{sl}a_i, \quad \left[ \frac{1}{(\log a_i)'} \right] D(\mathrm{sl}a_i) = \mathrm{cl}a_i,$$

или

$$\mathrm{sl}a_i = \frac{(\mathrm{cl}a_i)'}{(\log a_i)'}, \quad \mathrm{cl}a_i = \frac{(\mathrm{sl}a_i)'}{(\log a_i)'}.$$

Отметим также равенство

$$\langle \log a_i \rangle D \langle \log a_i \rangle^{-1} =$$

$$= \langle a_i - 1 \rangle [1 + x] D \langle a_i - 1 \rangle^{-1} =$$

$$= \langle \mathrm{sl}a_i \rangle \left[ \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{2}} \right] D \langle \mathrm{sl}a_i \rangle^{-1}.$$

**4.4**

Выявим одну интересную особенность строк матрицы $\langle a_i - a_0 \rangle$.

Представим таблицу, строки которой образуются последовательным умножение различных векторов:

$$1, \ a_i, \ a_i b_i, \ a_i b_i c_i, \ \ldots$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 1\,, & 0\,, & 0\,, & \cdot \\
1 & a_0\,, & a_1\,, & a_2\,, & \cdot \\
2 & b_0a_0\,, & b_1a_0 + b_0a_1\,, & b_2a_0 + b_1a_1 + b_0a_2\,, & \cdot \\
3 & c_0b_0a_0\,, & c_1b_0a_0 + \tilde{n}_0b_1a_0 + \tilde{n}_0b_0a_1\,, & \begin{pmatrix} \tilde{n}_2b_0a_0 + \tilde{n}_1b_1a_0 + \tilde{n}_1b_0a_1 + \\ + \tilde{n}_0b_2a_0 + c_0b_1a_1 + \tilde{n}_0b_0a_2 \end{pmatrix}, & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Алгоритм операции умножения приводит к тому, что множеству слагаемых в разложении $n$-го члена $m$-й строки таблицы соответствует множество размещений $n$ неразличимых предметов по $m$ различным ячейкам: различным векторам соответствуют различные ячейки, номеру члена соответствует число предметов в ячейке.

Если $a_i = b_i = c_i = \ldots$, таблица принимает вид

$$
\begin{array}{c|ccccc}
0 & 1\,, & 0\,, & 0\,, & 0\,, & \cdot \\
1 & a_0\,, & a_1\,, & a_2\,, & a_3\,, & \cdot \\
2 & a_0^2\,, & 2a_0a_1\,, & 2a_0a_2 + a_1^2\,, & 2a_0a_3 + 2a_1a_2\,, & \cdot \\
3 & a_0^3\,, & 3a_0^2a_1\,, & 3a_0^2a_2 + 3a_0a_1^2\,, & 3a_0^2a_3 + 6a_0a_1a_2 + a_1^3\,, & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Множеству слагаемых в разложении $n$-го члена $m$-й строки таблицы соответствует множество размещений $n$ неразличимых предметов по $m$ неразличимым ячейкам: выражение $a_0^{m_0}a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots\, a_n^{m_n}$ означает, что в соответствующем слагаемому размещении $m_p$ ячеек содержат одинаковое число предметов, равное $p$. Коэффициент при $a_0^{m_0}a_1^{m_1}a_2^{m_2}\ldots\, a_n^{m_n}$ равен $\dfrac{m!}{m_0!m_1!\,\ldots\, m_n!}$.

Множество размещений $n$ неразличимых предметов по $m$ неразличимым ячейкам можно разбить на подмножества размещений с одинаковым числом пустых ячеек, равным $p$. Каждому такому подмножеству соответствует множество разбиений числа $n$ на $m-p$ слагаемых. При $m < n$ число подмножеств равно $m$, при $m \ge n$ число подмножеств равно $n$.

Таким образом, $n$-й столбец таблицы, $n > 0$, можно представить в виде

$$
\begin{array}{c|lllll}
0 & 0 & & & & \\
1 & a_0^0\varphi_{(n,1)} & & & & \\
2 & 2a_0^1\varphi_{(n,1)} + & a_0^0\varphi_{(n,2)} & & & \\
3 & 3a_0^2\varphi_{(n,1)} + & 3a_0^1\varphi_{(n,2)} + & a_0^0\varphi_{(n,3)} & & \\
4 & 4a_0^3\varphi_{(n,1)} + & 6a_0^2\varphi_{(n,2)} + & 4a_0^1\varphi_{(n,3)} + & a_0^0\varphi_{(n,4)} & \\
. & . & . & . & . & \\
m > n & ma_0^{m-1}\varphi_{(n,1)} + & \cdots & + & a_0^{m-n}\varphi_{(n,n)} &
\end{array},
$$

где

$$\varphi_{(n,\ m)} = \sum \frac{m!}{m_1!m_2!\ \dots\ m_n!}\ a_1^{m_1}a_2^{m_2}\dots a_n^{m_n},\ \ m \le n,$$

и суммирование ведется по всем разбиениям числа $n$ на $m$ слагаемых. Коэффициент при $\varphi_{(n,\ m)}$ в $(m+p)$-й строке таблицы равен вынесенному за знак суммы произведению величины $a_0^p$ с ее долей комбинаторного коэффициента, т.е. $\dfrac{(m+p)!}{m!p!}a_0^p$.

Матрицу, $n$-й строкой которой является полином

$$q_n(x) = \sum_{m=1}^{n} \varphi_{(n,\ m)} x^m,\ \ q_0(x) = 1,$$

обозначим $Q$. Тогда, как видно из таблицы,

$$Q\Big((x + a_0)^m\Big) = a_i^m,$$

и, следовательно,

$$Q = \langle a_i - a_0 \rangle.$$

Отсюда, при $a_0 = 1$, получаем выражение значений $\log a_i$ через значения $a_i$: $n$-й член $\log a_i$ равен

$$\sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \frac{\varphi_{(n,\ m)}}{m}.$$

Рассмотренные в разделе 3.3 преобразования $W_n$, $U_n$ имеют прямое отношение к теории биномиальных последовательностей. Например, если $q_n(x)$ – $n$-я строка матрицы $\langle a_i - 1\rangle$, $a_0 = 1$, $a_1 > 0$, $p_n(x)$ – $n$-я строка матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\langle \log a_i\rangle\left|e^x\right|$, то

$$n!U_nW_n^{-1}\left(\frac{1}{x}q_n(x)\right) = \frac{1}{x}p_n(x),$$

$$\frac{1}{n!}W_nU_n^{-1}\left(\frac{1}{x}p_n(x)\right) = \frac{1}{x}q_n(x),$$

где символ $\frac{1}{x}a_i$ означает $[x]^*(a_i)$.

## 5. Обобщенные биномиальные коэффициенты

Рассмотрим известное обобщение биномиальных коэффициентов [7, с.106].

Для последовательности $b_i$, $b_0 = 0$, $b_n \neq 0$ при $n > 0$, обозначим:

$$b_0! = 1,\ b_n! = \prod_{m=1}^{n} b_m,$$

$$\binom{n}{m}_b = \frac{b_n!}{b_m!b_{n-m}!};\ \binom{n}{m}_b = 0,\ m > n.$$

Тогда

$$\binom{n}{m}_b = \binom{n-1}{m-1}_b + \frac{b_n - b_m}{b_{n-m}}\binom{n-1}{m}_b.$$

Диагональную матрицу, диагональные элементы которой равны значениям вектора $a_i$, обозначим $|a_i|$:

$$|a_i|(b_i) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n.$$

Вектор, $n$-й член которого является обратной величиной $n$-го члена вектора $a_i$, $a_n \neq 0$, обозначим $\breve{a}_i$:

$$\breve{a}_i = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{a_n}, \quad |\breve{a}_i| = |a_i|^{-1}.$$

Рассмотрим трансформацию

$$|a_i|[\breve{a}_i]|\breve{a}_i|=\begin{pmatrix} \frac{a_0}{a_0a_0} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{a_1}{a_0a_1} & \frac{a_1}{a_1a_0} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{a_2}{a_0a_2} & \frac{a_2}{a_1a_1} & \frac{a_2}{a_2a_0} & 0 & 0 & \cdot \\ \frac{a_3}{a_0a_3} & \frac{a_3}{a_1a_2} & \frac{a_3}{a_2a_1} & \frac{a_3}{a_3a_0} & 0 & \cdot \\ \frac{a_4}{a_0a_4} & \frac{a_4}{a_1a_3} & \frac{a_4}{a_2a_2} & \frac{a_4}{a_3a_1} & \frac{a_4}{a_4a_0} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Первый столбец матрицы обозначим $b_i$. Элемент матрицы, стоящий на пересечении $n$-й строки и $m$-го столбца обозначим $(n,m)$. Если $a_0=1$, то

$$a_n=a_1^n b_n!\,,\quad (n,m)=\binom{n}{m}_b.$$

Если $[c_i]$ – произвольная матрица умножения, то элементы матрицы $|a_i|[c_i]|\breve{a}_i|$ равны произведению одноименных элементов матриц $|a_i|[\breve{a}_i]|\breve{a}_i|$ и $[|a_i|(c_i)]$.

Особый интерес представляет случай

$$b_n=\sum_{m=0}^{n-1}q^m\,,\ q\neq-1,$$

который при $q\neq1$ принимает вид

$$b_n=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Обозначим

$$g_i = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q-1)^n x^n}{\left(q^n - 1\right)!}, \; q \neq 0, q \neq 1, q \neq -1,$$

$$\left(q^n - 1\right)! = \prod_{m=1}^{n} \left(q^m - 1\right), \; \left(q^0 - 1\right)! = 1.$$

Элементы матрицы $\left|\acute{g}_i\right|\left[g_i\right]\left|g_i\right|$ равны коэффициентам Гаусса [6, с.102]:

$$\binom{n}{m}_q = \frac{\left(q^n - 1\right)!}{\left(q^m - 1\right)!\left(q^{n-m} - 1\right)!} = \binom{n-1}{m-1}_q + q^m \binom{n-1}{m}_q.$$

Пусть $x^{n-1}a_i$, $x^n b_i$ – соседние столбцы бесконечной матрицы. Если

$$b_0 = a_0, \; b_n = a_n + \beta b_{n-1},$$

то

$$b_n = \sum_{m=0}^{n} \beta^{n-m} a_m, \quad b_i = a_i (1 - \beta x)^{-1}.$$

Следовательно, $n$-й столбец матрицы $\left|\acute{g}_i\right|\left[g_i\right]\left|g_i\right|$ имеет вид

$$x^n \prod_{m=0}^{n} \left(1 - q^m x\right)^{-1}.$$

В [7] показано, что если $n$-й столбец матрицы имеет вид

$${}^n b_i = x^n \prod_{m=0}^{n} (1 - a_m x)^{-1},$$

где $a_i$ – произвольная последовательность чисел, то $n$-я строка обратной матрицы имеет вид

$${}^0 c_i = 1, \quad {}^n c_i = \prod_{m=0}^{n-1} (x - a_m).$$

Например, при $a_i = 1$ получаем матрицы $\left[(1 - x)^{-1}\right]$ и $\left[1 - x\right]$:

$$ {}^{n}b_i = x^n (1-x)^{-1}, \quad {}^{n}c_i = x^{n-1}(x-1); $$

при $a_i = x(1-x)^{-1}$ получаем матрицы $\left\langle x(1-x)^{-1} \right\rangle$ и $\left\langle x(1+x)^{-1} \right\rangle$:

$$ {}^{n}b_i = x^n (1-x)^{-n}, \quad {}^{n}c_i = x(x-1)^{n-1}; $$

при $a_i = (1-x)^{-1}$ получаем матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\left[e^x\right]\left|e^x\right|$ и $\left|e^x\right|^{-1}\left[e^{-x}\right]\left|e^x\right|$:

$$ {}^{n}b_i = x^n (1-x)^{-n-1}, \quad {}^{n}c_i = (x-1)^n; $$

при $a_i = x(1-x)^{-2}$ получаем матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\left\langle e^x - 1 \right\rangle\left|e^x\right|$ и $\left|e^x\right|^{-1}\left\langle \log(1+x) \right\rangle\left|e^x\right|$:

$$ {}^{n}b_i = x^n \prod_{m=0}^{n} (1-mx)^{-1}, \quad {}^{n}c_i = \prod_{m=0}^{n-1} (x-m). $$

Действительно, вектор $\prod_{m=0}^{n-1}(x-a_m)$ совпадает с $n$-й строкой матрицы

$$ \left[ \prod_{m=0}^{n-1} (1-a_m x) \right]; $$

$n$-й член вектора

$$ \left[ \prod_{m=0}^{n-1} (1-a_m x) \right] \left( x^p \prod_{m=0}^{p} (1-a_m x)^{-1} \right) $$

равен $1$ при $p = n$ и $0$ при $p \neq n$.

Таким образом, $n$-я строка матрицы $\left|g_i\right|\left[g_i^{-1}\right]\left|g_i\right|$ имеет вид

$$ \prod_{m=0}^{n-1} \left( x - q^m \right). $$

Гаусс показал, что

$$\prod_{m=0}^{n-1}\left(x-q^{m}\right)=\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}_{q}(-1)^{m}q^{\frac{m(m-1)}{2}}x^{n-m}.$$

Следовательно,

$$|\breve{g}_i|\left(g_i^{-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}q^{\frac{n(n-1)}{2}}x^{n},$$

где

$$q^{\frac{n(n-1)}{2}}=\prod_{m=1}^{n-1}q^{m},\ \ n>1,$$

$$g_i^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}q^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(q-1)^{n}x^{n}}{\left(q^{n}-1\right)!}.$$

Обозначим

$$u_i=\langle -x\rangle\left(g_i^{-1}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}q^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{(q-1)^{n}x^{n}}{\left(q^{n}-1\right)!}.$$

Первый столбец матрицы $|\acute{u}_i|\left[u_i\right]|u_i|$ обозначим $b_i$, элемент, стоящий на пересечении $n$-й строки и $m$-го столбца обозначим $\binom{n}{m}_{\frac{1}{q}}$. Тогда

$$b_n=\frac{q^{n}-1}{q^{n-1}(q-1)}=\frac{q^{-n}-1}{q^{-1}-1},$$

$$\binom{n}{m}_{\frac{1}{q}}=\frac{1}{q^{m(n-m)}}\binom{n}{m}_{q}.$$

Таким образом,

$$g_i^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\left(q^{-1}-1\right)^{n}x^{n}}{\left(q^{-n}-1\right)!}.$$

Представим $g_i^{k}$ как функцию от $x$ и $q$. Тогда

$$g^{-n}(x,\ q)=g^{n}\left(-x,\ \frac{1}{q}\right).$$

## 6. Алгебра рядов Дирихле

### 6.1

Эйлер первым из математиков обнаружил, что некоторые свойства натуральных чисел, плохо различимые в рамках теории чисел, становятся зримей при обращении к алгебре формальных степенных рядов.

Простое число имеет два делителя – единицу и самого себя. Если считать это определением, то единица не является простым числом. Распределение простых чисел не подчиняется строгому закону, но Эйлер открыл, что последовательность сумм делителей натуральных чисел является реккурентной, т.е. такой, каждый член которой по определенному правилу вычисляется по предыдущим членам. Его мемуар «Открытие наиболее необычайного закона чисел, относящегося к суммам их делителей» можно найти в [8, с.112].

Изучая разбиения натуральных чисел, Эйлер придумал метод производящих функций, суть которого в том, что алгоритм получения искомых комбинаторных величин связывается с алгоритмом операции умножения в алгебре формальных степенных рядов. Отсюда, например, видно, что

$$P(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^{n}\right)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^{n},$$

где $p(0)=1$, $p(n)$ – число всевозможных разбиений числа $n$ на слагаемые, т.е. число решений в неотрицательных целых числах уравнения

$$n=1m_1+2m_2+\ldots+nm_n.$$

Раскладывая обратный ряд по степеням $x$, находим:

$$P^{-1}(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^{n}\right)=$$

$$=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ldots=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(x^{\frac{3n^2-n}{2}}+x^{\frac{3n^2+n}{2}}\right).$$

Доказательство вытекает из другого равенства [4. с.138]:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-x^n\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(p_{\div}(n)-p_{\acute{\imath}}(n)\right)x^n,$$

где $p_{\div}(n)$ – число разбиений $n$ на четное число неравных слагаемых, $p_{\acute{\imath}}(n)$ – число разбиений $n$ на нечетное число неравных слагаемых.

Пусть $a^{-1}(x)=b(x)$. Тогда

$$\sum_{m=0}^{n}a_m b_{n-m}=0,\quad n>0,$$

$$a_n=-\frac{1}{b_0}\sum_{m=0}^{n-1}a_m b_{n-m}.$$

Если ряд $b(x)$ конечен или его коэффициенты выражаются общей формулой, то последовательность коэффициентов ряда $a(x)$ является рекуррентной. Таким образом,

$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+p(n-12)+\ldots$$

Последовательность слагаемых обрывается, как только число, стоящее под знаком $p$, становится отрицательным.

Следуя Эйлеру, прологарифмируем ряд $P^{-1}(x)$, продифференцируем полученный результат и домножим на $-x$:

$$\log P^{-1}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-x^n\right),$$

$$-x\left(\log P^{-1}(x)\right)'=B(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}.$$

Разлагая каждый член суммы $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{1-x^n}$ в геометрическую прогрессию, получаем:

$$\begin{aligned}
B(x) = x &+ x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \dots \\
&+2x^2 \quad + 2x^4 \quad + 2x^6 \quad + 2x^8 + \dots \\
&\quad +3x^3 \quad\quad + 3x^6 \quad\quad + \dots \\
&\quad\quad + 4x^4 \quad\quad\quad + 4x^8 + \dots \\
&\quad\quad\quad + 5x^5 \quad\quad\quad + \dots \\
&\quad\quad\quad\quad + 6x^6 \quad\quad + \dots \\
&\quad\quad\quad\quad\quad + 7x^7 \quad + \dots \\
&\quad\quad\quad\quad\quad\quad + 8x^8 + \dots
\end{aligned}$$

«Мы легко здесь находим, – заключает Эйлер, – что каждая степень $x$ встречается столько раз, сколько ее показатель имеет делителей, и что каждый делитель появляется в качестве коэффициента при той же самой степени $x$. Следовательно, если мы соберем члены с одинаковыми степенями, то коэффициент при каждой степени $x$ будет суммой делителей показателя степени». Таким образом,

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)x^n,$$

где $\sigma(n)$ – сумма делителей числа $n$.

С другой стороны,

$$\left(\log P^{-1}(x)\right)' = \frac{\left(P^{-1}(x)\right)'}{P^{-1}(x)}.$$

Пользуясь разложением $P^{-1}(x)$ по степеням $x$, получаем

$$B(x) = \frac{x + 2x^2 - 5x^5 - 7x^7 + 12x^{12} + 15x^{15} - 22x^{22} - 26x^{26} + \dots}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \dots},$$

$$B(x)P^{-1}(x) = -x\left(P^{-1}(x)\right)'.$$

Отсюда выводим:

$$\sigma(n)=\sigma(n-1)+\sigma(n-2)-\sigma(n-5)-\sigma(n-7)+\sigma(n-12)+\ldots$$

Последовательность слагаемых обрывается, как только число, стоящее под знаком $\sigma$ становится отрицательным; если появляется символ $\sigma(0)$, он заменяется числом $n$.

Формальный ряд

$$a(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s}$$

называется рядом Дирихле [5, с.144]. На множестве рядов Дирихле задается операция умножения:

$$a(s)b(s)=c(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n^s},$$

где

$$c_n=\sum_{d|n}a_d b_{n/d},$$

символ $d\,|\,n$ означает, что суммирование ведется по всем делителям числа $n$:

$$c_1=a_1b_1,$$

$$c_2=a_1b_2+a_2b_1,$$

$$c_3=a_1b_3+a_3b_1,$$

$$c_4=a_1b_4+a_2b_2+a_4b_1.$$

Определенное таким образом умножение коммутативно и ассоциативно.

Отображение $\dfrac{1}{n^s}\to x^n$ переводит алгебру рядов Дирихле в изоморфную ей алгебру, заданную на множестве формальных степенных рядов вида

$$a(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n.$$

Умножение задается матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_3 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_4 & a_2 & 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & \cdot \\ 0 & a_6 & a_3 & a_2 & 0 & 0 & a_1 & \cdot \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

$n$-й столбец которой, $n>0$, имеет вид $a\left(x^n\right)$. Как видим, это то самое преобразование, которым пользовался Эйлер для нахождения ряда $B(x)$: если первый столбец матрицы $A$ – ряд $a(x)=x(1-x)^{-1}$, то

$$B(x)=A\left(x(1-x)^{-2}\right).$$

**6.2**

На множестве векторов

$$a_i=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

зададим операцию $\|a_i\|$- умножения:

$$a_i \circ b_i=\|a_i\|(b_i)=\|b_i\|(a_i),$$

где

$$\|a_i\|=\begin{pmatrix} a_\Sigma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_3 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_4 & a_2 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_6 & a_3 & a_2 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & a_8 & a_4 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & \cdot \\ 0 & a_9 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & \cdot \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

$n$-й столбец матрицы имеет вид $\langle x^n \rangle ( a_i )$, так что

$$\langle 1 \rangle ( a_i ) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_{\Sigma}.$$

Для обращения с величинами $a_{\Sigma} = \infty$ и $a_{\Sigma} = 0$ можно ввести непротиворечивые правила, но нам это пока без надобности.

Так как

$$\| x^n \| = \langle x^n \rangle,$$

то

$$\| a_i \| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x^n \rangle.$$

$\| a_i \|$-обратным к $a_i$ назовем вектор $a_i^{(-1)}$, определяемый равенством

$$a_i \circ a_i^{(-1)} = a_i^{(0)} = x.$$

Это согласуется с тем, что $\| x \|$ – единичная матрица. Обозначим

$$a_i^{(n)} = \| a_i \| \left( a_i^{(n-1)} \right).$$

Для краткости алгебру формальных степенных рядов будем называть $[ a_i ]$- алгеброй, алгебру, задаваемую матрицами $\| a_i \|$, – $\| a_i \|$-алгеброй. Проследим аналогию:

$$[ a_i ] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [ x^n ], \quad \| a_i \| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \| x^n \|.$$

Так как

$$[ x^n ][ x^m ] = [ x^m ][ x^n ] = [ x^{n+m} ],$$

то

$$[ a_i ][ b_i ] = [ b_i ][ a_i ];$$

так как

$$\langle x^n \rangle \langle x^m \rangle = \langle x^m \rangle \langle x^n \rangle = \langle x^{nm} \rangle,$$

то

$$\| a_i \| \| b_i \| = \| b_i \| \| a_i \|.$$

Так как

$$\left[ x^m \right]^n = \left[ x^{mn} \right],$$

то $\left[ a_i \right]$ является степенным рядом:

$$\left[ a_i \right] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[ x \right]^n ;$$

так как

$$\left\langle x^m \right\rangle^n = \left\langle x^{m^n} \right\rangle,$$

то $\| a_i \|$ является суммой $a_1 \| x \|$ и бесконечного множества степенных рядов вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{m^n} \| x^m \|^n ,$$

где $m > 1$ и не принимает значений, равных степени натурального числа, отличной от $1$.

Отсюда видно, что если при фиксированном $m > 1$ из матрицы $\| a_i \|$ удалить все строки, кроме строк с номерами $m^n$ и все столбцы, кроме столбцов с номерами $m^n$, то получится обычная матрица умножения. Например, при $m = 2$, $m = 3$:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 & \cdot \\ a_4 & a_2 & a_1 & 0 & \cdot \\ a_8 & a_4 & a_2 & a_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ a_3 & a_1 & 0 & 0 & \cdot \\ a_9 & a_3 & a_1 & 0 & \cdot \\ a_{27} & a_9 & a_3 & a_1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Действительно, матрицы вида

$$\| a_i \| = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m^n} \| x^m \|^n , \; m > 1,$$

будучи степенными рядами, задают алгебру, изоморфную $\left[ a_i \right]$-алгебре: если

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

то

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{m^n}\right)\circ\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{m^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{m^n}.$$

Например,

$$\left(x+x^2\right)^{(m)}=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^{2^n},$$

$$\left(x+x^2\right)^{(-m)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{m+n-1}{n}x^{2^n}.$$

И вообще, если

$$\prod_{n=1}^{r}(x+\varphi_n)=\sum_{n=0}^{r} a_n x^n,$$

то

$$\left(x^m+\varphi_1 x\right)\circ\ldots\circ\left(x^m+\varphi_r x\right)=\sum_{n=0}^{r} a_n x^{m^n}.$$

В $\left\| a_i \right\|$-алгебре векторы вида $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} x^n$ играют ту же роль, которую векторы вида $\sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n$ играют в $\left[ a_i \right]$-алгебре. Последняя обладает свойством, позволяющим свободно манипулировать областью сходимости рядов. А именно, если

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

то

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \beta^n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \beta^n x^n.$$

Это свойство обусловлено тем, что матрица $\langle \beta x \rangle$ как матрица степеней отображает произведение векторов на произведение их образов:

$$\langle \beta x \rangle (a_i b_i) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta^n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \beta^n x^n \right).$$

$\| a_i \|$-алгебра обладает аналогичным свойством: если

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \right) \text{o} \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n ,$$

то

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\beta} x^n \right) \text{o} \left( \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{\beta} x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{\beta} x^n .$$

Обозначим

$$\varsigma_{(\beta)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\beta} x^n .$$

Матрицу, $n$-м столбцом которой является вектор $a_i^{(n)}$, обозначим $\langle\langle a_i \rangle\rangle$. Например,

$$\langle\langle \varsigma_{(0)} \rangle\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdot \\ 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad \langle\langle x\varsigma_{(0)} \rangle\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 2 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 4 & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Видно, что матрица $\langle\langle a_i \rangle\rangle$ не имеет обратной.

Рассмотрим одностороннее произведение матрицы $\langle\langle a_i \rangle\rangle$ с матрицей степеней $\langle b_i \rangle$, $b_i = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Так как

$$\langle\langle a_i\rangle\rangle\left(x^m b_i\right)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\left\|a_i^{(n)}\right\|\left(a_i^{(m)}\right)=\left\|\langle\langle a_i\rangle\rangle\left(b_i\right)\right\|\left(a_i^{(m)}\right),$$

то

$$\langle\langle a_i\rangle\rangle\left[b_i\right]=\left\|\langle\langle a_i\rangle\rangle\left(b_i\right)\right\|\langle\langle a_i\rangle\rangle,$$

или

$$\langle\langle a_i\rangle\rangle\left(b_i c_i\right)=\langle\langle a_i\rangle\rangle\left(b_i\right) \mathrm{o} \langle\langle a_i\rangle\rangle\left(c_i\right).$$

Таким образом, матрица $\langle\langle a_i\rangle\rangle$ отображает $\left[a_i\right]$-произведение векторов на $\left\|a_i\right\|$-произведение их образов. Следовательно,

$$\langle\langle a_i\rangle\rangle\left\langle b_i\right\rangle=\left\langle\left\langle\langle\langle a_i\rangle\rangle\left(b_i\right)\right\rangle\right\rangle.$$

Отсюда получаем для $\left\|a_i\right\|$-алгебры аналоги операций возведения в степень и логарифмирования. Обозначим:

$$a_i^{(\beta)}=\langle\langle a_i-x\rangle\rangle\left((1+x)^\beta\right),\ a_1=1,$$

так что

$$a_i^{(\beta)} \mathrm{o} a_i^{(\varphi)}=a_i^{(\beta+\varphi)};$$

$$\log \mathrm{o} a_i=\langle\langle a_i-x\rangle\rangle(\log (1+x)),\ a_1=1.$$

Так как

$$\langle\langle a_i-x\rangle\rangle\langle\log (1+x)\rangle\left(e^x-1\right)=a_i-x,$$

то

$$\langle\langle\log \mathrm{o} a_i\rangle\rangle\left(e^{\beta x}\right)=a_i^{(\beta)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\log \mathrm{o} a_i\right)^{(n)}}{n!}=x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\log \frac{a_i}{x}\right)^n}{n!},$$

где

$$\frac{a_i}{x}=[x]^*\left(a_i\right)=\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n;$$

$$\log \mathrm{o} a_i^{(\beta)}=\beta \log \mathrm{o} a_i.$$

Так как

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\log\circ a_i\right)^{(n)}}{n!}\right)\circ\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\log\circ b_i\right)^{(n)}}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\log\circ a_i+\log\circ b_i\right)^{(n)}}{n!},$$

то

$$\log\circ\left(a_i\circ b_i\right)=\log\circ a_i+\log\circ b_i.$$

$n$-ю строку матрицы $\langle\langle a_i-x\rangle\rangle$, $a_1=1$, $a_2>0$, обозначим $q_n(x)$. Убедимся, что $2^m$ первых члена $m$-го столбца матрицы $\langle\langle a_i-x\rangle\rangle$ равны нулю. Следовательно,

$$n\geq 2^m,\quad m\leq\frac{\log n}{\log 2},$$

где $m$ – степень полинома $q_n(x)$. Так как (аналогично анализу, проведенному в разделе 3.3)

$$\langle\langle a_i-x\rangle\rangle\left\langle 1+x\right\rangle=\langle\langle a_i\rangle\rangle,$$

$$\langle\langle a_i-x\rangle\rangle\left\langle\left(1+x\right)^{-1}\right\rangle=\langle\langle a_i^{(-1)}\rangle\rangle,$$

то $n$-я строка матрицы $\langle\langle a_i\rangle\rangle$, $n>1$, имеет вид $\dfrac{a_n(x)}{(1-x)^{m+1}}$, $n$-я строка матрицы $\langle\langle a_i^{(-1)}\rangle\rangle$, $n>1$, имеет вид $\dfrac{\breve{a}_n(x)}{(1-x)^{m+1}}$, где $m$ – степень полинома $q_n(x)$,

$$\frac{1}{x}a_n(x)=\breve{I}_m\langle x-1\rangle\breve{I}_m\left(\frac{1}{x}q_n(x)\right),$$

$$\frac{1}{x}\breve{a}_n(x)=(-1)^m\langle x-1\rangle\breve{I}_m\left(\frac{1}{x}q_n(x)\right),$$

$$\frac{1}{x}\breve{a}_n(x)=(-1)^m\,\breve{I}_m\left(\frac{1}{x}a_n(x)\right).$$

$n$-ю строку матрицы $\left|e^x\right|^{-1}\langle\langle\log\circ a_i\rangle\rangle\left|e^x\right|$ обозначим $p_n(x)$. Тогда

$$a_i^{(\beta)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(\beta)}{n!} x^n ,$$

$$\frac{a_n(x)}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{p_n(r)}{n!} x^r , \quad \frac{a_n(x)}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{p_n(-r)}{n!} x^r .$$

## 6.3

Пусть

$$a_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n , \quad b_i = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n .$$

В разделе 4.4 мы выяснили, что $n$-я строка матрицы $\langle b_i - b_0 \rangle, \ n > 0$, имеет вид

$$\sum_{m=1}^{n} \varphi_{(n,\, m)} x^m ,$$

где

$$\varphi_{(n,\, m)} = \sum \frac{m!}{m_1! m_2! \ldots m_n!} b_1^{m_1} b_2^{m_2} \ldots b_n^{m_n} ,$$

выражению $\prod_{p=1}^{n} b_p^{m_p}$ соответствует разбиение $n = \sum_{p=1}^{n} p m_p$, $\sum_{p=1}^{n} m_p = m$, и суммирование ведется по всем разбиениям числа $n$ на $m$ слагаемых:

$$\langle b_i - b_0 \rangle =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & b_2 & b_1^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & b_3 & 2b_1b_2 & b_1^3 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & b_4 & 2b_1b_3+b_2^2 & 3b_1^2b_2 & b_1^4 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & b_5 & 2b_1b_4+2b_2b_3 & 3b_1^2b_3+3b_1b_2^2 & 4b_1^3b_2 & b_1^5 & 0 & \cdot \\ 0 & b_6 & 2b_1b_5+2b_2b_4+b_3^2 & 3b_1^2b_4+6b_1b_2b_3+b_2^3 & 4b_1^3b_3+6b_1^2b_2^2 & 5b_1^4b_2 & b_1^6 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Представление числа $n$ в виде произведения натуральных множителей, упорядоченных по возрастанию, будем называть разложением числа $n$ на множители. Выявим интересную аналогию между строками матриц $\left\langle b_i - b_0 \right\rangle$ и $\langle\langle a_i - a_1 x\rangle\rangle$ с одной стороны и разбиениями на слагаемые и разложениями на множители числа $n$ – с другой.

Рассмотрим таблицу, $m$-й строкой которой является $a_i^{(m)}$:

$$\begin{array}{c|llllll} 0 & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & \cdot \\ 1 & 0, & a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \cdot \\ 2 & 0, & a_1a_1, & a_2a_1+a_1a_2, & a_3a_1+a_1a_3, & a_4a_1+a_2a_2+a_1a_4, & \cdot \\ 3 & 0, & a_1a_1a_1, & \begin{pmatrix} a_2a_1a_1+ \\ a_1a_2a_1+a_1a_1a_2 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a_3a_1a_1+ \\ a_1a_3a_1+a_1a_1a_3 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} a_4a_1a_1+a_2a_2a_1+a_2a_1a_2+ \\ a_1a_4a_1+a_1a_2a_2+a_1a_1a_4 \end{pmatrix}, & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Представим ее в виде:

$$\begin{array}{c|llllll} 0 & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & \cdot \\ 1 & 0, & a_1, & a_2, & a_{3,} & a_4, & \cdot \\ 2 & 0, & a_1^2, & 2a_1a_2, & 2a_1a_3, & 2a_1a_4+a_2^2, & \cdot \\ 3 & 0, & a_1^3, & 3a_1^2a_2, & 3a_1^2a_3, & 3a_1^2a_4+3a_1a_2^2, & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Алгоритм операции $\|a_i\|$-умножения приводит к тому, что множеству слагаемых в разложении $n$-го члена, $n > 0$, $m$-й строки таблицы соответствует множество разложений числа $n$ на $m$ множителей: выражению $\prod_{p=1}^{n} a_p^{m_p}$ соответствует разложение $n=\prod_{p=1}^{n} p^{m_p}$, $\sum_{p=1}^{n} m_p = m$; коэффициент перед $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_n^{m_n}$ равен $\frac{m!}{m_1!m_2!\,\dots\, m_n!}$.

Множество разложений числа $n$ на $m$ множителей можно разбить на подмножества разложений с одинаковым числом единичных множителей, равным $p$; каждому такому подмножеству соответствует множество разложений числа $n$ на $m-p$ нееединичных множителей. Число подмножеств не может быть больше числа множителей в разложении $n$ на простые множители.

Таким образом, $n$-й столбец таблицы, $n>1$, можно представить в виде

$$
\begin{array}{c|lllllllll}
0 & 0 & & & & & & & & \\
1 & a_1^0\alpha_{(n,\,1)} & & & & & & & & \\
2 & 2a_1^1\alpha_{(n,\,1)} & + & a_1^0\alpha_{(n,\,2)} & & & & & & \\
3 & 3a_1^2\alpha_{(n,\,1)} & + & 3a_1^1\alpha_{(n,\,2)} & + & a_1^0\alpha_{(n,\,3)} & & & & \\
4 & 4a_1^3\alpha_{(n,\,1)} & + & 6a_1^2\alpha_{(n,\,2)} & + & 4a_1^1\alpha_{(n,\,3)} & + & a_1^0\alpha_{(n,\,4)} & & \\
\cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \\
m>r & ma_1^{m-1}\alpha_{(n,\,1)} + & & \cdots & & + & & a_1^{m-r}\alpha_{(n,\,r)} & &
\end{array},
$$

где $r$ – число множителей в разложении $n$ на простые множители,

$$\alpha_{(n,\,m)} = \sum \frac{m!}{m_2!m_3!\,\dots\, m_n!}\, a_2^{m_2} a_3^{m_3} \dots a_n^{m_n}, \quad m \le r,$$

выражению $\prod_{p=2}^{n} a_p^{m_p}$ соответствует разложение $n=\prod_{p=2}^{n} p^{m_p}$, $\sum_{p=2}^{n} m_p = m$, и суммирование ведется по всем разложениям числа $n$ на $m$ нееединичных множителей. Коэффициент перед $\alpha_{(n,\,m)}$ в $(m+p)$-й строке таблицы равен вынесенному за знак суммы произведению величины $a_1^p$ с ее долей комбинаторного коэффициента, т.е. $\frac{(m+p)!}{m!\,p!} a_1^p$.

Матрицу, $n$-й строкой которой является полином

$$q_n(x)=\sum_{m=1}^{r}\alpha_{(n,\,m)}x^m,\quad q_0(x)=0,\quad q_1(x)=1,$$

обозначим $Q$. Тогда, как видно из таблицы,

$$Q\Big((x+a_1)^m\Big)=a_i^{(m)}$$

и, следовательно,

$$Q=\langle\langle a_i-a_1x\rangle\rangle:$$

$$\langle\langle a_i-a_1x\rangle\rangle=\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_4 & a_2^2 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_6 & 2a_2a_3 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_7 & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_8 & 2a_2a_4 & a_2^3 & 0 & \cdot\\
0 & a_9 & a_3^2 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_{10} & 2a_2a_5 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_{12} & 2a_2a_6+2a_4a_3 & 3a_2^2a_3 & 0 & \cdot\\
0 & a_{13} & 0 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_{14} & 2a_2a_7 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_{15} & 2a_3a_5 & 0 & 0 & \cdot\\
0 & a_{16} & 2a_2a_8+a_4^2 & 3a_2^2a_4 & a_2^4 & \cdot\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}$$

Отсюда при $a_1=1$ получаем выражение значений $\mathrm{logo}\,a_i$ через значения $a_i$: $n$-й член $\log\text{o}\, a_i$ равен

$$\sum_{m=1}^{r}(-1)^{m+1}\frac{\alpha_{(n,\ m)}}{m},$$

где $r$ – число множителей в разложении $n$ на простые множители.

### 6.4

Рассмотрим фрагмент таблицы, $k$-й строкой которой является $\varsigma_{(0)}^{(k)}$ (аналогичная таблица для $\varsigma_{(\beta)}^{(k)}$ получается умножением $n$-го столбца на $n^{\beta}$):

| $k \setminus n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | · |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · |
| 4 | 0 | 1 | 4 | 4 | 10 | 4 | 16 | 4 | 20 | 10 | 16 | 4 | 40 | 4 | 16 | 16 | 35 | 4 | 40 | · |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 3 | 6 | 3 | 9 | 3 | 10 | 6 | 9 | 3 | 18 | 3 | 9 | 9 | 15 | 3 | 18 | · |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 | 2 | 6 | 2 | 4 | 4 | 5 | 2 | 6 | · |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | · |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | · |
| −1 | 0 | 1 | −1 | −1 | 0 | −1 | 1 | −1 | 0 | 0 | 1 | −1 | 0 | −1 | 1 | 1 | 0 | −1 | 0 | · |
| −2 | 0 | 1 | −2 | −2 | 1 | −2 | 4 | −2 | 0 | 1 | 4 | −2 | −2 | −2 | 4 | 4 | 0 | −2 | −2 | · |
| −3 | 0 | 1 | −3 | −3 | 3 | −3 | 9 | −3 | −1 | 3 | 9 | −3 | −9 | −3 | 9 | 9 | 0 | −3 | −9 | · |
| −4 | 0 | 1 | −4 | −4 | 6 | −4 | 16 | −4 | −4 | 6 | 16 | −4 | −24 | −4 | 16 | 16 | 1 | −4 | −24 | · |
| · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · | · |

Пусть символ $|1|_n$ означает единицу. Символ $|m|_n$, $m > 1$, определим рекуррентной формулой

$$|m|_n = \sum_{d|n} |m-1|_d\,,$$

так что $|2|_n$ означает число делителей числа $n$, и т.д.:

$$|2|_n = \sum_{d|n} |1|_d\,, \quad |3|_n = \sum_{d|n} |2|_d\,, \ \ldots$$

По определению $n$-й член вектора $\varsigma_{(0)}^{(m)}$, $n > 0$, $m > 0$, равен $|m|_n$.

Представим таблицу, $m$-й строкой которой, является вектор $(1-x)^{-m}$:

| $m \setminus n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | $\cdot$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | $\cdot$ |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdot$ |
| 3 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | $\cdot$ |
| 4 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | $\cdot$ |
| 5 | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | $\cdot$ |
| $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ | $\cdot$ |

$n$-й член $m$-й строки таблицы – обозначим его $a_n^m$ – равен сумме $n+1$ первых членов предыдущей строки. Если $p$ – простое число, то, как видно из таблицы,

$$|m|_{p^n} = a_n^m.$$

Пусть $n = p_1^s p_2^r$, где $p_1$, $p_2$ – различные простые числа, $s$, $r$ – натуральные числа. Тогда

$$\left(\sum_{d|p_1^s} d\right)\left(\sum_{d|p_2^r} d\right) = \left(1+p_1+\ldots+p_1^s\right)\left(1+p_2+\ldots+p_2^r\right) = \sum_{d|n} d.$$

Отсюда выводим

$$|2|_n = \sum_{d|n} |1|_d = \left(\sum_{d|p_1^s} |1|_d\right)\left(\sum_{d|p_2^r} |1|_d\right) = |2|_{p_1^s} |2|_{p_2^r},$$

$$|3|_n = \sum_{d|n} |2|_d = \left(\sum_{d|p_1^s} |2|_d\right)\left(\sum_{d|p_2^r} |2|_d\right) = |3|_{p_1^s} |3|_{p_2^r},$$

$$|m|_n = |m|_{p_1^s} |m|_{p_2^r}.$$

Обобщая, выводим: если

$$n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_r^{s_r},$$

то

$$|m|_n = |m|_{p_1^{s_1}} |m|_{p_2^{s_2}} \ldots |m|_{p_r^{s_r}} = a_{s_1}^m a_{s_2}^m \ldots a_{s_r}^m.$$

Так как

$$a_n^m = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{n!} = \frac{[m]_n}{n!},$$

то

$$\varsigma_{(0)}^{(m)} = \sum_{n=1}^{\infty} |m|_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[m]_{s_1}[m]_{s_2}\ldots[m]_{s_r}}{s_1!s_2!\ldots s_r!} x^n,$$

где $[m]_{s_i}$ – возрастающий факториал длины $s_i$, $s_i$ – показатель степени простого числа в каноническом разложении числа $n$.

Матрицу, нулевая и первая строки которой соответственно $0$ и $1$, а $n$-я строка имеет вид

$$\frac{[x]_{s_1}[x]_{s_2}\ldots[x]_{s_r}}{s_1!s_2!\ldots s_r!},$$

обозначим $A|e^x|$. Тогда

$$A\langle e^x \rangle = \langle\langle \varsigma_{(0)} \rangle\rangle,$$

$$A\langle e^x - 1\rangle\langle x+1\rangle = \langle\langle \varsigma_{(0)} \rangle\rangle,$$

$$A = \langle\langle \varsigma_{(0)} \rangle\rangle\langle x-1\rangle\langle \log(1+x)\rangle,$$

$$A = \langle\langle \varsigma_{(0)} - x\rangle\rangle\langle \log(1+x)\rangle,$$

$$A = \langle\langle \log\text{o}\varsigma_{(0)} \rangle\rangle.$$

Таким образом, если $p_n(x)$ – $n$-я строка матрицы

$$|e^x|^{-1}\langle\langle \log\text{o}\varsigma_{(0)} \rangle\rangle|e^x|,$$

то

$$p_0(x) = 0, \quad p_1(x) = 1, \quad \frac{p_n(x)}{n!} = \frac{[x]_{s_1}[x]_{s_2}\ldots[x]_{s_r}}{s_1!s_2!\ldots s_r!},$$

где

$$[x]_{s_i} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+s_i-1),$$

$s_i$ – показатель степени простого числа в каноническом разложении числа $n$,

$$\varsigma_{(0)}^{(\beta)} = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[\beta]_{s_1} [\beta]_{s_2} \ldots [\beta]_{s_r}}{s_1! s_2! \ldots s_r!} x^n .$$

Последовательность коэффициентов ряда $\varsigma_{(0)}^{(-1)}$, рассматриваемая как функция, заданная на множестве натуральных чисел, называется функцией Мёбиуса, обозначается $\mu(n)$ и определяется следующим образом: если

$$n = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots p_r^{s_r}$$

– каноническое разложение числа $n$, то

$$\mu(1) = 1,$$

$$\mu(n) = 0, \text{ если какое-либо } s_i > 1,$$

$$\mu(n) = (-1)^r, \text{ если все } s_i = 1.$$

Это соответствует нашему определению:

$$[-1]_{s_1} [-1]_{s_2} \ldots [-1]_{s_r} = 0 \quad \text{при } s_i > 1,$$

$$\left([-1]_1\right)^r = (-1)^r .$$

Обозначим:

$$\varsigma_{(0)}^{(-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) x^n , \quad \operatorname{logo}\varsigma_{(0)} = \sum_{n=2}^{\infty} \lambda(n) x^n .$$

Согласно результатам предыдущего раздела,

$$\mu(n) = \sum_{m=1}^{r} (-1)^m \alpha_{(n,\, m)}, \quad \lambda(n) = \sum_{m=1}^{r} (-1)^{m+1} \frac{\alpha_{(n,\, m)}}{m}, \quad n > 1,$$

где $r$ – число множителей в разложении $n$ на простые множители,

$$\alpha_{(n,\, m)} = \sum \frac{m!}{m_2! m_3! \ldots m_n!}, \quad \prod_{p=2}^{n} p^{m_p} = n, \quad \sum_{p=2}^{n} m_p = m,$$

и суммирование ведется по всем разложениям числа $n$ на $m$ нееденичных множителей.

Из определения полинома $\frac{p_n(x)}{n!}$ вытекает, что $\lambda(n)=0$, если $n$ не является степенью простого числа, так как в этом случае первый член полинома $\frac{p_n(x)}{n!}$, т.е. $n$-й строки матрицы $\langle\langle \log \circ \varsigma_{(0)}\rangle\rangle\left|e^x\right|$, равен нулю. Если $n=p^s$, где $p$ – простое число, то первый член полинома $\frac{p_n(x)}{n!}$ равен $\frac{(s-1)!}{s!}=\frac{1}{s}$. Так как первый столбец матрицы $\langle\langle \log \circ \varsigma_{(0)}\rangle\rangle\left|e^x\right|$ совпадает с первым столбцом матрицы $\langle\langle \log \circ \varsigma_{(0)}\rangle\rangle$, то $\lambda(n)=\frac{1}{s}$, если $n=p^s$.

**6.5**

Обозначим

$$\left\langle x^n\right\rangle(c_i)=c\left(x^n\right),$$

где $c_0=1$. Свойство логарифма

$$\log c\left(x^n\right)=\left\langle x^n\right\rangle(\log c(x))$$

подсказывает, что $\|a_i\|$-алгебру можно рассматривать как алгебру логарифмов, представляя векторы $a_i$, $b_i$ в виде

$$a_i=\log c(x),\ b_i=\log d(x).$$

Тогда

$$a_i \circ b_i=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \log c\left(x^n\right)=\log \prod_{n=1}^{\infty} c^{b_n}\left(x^n\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \log d\left(x^n\right)=\log \prod_{n=1}^{\infty} d^{a_n}\left(x^n\right).$$

Если при этом $b_i=a_i^{(-1)}$, то

$$\prod_{n=1}^{\infty} c^{b_n}\left(x^n\right) = \prod_{n=1}^{\infty} d^{a_n}\left(x^n\right) = e^x.$$

$n$-й член вектора $c^{b_p}\left(x\right)$ обозначим $c_n^{b_p}$. Тогда по формуле Файна [1, с.180], учитывая, что $c_0^{b_p} = 1$,

$$\prod_{n=1}^{\infty} c^{b_n}\left(x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C(n) x^n,$$

где

$$C(n) = \sum c_{m_1}^{b_1} c_{m_2}^{b_2} \ldots c_{m_n}^{b_n}, \quad \sum_{p=1}^{n} p m_p = n,$$

и суммирование ведется по всем разбиениям числа $n$.


1. Риордан Д. Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982.
2. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. М.: ФМ, 1960.
3. Стахов А. П . Металлические Пропорции – новые математические константы Природы. http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321079.htm
4. Риордан Д. Введение в комбинаторный анализ. М.: ИЛ, 1963.
5. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. М.: Наука, 1977.
6. Айгнер М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.
7. Платонов М. Л. Комбинаторные числа класса отображений и их приложения. М.: Наука, 1979.
8. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975.